211

43

P.N.-2

641302
Smithsonian
2

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXVII

1879-80

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME VIII.

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1880

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXVII

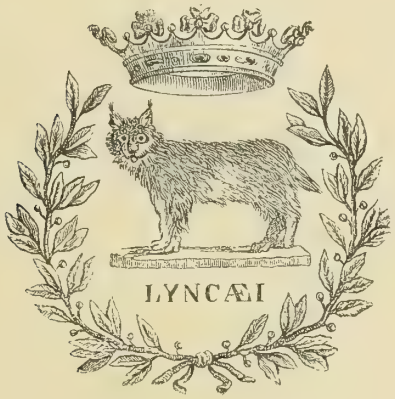
1879-80

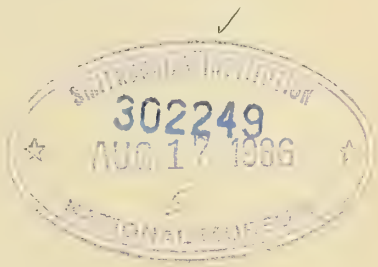
SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME VIII.





ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1880

I Vulcani Cimini.

Memoria di ANTONIO VERRI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 7 marzo 1880.

Nel marzo 1878, il professore Dante Pantanelli mi scriveva a Pavia: « Ella dice « che le trachiti di monte Amiata sono mioceniche; ha dati suoi per questo giudi- « zio, o lo ha dedotto da lavori altrui? So che questa cosa è stata detta, ma so anche « per mia esperienza e per quella di altri miei amici (Lotti, De Stefani) che vi sarebbero « degli argomenti per ritenerle post-plioceniche. Così non esistono in nessuna ghiaja « pliocenica conosciuta dei dintorni del monte Amiata ciottoli di trachite. Lo stesso « si verifica per le trachiti di Rocca Strada e Teviniella. Ha Ella trovato delle ghiaje « plioceniche con trachiti? Badi che io qui elevo un dubbio e non intendo fare alcuna « asserzione ». Risposi che nessuna speciale osservazione m'aveva condotto a riferire le eruzioni delle trachiti ad un periodo piuttosto che all'altro dell'êra terziaria, e non aveva fatto altro che seguire le opinioni degli scrittori, nelle cui opere, per quanto era a me noto, si parlava delle roccie trachitiche; che non conosceva i terreni di Rocca Strada, nè vedeva depositi pliocenici vicini alle trachiti sulle carte geologiche di quei luoghi; che, quanto al monte Amiata, dagli appunti presi mi risultava attualmente il pliocene distante circa 4 chilometri dalle trachiti; le altre osservazioni, esposte nelle note pubblicate, m'inducevano a ritenere, che avanti il sollevamento post-plio- cenico, la faccia orientale dell'isola Amiatina doveva avere poca elevazione sul livello del mare; la sua figura mi escludeva la presenza di grossi corsi d'acqua che potes- sero rotolare il ciottolame molto lontano; per cui non mi sembrava improbabile l'attri- buire la mancanza di ghiaje trachitiche all'esteso corrodimento, per il quale la valle del Paglia separa i depositi pliocenici dalle roccie del monte Amiata. Per ultimo gl'indicai un luogo, dove, essendovi passato anni avanti che incominciassi queste ricerche, mi ricordava d'aver fatto raccogliere dal pedone un ciottolo di trachite su d'un terreno marnoso.

L'avere l'attenzione volta più specialmente alle contrade della costiera plioce- nica subapennina, onde veder di decifrarne le rivoluzioni oroidrografiche, il dubbio di poter ricavare qualche schiarimento con una nuova escursione a monte Amiata, mi fecero porre da parte pel momento la quistione, sperando che sarebbero escite alla luce delle spiegazioni dagli studî dei citati Naturalisti.

Molti mesi dopo trasferito a Terni e andando nel gennaio del 1879 a Viterbo, m'accorsi che in quel territorio le masse trachitiche si estendono assai di più che non lo segnino le carte geologiche fino ad ora pubblicate; e che a 7 chilometri

dalla Stazione di Orte, sulla strada di Viterbo la trachite si trova in rapporto diretto coi depositi marini del pliocene. Presa qualche nota, avendo dovuto nel mese stesso andare a Roma, ne parlai coll'egregio amico ing. Romolo Meli. Egli alla cui cortesia mi riconosco sommamente obbligato, mi fece conoscere le Note sulle trachiti del monte Amiata di recente pubblicate dal Lotti, mi indicò gli scritti del Brocchi, dello Scrope, del Ponzi, nei quali si parlava del gruppo Cimino: mi agevolò presso il Museo di mineralogia una sommaria descrizione dei minerali più visibili contenuti nei saggi portati delle trachiti, e mi classificò alcuni fossili raccolti nel Viterbese. Mercè un tale aiuto mi fu reso più facile lo estendere le osservazioni, e collegarle con quelle di diversi scienziati.

L'esame comparativo, tra i miei appunti e le notizie riferite dagli scrittori, m'ha fatto dubitare che alcuni fatti fino ad oggi non siano stati esposti, e che sia necessaria qualche modificazione nei criteri, coi quali alcuni altri fatti furono spiegati. Tali motivi m'hanno indotto ad ordinare quegli appunti, ed a presentarli nelle seguenti pagine, nella speranza che possano recare ancora qualche altro lume per determinare i fenomeni del vulcanismo tirreno.

I.

Riepilogo bibliografico.

In una residenza fuori d'ogni movimento intellettuale, ecco quanto per la gentilezza del prof. Taramelli, e dell'ing. Meli, ho potuto raccogliere sulle osservazioni di diversi naturalisti riguardo ai fenomeni speciali del territorio Cimino, e generalmente sulle formazioni trachitiche.

G. Brocchi, *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce disposte con ordine geografico, per servire alla geognosia dell' Italia.* Milano 1878.

Nella introduzione scrive che trovò nella regione dei Cimini un campo nuovo, ove niun naturalista aveva posto piede; che quelle eminenze vulcaniche offrono da una parte le rocce del monte Amiata, della Manziana, del monte Virginio, della Tolfa, dall'altra grandi correnti di lave analoghe a quelle del Lazio, dei campi Flegrei, dell'isola d'Ischia. Che le lave di Viterbo sono singolarissime, come quelle di Acquapendente, pel fatto di racchiudere felspati, pirossene, amfigeni. Che il bacino del lago di Ronciglione sembra essere stato un cratere. Che ritiene i vulcani spenti lungo il tirreno fossero in attività quando il mare inondava quelle contrade. Che il tufa solido, compatto, pietroso dei Cimini sia eguale a quello di Roma per componenti, solo che questi a Roma si trovano più sminuzzati atteso l'attrito sofferto durante il lungo rotolamento nelle acque del mare; quindi il tufa Laziale essere niente altro che il prodotto delle eruzioni Cimine e Sabatine, portato dalle acque marine fino a Roma.

Nei Capitoli XVII, XIX, XX del catalogo descrive moltissimi saggi di rocce sedimentarie e vulcaniche, raccolti da lui stesso nella zona d'azione dei Cimini. Chiama la trachite col nome di lava necrolite, e la divide in due varietà: l'una a grandi felspati, e questa dice che è sempre nelle eminenze; l'altra a piccioli felspati ed a grana più minuta, la quale comparisce soltanto al piede di esse. Il catalogo è così esteso,

e così precise sono le indicazioni dei luoghi, che potrebbe bastare al disegno d'uno schizzo di carta geologica, e non si capisce come sia avvenuto che, nelle carte pubblicate, dipoi sia stata ommessa per la più gran parte la zona delle trachiti.

Marchese Pareto, *Osservazioni geologiche da monte Amiata a Roma*, giornale Arcadico, luglio 1844.

Alla Memoria sono annessi un abbozzo di carta geognostica, ed una tavola di profili. L'autore dedica poche parole ai Cimini: dall'insieme m'è sembrato rilevare che riteneva appartenere alla stessa categoria le trachiti del monte Amiata, dei Cimini, di Bracciano, della Tolfa. Nel sistema Vulsinio indica tre centri di attività: Latera, Torre Alfina, Montefiascone. Scrive che la linea d'azione perimetrica del Cimino s'interseca con quella del sistema Vulsinio presso il torrente Vezza; che il lago di Vico rappresenta il cratere delle eruzioni del periodo subaereo, e che monte Venere ne è un cono eruttivo; che il tufa è un prodotto di materie eruttive in bacini acquosi marini o lacustri.

Senatore prof. G. Ponzi, *Descrizione della Carta geologica della Provincia di Roma*. Atti dell'Accademia dei nuovi Lincei, marzo 1851.

È questa la Memoria dove sono raccolte le osservazioni più precise, e nella quale sia stato parlato più distesamente del gruppo Cimino. Disgraziatamente non fu pubblicata la carta, e la descrizione stessa mi sarebbe stato impossibile rintracciare, senza l'affetto di venerazione che il gentilissimo sig. Meli professa per l'illustre Maestro.

L'autore, riferite le osservazioni fatte, nella sintesi scrive che al declinare del periodo pliocenico fu di nuovo turbato lo stato tranquillo di quelle contrade, e di nuovo si suscitarono le forze interne ad azioni eruttive. Immense masse di trachite fusa furono spinte ad aprirsi un passaggio attraverso le fenditure della crosta terrestre, sbucare all'esterno, e sollevarsi a modo di coni o cupole, i quali col raffreddamento restarono sotto forma di picchi o prominenze isolate. La sommità del monte Amiata, la massa centrale dei monti della Tolfa, il monte Cimino, il Virginio e la prominenza del Sasso sono potenti testimoni di siffatte eccentriche azioni . . . . . La posizione del Cimino e del Virginio indicano, non v'ha dubbio, avere sbucato al di sotto delle acque ed emerso a modo d' isole coniche nel mezzo del golfo pliocenico, per vieppiù frazionarlo, e ridurlo ad un vero arcipelago . . . . . Le osservazioni fatte alla Tolfa e al Sasso, vicino la Manziana, a Vitorchiano sulle sponde del Vezza, ci danno le prove di quel modo di agire, imperocchè notasi la trachite aver penetrati e trascorsi i sedimenti pliocenici che gli formano letto, indicando nel tempo istesso la posteriorità della sua origine.

Lasciati da parte i molti altri scritti del Ponzi, per la maggiore attinenza al soggetto, interessa riportare le sue vedute espresse nella Memoria: *La Tuscia Romana e la Tolfa*. R. Accademia dei Lincei, anno 1876-77.

In questa pone le prime eruzioni della trachite della Tolfa al declinare dell'epoca eocenica; le seconde sul finire del miocene. Dice d'essere inclinato a credere che anche le trachiti di monte Virginio e del Cimino siano propaggini del

centro tolfetano; dubita però che le trachiti del monte Amiata e del Volterrano debbano essere riferite ad un centro diverso. Scrive doversi attribuire, secondo l'opinione emessa dal Brocchi, alla pressione della massa soprastante, il fatto che nelle trachiti inferiori del Cimino i cristalli sono più piccoli.

Discorrendo sugli altri fenomeni vulcanici, che seguirono l'eruzione delle trachiti, pone in primo ordine la eruzione delle scorie, lapilli, ceneri, pezzi di lava, coi quali materiali impastati e trasportati dalle acque marine, sul fondo del gran golfo si formò il tufo nell'epoca glaciale. Dei tre bacini lacustri di Bolsena, Vico, Bracciano dice che solo quello di Vico presenta i caratteri d'un cratere; gli altri non sono che sprofondamenti prodotti da sventramenti vulcanici, ed i crateri eruttivi stanno sui loro fianchi. Però gli sembra che, prima che avvenisse lo sventramento di Bolsena, ivi dovesse esistere un vero cono di eruzione, perchè l'isola Bisentina, che sembra un brano di quella demolizione, mostra correnti di lava scaturite da qualche prossima bocca eruttiva. Le osservazioni sul monte Venere lo fanno sospettare che quel monte abbia fatto parte della divisione tra due crateri geminati, demoliti e ridotti dall'abrasione.

Dalle due citazioni apparirebbe che il Ponzi, dopo lo studio sulle formazioni della Tolfa, abbia cambiato il modo di vedere circa alla cronologia delle eruzioni della trachite. Però, nella occasione del citato viaggio da me fatto a Roma, parlandogli delle trachiti Cimine, sulla quistione del periodo cui riferirle, lo udii ritornare alle opinioni emesse nella prima delle citate Memorie.

G. P. Scrope, *Volcanos, The Character of their phenomena* etc. London 1872, 2ª edition. pag. 352, 353.

Nessun maggiore lume portano le poche parole di questo autore sull'argomento. Dice che dal cratere-lago di Monterosi ha sbucato una corrente di lava basaltina nera. Che Ronciglione sta sopra tufo stratificato, formante l'orlo meridionale e più basso d'un imponente gruppo circolare di colline chiamate i monti Cimini, nei quali si racchiude un grande cratere-lago, dal cui mezzo si eleva un cono secondario. Questo cratere è un regolarissimo e considerevole monte vulcanico, del quale le esterne pendenze, ed i letti che lo compongono sono da tutte le parti inclinati con molta uniformità dall'orlo superiore al piano circostante; meno che al nord, dove due considerevoli gobbe di trachite sporgono all' infuori della massa principale, e vengono chiamate monte di Viterbo e monte Soriano. Le lave prodotte da questo vulcano sono principalmente trachitiche. Esse sono accompagnate dai loro propri tufi.

Prof. A. Stoppani, *Corso di Geologia*. Milano 1872.

Secondo l' autore la catena va distinta in due gruppi, uno diverso affatto dall'altro e topograficamente e geologicamente. I colli Cimini constano di trachiti; non hanno la forma di cono craterico, ma invece quella d'irregolari eminenze. Le trachiti sono certo più antiche dei leucitofori che loro sorgono appresso. Cita il Rath, la cui opinione è che siano sincrone alle trachiti della Tolfa e degli Euganei, nonchè a quelle del monte Amiata e del monte Virginio. La seconda parte della catena è costituita dal gran cono craterico di Vico, che è il tipo più perfetto di vulcano subaereo

a recinto. Il monte Venere è un cono un poco forcuto alla sommità, che ha l'aspetto di vero cono vulcanico intercluso. Non ha cratere ben distinto; ma la depressione, per cui la sommità appare forcuta, accenna abbastanza bene ad un cratere quasi colmato dalla erosione del circo. Infatti una enorme corrente di lava nasce da quella depressione, si volge con rapido pendio al basso, e giunge fino alla base del cono. Quella corrente rappresenta l'ultima eruzione del vulcano di Vico.

Sull'argomento del tufo basilare o tufa, dice che è ritenuto come il più antico prodotto dei vulcani quaternari dell'Italia centrale; ritiene che una parte del golfo subapennino non fosse interamente prosciugato e si trovasse nelle condizioni di una maremma, di una regione di lagune, di bassi fondi; che su questo fondo originariamente i vulcani romani abbiano disteso il loro detrito, il quale dovette uguagliarsi in forma di piano.

Per la quistione delle epoche cui si debbono riferire le eruzioni trachitiche, credo che, ad allargare l'orizzonte dei giudizi, non sia perduto riferire anche un riassunto delle due Memorie seguenti, benchè parlino di località diverse.

Prof. G. A. Pirona, *Memoria sulla costruzione geologica dei monti Euganei.* Venezia 1870.

L'autore stabilisce la serie delle roccie trachitiche degli Euganei nell'ordine seguente:

Doleriti — prodotte da eruzione sottomarina a piccola profondità, contemporanee alla deposizione dell'eocene medio perchè alternano con strati nummolitici;

Trachite nera, o trachite andesite — prodotta da eruzione sottomarina: non si può precisare se sia anteriore o posteriore alla dolerite;

Trachiti anfiboliche — eruttate da vulcani subaerei quando il mare miocenico aveva incominciata la deposizione delle marne con avanzi di piante terrestri, ossia nella fase di estuario del mare miocenico;

Riolite trachitica — eruttata da vulcani subaerei posteriori;

Riolite litoide o porfido litoico — prodotto da posteriore eruzione sottomarina;

Rocce perlitiche — dovute ad eruzioni sottomarine e più recenti delle precedenti.

In riassunto, secondo l'autore, nei primordi dell'epoca eocenica incominciarono le eruzioni vulcaniche sottomarine dei basalti, e delle doleriti; seguì un sollevamento, ed una frattura sottomarina eruttò la trachite andesite; si arrestò il sollevamento, il fondo marino divenne un estuario (miocene), si risvegliò l'attività vulcanica e le trachiti costruirono delle isole; nuova oscillazione discendente del terreno, sommersione delle isole di trachite, ed eruzione dai crateri delle rioliti ialine, e delle perliti; emerge definitivamente dalle acque la regione Euganea, e cessano le eruzioni.

B. Lotti, *Nota su monte Amiata*, Bollettino del r. Comitato geologico d'Italia n. 7-10. 1878.

L'autore, sulla genesi del monte Amiata, dice che a nessuno può cadere dubbio che sia stato un vulcano. Però la parola vulcano deve prendersi in tal caso nel suo

più ampio significato, poichè non si può ammettere che la eruzione trachitica avvenisse con tutte quelle manifestazioni tumultuose e violenti, quali le esplosioni, le eiezioni di bombe, lapilli, e ceneri ecc. Però deve ritenersi formato dall'accumulamento di due masse eruttive differenti, una anteriore, quella della trachite cellulosa, una posteriore, quella della trachite ordinaria. Nella trachite perfiroide abbonda anche l'augite. La eruzione, non accompagnata da grande sviluppo di vapore acqueo, non dette luogo ad esplosioni, ad eiezioni di materiali sciolti, nè agli altri fenomeni che caratterizzano la maggior parte delle eruzioni vulcaniche attuali; il magma cristallino traboccò tranquillamente sulla superficie, trasportando seco frammenti staccati dall'interno, e disponendosi in forma di cupola o di mantello. Secondo l'autore l'eruzione sarebbe avvenuta dopo il pliocene e dopo il sollevamento del fondo marino.

II.

Aspetto e topografia del territorio.

In quel tronco della valle Tiberina, tra Orte e Borghetto, salito il ciglione che domina la destra del fiume, si distende per circa 15 chilometri una spianata, la quale, con pendenza lenta e continua di appena il due per cento, termina ad un gruppo isolato di due monti, legati tra loro da una specie di cortina. Profondi botri solcano quella spianata: vicino alla valle del Tevere le loro pendici sono coronate da dirupi verticali alti una decina di metri, nell'interno le masse a picco occupano tutta l'altezza del burrone per 50 e 70 metri. Anguste stradicciole tagliate nel corpo della roccia menano nel letto dei torrenti, e giunti laggiù, qualche volta ci si trova addosso le mura e le torri di vecchi castelli costrutti negli speroni di confluenza sull'orlo dell'abisso. Innumerevoli grotte scavate sui dirupi concorrono a rendere più singolare un paesaggio, dove blocchi pietrosi di qualche metro cubo si trovano sparsi qua e là, senza ordine nè legame alcuno coi terreni sui quali giacciono; dove raramente s'incontrano l'olivo e la vite, ma le boscaglie si alternano agli spaziosissimi campi e le ampie praterie; dove di rado qualche casa campestre rompe la solitudine, e quasi solo indizio di vita è il tintinnio delle campanelle legate al collo degli armenti, o l'urlo della lumaca marina che raduna il gregge intorno al pastore.

Sulla strada, la quale da Orte conduce a Viterbo, nel gruppo Cimino cessa l'apparenza d'un monte troncato; il solo monte di Soriano si stacca sull'altipiano per 700 metri di altezza. Proseguendo la via, la massa che appariva unita si spezza in tanti poggi: il monte di Soriano, il Cigliano, il Piobbico, il San Valentino, la Palanzana colle loro cupole, colle loro troncature simulano l'aspetto di altrettanti coni d'eruzione, le cui lave, a rendere completa l'illusione, s'incontrano ora distese in lunghi dossi, ora tronche a modo di muraglioni, per minore fluidità o per affrettato raffreddamento.

Da Viterbo, salita la montagna (la quale dal lato occidentale si estende di fianco al monte di Soriano), si trova sulla vetta un vallone di figura leggermente ellittica, 6 chilometri largo, lungo 7 all'incirca, con pareti molto ripide alte più di 300 metri, sul cui fondo è il lago di Vico. L'orlo del vallone decresce in elevazione dal nord-ovest verso il sud-est. Il Monte Fogliano ne segna la punta più alta con 975 metri;

si hanno poi incominciando il giro verso oriente le quote 932, 888, 764, 725, 629, 573 nel punto sopra l'emissario del lago, quindi colle altitudini 635, 685, 785 si ritorna sotto il monte Fogliano. Non ho potuto conoscere la profondità del lago; il suo livello oggi abbassato artificialmente coll'emissario sotterraneo che scola nel torrente di Ronciglione, mi è risultato dalle misure barometriche di 556 metri. A capo del lago s'innalza isolato dal recinto il monte Venere, la cui altezza è di 883 metri.

La vetta del monte Soriano, elevata a 1056 metri, offre un fantastico paesaggio nelle mattine di autunno, allorchè la nebbia copre le valli. L'immaginazione a quello spettacolo non può a meno di correre a quei remoti tempi, ne' quali il subapennino tirreno era trasformato in arcipelago somigliante alla costiera della Dalmazia, tanto nettamente vi si vedono disegnate le coste, i golfi, i seni, gli stretti, le isole del mare plioceno.

Semplicissima è la disposizione oro-idrografica del territorio, e si abbraccia di un colpo d'occhio da quella vetta. Il gruppo montuoso, di figura ellittica, è circondato da un anello lenticolare, largo in media dieci chilometri. Al nord s' incrocia con altro anello che circonda le alture di Bolsena, al sud con quello che fascia le alture di Bracciano. Ad oriente la valle del Tevere e poi i monti della Sabina; ad occidente le catene di monte Romano e della Tolfa. I torrenti, che si diramano dal gruppo montuoso, al nord si versano sul Vezza, il quale segna la linea d'intersezione dei rilievi lenticolari contigui di Bolsena e del Cimino; dal Vezza alla Treia si gettano nel Tevere; la Treia raccoglie le acque del displuvio meridionale, e, come il Vezza quelle del displuvio settentrionale, le conduce al Tevere; ad occidente riunisce tutti gli scoli il fiume Marta, la cui foce è nel Mediterraneno a poca distanza da Corneto.

III.

Analisi geologica.

Per facilitare l'orientamento, dividerò le formazioni in due categorie, la prima abbraccierà le roccie sedimentarie, la seconda le vulcaniche. In ogni categoria le roccie saranno suddivise secondo l'ordine della loro formazione, o apparizione alla superficie del territorio.

Roccie sedimentarie.

1. Terreni mesozoici, eocenici e miocenici. — Riunisco in questo gruppo tutti i lembi delle più antiche formazioni, perchè nel processo storico degli avvenimenti che procurerò descrivere, non hanno altro significato se non di segnare le pendici laterali della grande vallata, sulla quale si allinearono i sistemi vulcanici del Tirreno. Ad est il Soratte, e qualche piccolo affioramento tra Orte e Bassanello, si rilegano al sistema subapennino dei monti Amerini e Narnensi; ad ovest la piccola ondulazione di monte Rasano elevata 354 metri, le alture di s. Giovanni in Bieda, Barbarano, sant' Elia formano le appendici della catena della Tolfa, Monte Romano, Canino. Quantunque, al momento della publicazione di questa Memoria, non abbia

terminate le osservazioni sui terreni mesozoici componenti il Soratte ed i monti di Narni, mi sembra che si possano dividere nelle seguenti masse, a partire dalle più antiche:

1.ª Schisti selciosi e marnosi verdi e rossi con Aptichi ed Ammoniti. Le Ammoniti appartengono al Lias superiore.

2.ª Calcaree bianche marnose e brecciole con Ammoniti piatte, Schisti bigi e rossi con fucoidi.

3.ª Calcarea bianca con Crinoidi, Spongiari, Terebratule, Nerinee.

4.ª Calcarea rossa o rosata.

5.ª Schisti bigi con radioli di echino.

Le formazioni terziarie antiche costituenti le alture del M. Rasano, ecc. sono costrutte con calcari marnosi bianchi, gialli, rossi, bigi; da schisti bigi, da calcari e breccie nummolitiche, da conglomerati con elementi serpentinosi.

2. Terreni pliocenici. — Il pliocene marino è molto sviluppato sulla sinistra del Tevere; sulla destra si incontra da Orte alle rovine di Ferento lungo il torrente Vezza; se ne trova alle fornaci di Bagnaia, e scendendo al sud sotto il Soratte. È composto da marne, sabbie, letti di ghiaia calcare mescolata a selci piromache e frammenti di ostriche.

Presso Orte alla elevazione di circa 55 metri, senza troppo accurate ricerche, ho raccolte sulle marne:

Natica helicina (Broc.)
» *millepunctata* Lk.
Neverita Josephinia Riss.
Chenopus pes-pelicani (Lin.)
Turritella tornata (Brocc.)
Vermetus intortus Lk.
Scalaria communis Lk.
Serpula sp.
Venus islandicoides Lk.
Venus multilamella Lk.
Cardita intermedia (Brocc.)
Cardium hians (Brocc.)
Chama griphoides Lk.
Arca Noae (Lin.)
Ostrea sp.
Pecten varius (Lin.)
Cladocora caespitosa D'Orb.

Propriamente sotto alla città, nelle marne (elevazione metri 90) ho trovato:

Venus islandicoides Lk.
» *multilamella* Lk.
Cardita intermedia (Brocc.)
Chama gryphoides Lk.
Pinna tetragona (Brocc.)
Ostrea sp.
Pecten varius (Lin.)
Spondylus gaederodopus (Lin.)

Sulle ripe dei torrenti tra Orte e Bassano si vedono marne, sabbie, poi letti di ghiaia con qualche ostrica rotta: le ghiaie sono di calcarea rossa e bianca con selci piromache. Negli strati inferiori ghiaiosi abbondano anche ciottoli nummolitici.

Da Orte, salendo sulla strada di Viterbo, alla quota 146 ho veduto sabbie con letti marnosi a filliti, tra le quali ho trovato il *Platanus deperdita*.

Più avanti alla quota 174 sta uno strato zeppo di *Cardium edule* (Lin.).

Proseguendo ancora, a 225^{m} altre marne con *Ostrea*..... e sopra un piccolo letto di ghiaie calcari. A 247^{m} si rivedono la *Cladocora caespitosa*, il *Pecten varius*, l'*Ostrea* e letti ghiaiosi. I fossili marini terminano alla quota 258 con abbondanza di *Ostrea*.... e di *Cladocora*.

Lungo l'alveo del Vezza, presso le rovine di Ferento, nelle marne, alla quota di 286 metri, ho raccolto lo *Schizaster Scillae* Des Moulins.

Quelle marne coi numerosi crepacci e colla frattura concoide accennano ad avere subìti potenti sforzi.

A Bagnaia sulle marne delle fornaci, elevate a 450 metri, sottoposte immediatamente alle roccie trachitiche, ho raccolte le specie

Murex squamulatus (Brocc.)
Murex vaginatus Jan.
Cancellaria mitraeformis (Brocc.)
Nassa serraticosta? Bronn.
Nassa costulata (Brocc.)
Nassa semistriata (Brocc.)
Ringicula buccinea (Ren.) var. *striata*
Columbella subulata (Brocc.)
Drillia sigmoidea (Bronn.)
Pseudotoma brevis Bellar
Raphitoma hispidula (Jan.)
Mitra cupressina (Brocc.)
Natica helicina (Brocc.)
Chenopus pes-pelicani (Lin.)
Turritella subangulata (Brocc.) var.
Turritella acutangola Brocc.
Dentalium sexangulum Linn.
Dentalium (frammenti riferibili al *D. laevigatum* Ponzi)
Siphonodentalium triquetrum (Brocc.)
Bulla coclis Ponzi var.
Robulina cultrata D'Orb. var.
Scrobicularia (frammento: forse la *Scrob. alba* Vood).
Lucina spinifera Montez.
Cardium echinatum (Lin.)
Arca diluvii Lk.
Limopsis aurita (Brocc.)
Leda concava (Brocc.)
Pecten opercularis (Linn.)

Due piccoli ossicini isolati spettanti all'apparato uditivo di pesci.

Le osservazioni non danno concorde direzione agli strati pliocenici. Questi a volte appaiono perfettamente orizzontali, a volte sono fortemente inclinati. Sono inclinate le marne sotto il paese di Orte, mentre quelle sopra sembrano orizzontali, specialmente guardando le profonde sezioni dei torrenti tra Orte e Bassano. A Bassano si vedono anche le marne inclinate a circa 45 gradi verso la valle del Tevere. In complesso il criterio che ne risulta è, che la massa siasi spezzata in più frammenti, e che ognuno abbia presa l'inclinazione che gli permisero le sue speciali condizioni.

Se da Orte camminiamo verso Borghetto, s'incontrano per un certo tratto le ghiaie con sola calcarea bianca; nella direzione del porto di s. Francesco, al piano della ferrovia, si hanno marne con *Venus Multilamella*, sopra sabbie con *Ostrea*...., sopra ghiaie di calcarea bianca e rossa con *Ostrea*.... Poco distante dal torrente, che precede quello che discende da Gallese, si vede un salto nella formazione marina: scompaiono le marne, e le sabbie, e restano solo in parte le ghiaie con *Ostrea*. Quei letti ghiaiosi proseguono a vedersi sia lungo la valle del Tevere, sia nelle scarpate dei torrenti laterali, coperte dalle altre formazioni che descriverò appresso, sino dopo la confluenza della Treia nel Tevere, e sono elevate tra gli 80 ed i 90 metri sul livello del mare.

Ricominciano appresso i depositi marnosi e sabbiosi. A monte Cipriano le marne e le sabbie con *Venus islandicoides, Ostrea...., Pecten varius* giungono fino alla quota di 188 metri: non sono coperte da letti ghiaiosi. Nella salita di Ponzano a 119 met. si vedono marne con *Cerithium doliolum* (Brocc.), *Cardium edule* (Lin.); a 130^{m} con *Venus islandicoides*; a Ponzano (208^{m}) si hanno sabbie con banchi di *Ostrea*. Neanche qui letti di ghiaie. Da Ponzano andando a Filacciano si cammina sempre sulle sabbie con leggeri letti di ghiaiette; a 242^{m} si trovano marne con *Cardium edule*; a 203 sabbie e ghiaie; a 112 marne e sabbie con *Cardium edule*; lungo la valle del Tevere (elev. 40^{m}) marne con *Mactra subtruncata* da Costa. Sulla stradicciuola appie' della collina si vedono molti resti di *Turbo rugosus* Lin. e di altri fossili marini. A Torrita le ghiaie riprendono il sopravvento: sono il proseguimento delle formazioni di Poggio Mirteto sulla sinistra del Tevere. Al di là del Tevere si trovano composte dal pliocene marino tutte le colline ad occidente dei monti di Narni. Oltrepassata quella catena, le masse plioceniche sono composte anche di marne, sabbie, ghiaje, ma invece di molluschi marini contengono molluschi terrestri e di acqua dolce.

3. Terreni post-pliocenici. — Nel tratto adunque tra il porto di Gallese e lo sbocco della Treia, abbiamo l'abbassamento d'un frammento di terreno, pel quale dei depositi pliocenici solo si vedono in parte quelli ghiaiosi superiori. Sopra a questi si stabilisce nuova alternanza di marne, sabbie e ghiaie, non però d'indole marina, e neanche lacustre, ma piuttosto d'indole valliva. Nè la qualità dei terreni di questa specie è eguale da per tutto, perchè a volte si trovano solamente sabbie e ghiaie calcari con pirosseni ed altri elementi vulcanici, a volte solo marne con fossili terrestri, a volte infine le marne alternano colle ghiaie. Lungo il Rio della Fratta, a metà strada tra Borghetto e Corchiano, il piano di contatto tra il deposito ghiaioso ed il tufo è a 104 metri; vicino a Gallese la elevazione delle ghiaie giunge alla quota di 157 metri; nel poggio opposto a Gallese giunge a 180 metri. Invece propriamente sul luogo di Gallese, la loro elevazione è molto minore. Non ho trovato alcun fossile in quei depositi: le ghiaie appartengono alle roccie calcaree con nodi di selce, le quali si trovano in posto sui monti subapennini della sinistra del Tevere, e salvo il mescuglio dei detriti vulcanici, sono eguali a quelle plioceniche. A Borghetto sotto il Castello la elevazione delle ghiaie giunge a 90 metri; appena a poca distanza sulla strada di Civita Castellana invece di ghiaie si hanno marne.

A metà strada circa tra Borghetto e Civita Castellana vi sono delle cave di ghiaia, tra le quali si trovano molti cristalli di pirosseno, e dei pezzetti di lapillo leucitico. In mezzo alla massa si vedono grossi pezzi di marna, i quali colla conservazione degli spigoli indicano di non avere rotolato, ed anche dei pezzi di sabbione alquanto cementato contenente delle amfigeni. In basso marne con *helix....* alla quota di 51^{m} di elevazione sul livello del mare. Poco avanti, sotto la cascata del fosso che passa vicino casa Ciotti, sotto le lave ed i lapilli si hanno letti di ghiaie calcari con materie vulcaniche, come quelli delle cave sopra nominate: sotto ghiaie senza traccie di vulcanicità. La disposizione degli strati sembra che segni una qualche discordanza tra i letti ghiaiosi superiori e gl'inferiori, perchè i primi appaiono orizzontali, i secondi con leggera inclinazione.

Esaminando la valle della Treia presso Civita Castellana, si trovano sulla sinistra sotto il vulcanico letti di ghiaie calcari, e marne con *helix*...., *planorbis*...., *cyclostoma elegans* Müller.

In qualche luogo mancano addirittura le ghiaie, ed il vulcanico appoggia direttamente sopra le marne, specialmente a valle della Città, verso la confluenza della Treia nel Tevere. Le note prese sulle pendici di destra mi danno i letti marnosi e ghiaiosi elevati a 100 metri sulla strada di s. Elia, ed a circa 135 metri sulla strada di Rignano. Siccome i terreni pliocenici riappaiono sotto il Soratte collo sviluppo che hanno ad Orte, i descritti depositi vallivi sono incuneati tra due ripe plioceniche.

La figura del terreno, sia sui poggi di Orte che su quelli della destra della Treia a valle di Civita Castellana, perde l'uniformità della spianata per riprendere le ondulazioni della collina.

In ragione di genesi della roccia, dovrei riporre in questa categoria le formazioni dei travertini; però siccome la loro apparizione è strettamente connessa ai fenomeni eruttivi, ne parlerò nella narrazione degli effetti della vulcanicità secondaria.

Roccie vulcaniche.

Lasciato da parte lo studio della pasta, che importerebbe un accurato esame petrografico, il quale non ho nè la capacità nè i modi di compiere, per riguardo ai cristalli, tra le roccie vulcaniche del sistema Cimino, mi sembra di poter stabilire le seguenti divisioni principali, le quali a quanto mi pare corrispondono all'ordine eruttivo.

1. Roccie con piccoli cristalli di sanidino ed abbondanti laminette di mica;
2. Roccie con grossi cristalli di sanidino ed abbondanti laminette di mica;
3. Lave compatte e bollose con grossi cristalli di sanidino, granelli di olivina e poche laminette di mica;
4. Lave compatte e bollose con grossi cristalli di sanidino e pirosseni.
5. Lapilli con sanidino e pirossene.
6. Lave compatte e bollose con grossi cristalli di sanidino, pirosseni e leuciti.
7. Tufi con sanidino, leuciti, pirossene.
8. Lapilli con leuciti ed altri minerali.

1. Roccie con piccoli cristalli di sanidino ed abbondanti laminette di mica-Peperino dei costruttori viterbesi — Lava necrolite a piccoli felspati del Brocchi — Tufi trachitici. — Al nord-est del monte di Soriano, direttamente sopra il terreno pliocenico, come si vede bene sopra Orte, sotto il paese di Bassano, a Bomarzo, ed in qualche altro luogo il cui nome sarebbe difficile segnare su una carta, la roccia della quale si tratta costituisce una spianata lunga chilometri 9, larga altrettanto. Queste misure però darebbero una falsa idea dell'espandimento della roccia. Completata dai lembi affioranti lateralmente e sotto al Cimino, e specialmente da quello che si vede tra Poggio Aguzzo e san Giovanni di Bieda, la figura risultante è una ellisse coll'asse maggiore lungo circa 12 chilometri più dell'asse minore. Il primo sta nella direzione da sud-ovest a nord-est. L'esame delle valli, comprese tra i poggi Cimini, la mostrano da per tutto

sottoposta o imbasante la massa del n. 2. La potenza della formazione varia tra una decina di metri verso il perimetro, e 20 a 30 metri nella vicinanza della montagna. Niun segno di metamorfismo si osserva nel deposito pliocenico immediatamente sottoposto. Tra il 7° e l'8° chilometro dalla stazione di Orte, si vede la roccia come iniettata in una fenditura quasi verticale di terreno pliocenico, dove a destra si hanno marne e sabbie con ciottoli calcari, a sinistra sabbie con *Pecten varius, Ostrea.... Cladocora caespitosa.*

In quel luogo presso la superficie di contatto le ghiaie calcari sono mescolate alla roccia cristallina; lì presso la roccia cristallina è coperta da pochi sedimenti marini con ostriche, e nei sedimenti marini si trova qualche ciottolo della stessa roccia, ma talmente sfatto da sgretolarsi tra le mani, come quei ciottoli di gneiss delle alluvioni subalpine che sono indicati col nome di palle marcie.

Quella trachite generalmente è di pasta grigio-chiara, talvolta leggermente arrossata, con numerose laminette di mica bruno nerastre e cristalli di sanidino non voluminosi. Contiene numerosi interclusi, e più specialmente alla sua base, ossia sul piano di contatto coi terreni pliocenici. A volte gl'interclusi hanno ragguardevoli dimensioni: uno tra questi m' ha dato le misure di 2 m. per 1 m. I principali interclusi appartengono alle seguenti roccie: 1. Trachite a straterelli sottili, alternativamente colorati in grigio chiaro e grigio scuro (struttura parallela). Nella pasta si vedono qua e là minute laminette di mica bruno nerastre e minuti cristallini di sanidino: la roccia è leggera come una pomice; 2. Ciottoletti di pasta fina grigio-scura; 3. Ciottoletti di una sostanza verde oliva che si presenta come retinite; 4. Ciottoletti di roccia grigio-scura, con grossi cristalli di sanidino, eguale alle lave con grossi felspati; 5. Ciottoli di trachite a pasta bianca, fibrosa, quasi pomicea, racchiudente laminette di mica bruno-nerastre e sanidino in cristalli poco voluminosi; 6. Ciottoli e massi di trachite a pasta grigio cenere, di molto più compatta della roccia intercludente, con sanidino in cristalli poco voluminosi e laminette di mica; 7. Interclusi d' una sostanza giallastra, friabile, i quali sono quasi esclusivi della formazione più vicina al piede della montagna.

Questa formazione trachitica non presenta segni della ordinaria stratificazione; è solcata da grandi linee di fenditure poliedre verticali, orizzontali, e inclinate.

Per tutti i sopra descritti caratteri che la distinguono, mi sembra che potrebbe esserle proprio il nome di *tufo trachitico*. Tenerissima nella estrazione, senza cavità bollose, refrattaria, si presta bene all'arte delle costruzioni, ed abbondanti cave ne sono aperte per gli usi edilizi: le più pregiate cave sono quelle nella parte superiore della formazione vicino alla montagna, dove più rari e più piccoli sono gl'interclusi e più omogenea la massa. Indurisce dipoi al contatto dell'aria. Però, per quanto sia scelta, si adatta male nelle parti di costruzione dove è soggetta all'attrito, come gradini, e lastrici, perchè presto si logora la massa intercludente e restano in rilievo le anime di sasso di pasta più dura.

2. Roccie con grossi cristalli di sanidino ed abbondanti laminette di mica. — Selce dei paesani. — Lava necrolite a grandi felspati del Brocchi. — Trachite a grandi cristalli.

Da per tutto, dove si può vedere scoperto il piano di contatto, si trova questa roccia imbasata sulla precedente. Costituisce diversi poggi, i quali veduti di fronte sembrano terminati da una cupola, ma nel profilo hanno sempre cresta allungata, come indicante un distacco dalle masse laterali. Tale specialmente si vede il monte Piobbico e la Palanzana, del tutto separati dal monte di Soriano, e tale anche il monte di san Valentino. Costituisce la formazione principale di tutti i colli, i quali si aggruppano al monte di Soriano. Non ha interclusi, nè cavità bollose, nè amigdali; la sua durezza non ne permette la lavorabilità per gli usi edilizi; la pasta è bianco sudicia, o rosso mattone, o grigio-scura; contiene cristalli di sanidino di tre e più centimetri e numerose laminette esagonali di mica bruno-nerastra. Nella distribuzione topografica, chiude al sud-ovest la massa visibile del tufo trachitico; in relazione al punto culminante, si distende più verso il nord-est del vertice del monte di Soriano, che non nel versante opposto. Niuna traccia ne ho veduta sull'adiacente sistema di Vico. Nessuna alterazione di contatto ho potuto notare tra questa qualità di trachite e le roccie sottoposte.

3. Lave compatte e bollose con grossi cristalli di sanidino, con granelli di olivina e poche laminette di mica. — Nel versante a nord del monte di Soriano si hanno tre grandi squarciature, l'ultima delle quali passa la montagna da parte a parte e ne separa il poggio della Palanzana. Da quelle squarciature partono lunghi dossi della roccia sopra indicata. Nelle pendici delle squarciature si vedono nuclei di terre rosse e gialle, le quali altro non sono che la stessa trachite del n. 2 alterata da sostanze minerali, le quali l' hanno traversata.

Rimontando la prima delle colate fino al piano di Ciliano (573 metri di altitudine), si trova abbondanza di frammenti di lava a numerosi vani appiattiti ed allungati, a pasta grigia che alla superficie prende colore rosso, racchiudente cristalli di sanidino. La roccia della colata, la quale giunge sino al 20° chilometro della strada da Orte a Viterbo (elevazione 309 metri), è una lava alquanto cavernosa, a pasta grigio di cenere, racchiudente grossi cristalli di sanidino, granelli di olivina; contiene nei vani la jalite e nucleetti di sostanza friabile giallastra, la medesima che ho detto trovarsi nel tufo trachitico. La lava riposa sul tufo trachitico; a volte è rotta in massi poliedri.

Scavalcato il controforte del monte di Soriano, il quale chiude ad occidente la valle solcata dalla indicata corrente di lava, se ne incontra una seconda corrente però di minore fluidità della precedente, arrestatasi in alto muraglione a poca distanza dal luogo di eruzione: termina vicino alla strada di Viterbo, presso il luogo detto la fonte di Vitorchiano. Le roccie di questa seconda corrente sono eguali a quelle della prima, ma più compatte; la potenza ne è più forte.

Scavalcato il controforte ad occidente, non si vede la lava nella valle delle fornaci di Bagnaia; si ritrova invece ancora, superato il monte di san Valentino, nella valle che divide questo monte da quello della Palanzana. La lava della Palanzana, composta della stessa roccia delle precedenti, arriva fino al villaggio della Querce; anch' essa posa sul tufo trachitico ed è rotta in grossi blocchi poliedri. Risalendo la corrente, si giunge al vertice del monte di Soriano. Si trovano là masse scoriacee

leggerissime di tinta bruno nerastra o rosso bruciato, racchiudenti grossi cristalli di sanidino; frammenti di lava a numerosi vani appiattiti ed allungati a pasta rosso bruna, con cristalli di sanidino. Se dalla vetta si scende nelle pendici orientali, tra Soriano e Canepina, sopra la trachite del n. 2, si trovano lunghe strisce delle medesime lave che formano le descritte correnti nel versante nord.

Da per tutto la roccia sottostante a quelle lave è rimasta arrossata ed alterata; la mica, comunemente di colore bruno nerastro, in quei punti di contatto prende per lo più colore giallo dorato.

4. Lave compatte e bollose con grossi cristalli di sanidino e pirosseni. — Nelle lave della precedente categoria si vede sparire pressochè del tutto la mica, non sono visibili cristalli di pirosseno. I cristalli di questo minerale invece incominciano a vedersi in alcune lave a grossi felspati del recinto di Vico, ed entrano in altre come uno degl'ingredienti principali. Le lave felspatiche più ricche di pirosseno costituiscono una considerevole massa al nord del recinto. Sono adoperate per la costruzione delle macine, e sono accompagnate sotto la Posta Vecchia da scorie rosse. All'esterno si trovano in posto sulla strada da Viterbo a Vetralla, nel torrente di Ronciglione, sotto al paese; tra Carbognano e Fabrica. Il Brocchi ne cita anche una corrente nel Cimino dalla parte di Soriano.

5. Lapilli con cristalli di sanidino e di pirosseno — Sopra i tufi trachitici, e sopra le lave con grossi felspati del n. 3, si trovano stratificate masse, talvolta di molto spessore, composte di terre gialle o brune con una quantità tale di cristalli di sanidino, che i solchi dei campi sembrano imbiancati dalla grandine. Con quelle terre gialle alternano strati di pomice bianca, contenente cristalli di sanidino; l'altezza degli strati con pomice e le dimensioni dei pezzi aumentano quanto più ci si avvicina al monte di Soriano. La loro stratificazione è a larghe ondulazioni, come se avessero dovuto adattarsi ad accidentalità preesistenti nel terreno. La presenza di molti cristalli di pirosseno mi fa dubitare che siano, nell'ordine cronologico di eruzione sincrone, delle lave del n. 4. La loro distribuzione permette di riferirne con certezza l'eruzione al solo cratere del monte di Soriano, perchè non le ho ritrovate nel raggio di azione del sistema di Vico.

6. Lave compatte e bollose con grossi cristalli di sanidino, con pirossene e leuciti-leucitoforo o leucitoforo porfiroide dello Stoppani. — Nelle adiacenze di Viterbo, sul fondo del recinto di Vico, sul fondo del fosso di Ronciglione, si vede un nuovo minerale incominciare ad introdurre i suoi cristalli nella composizione delle lave. Generalmente le rare leuciti di quelle roccie sono molto alterate, e si presentano alla superficie come larghe macchie lattiginose. Invece sulle parti più elevate della formazione, attorno il recinto di Vico, e sulla pendice orientale, dove i leucitofori scendono fino al piano del lago, si vedono le leuciti entrare in sempre maggior copia nella roccia, talchè in alcuni luoghi scompaiono gli altri cristalli, e la pasta stessa si limita appena al puro necessario per incastonare delle amfigeni, grosse quanto una nocciuola.

Niuna traccia di eruzioni leucitiche si trova sul monte di Soriano; lo sviluppo massimo di quelle lave corrisponde al bacino di Vico. Costituiscono il ciglio del recinto, sovrapponendosi alle lave felspatiche e pirosseniche sui versanti nord ed ovest, raggiungendo ivi le altitudini di 932 e 975 metri, ossia di 376 e 419 metri sul livello del lago. Si riversano da lì verso Viterbo, a poca distanza dalla quale città sono elevate a 416 metri, ossia 140 metri sotto il livello del lago. Coperte in parte dai lapilli sulla pendice occidentale del mnote Fogliano, le correnti leucitiche riappaiono al Quartuccio, a Vetralla, lungo il torrente Grignano, ed il torrente che dalla Valle Grande va a S. Giovanni di Bieda. Sul lato orientale interno si trovano sino al fondo del vallone, si elevano a più di 50 metri sul detto fondo, e poi scompaiono sotto un centinaio di metri di lapillo, per riapparire da sotto quel coperchio a Vallerano, Carbognano, Fabrica e Caprarola. Il ramo di Caprarola si trova un 90 metri sotto il livello del lago, quello di Fabrica più di 250, mentre le estremità delle correnti dalla parte di Viterbo sono come si è detto a 140 metri.

Al mezzogiorno del lago, affiorano sul piano del medesimo lave con piccole leuciti, simili a quelle che saranno accennate appresso, appie' del recinto a lava felspatica, alla quale però non si sottopongono; dopo un chilometro circa, nel qual tratto sono coperte da lapillo, si ritrovano allo sbocco dell'emissario, dove presentano una massa troncata alta 34 metri.

Le lave leucitiche del bacino di Vico, oltre alla distinzione fatta, rapporto alla proporzione dei cristalli, si possono suddividere anche in due classi: lave a piccoli cristalli e lave a grossi cristalli. A piccoli cristalli sono le masse al sud sopra Ronciglione; una parte di quelle che si trovano sotto la vetta del monte Fogliano, e di quelle del monte Venere. Sulla cima del monte Fogliano si hanno lave a grossi cristalli. Le roccie a piccole leuciti del monte Fogliano sono lave fonolitiche a pasta grigio di cenere, contenente piccoli cristalli di sanidino e di leucite, oltre a numerosi cristallini di pirosseno verde cupo quasi nerastro, e poche laminette di mica.

Il Monte Venere si alza isolato al nord del recinto: ha due vette, le quali gli danno una forma allungata dal nord al sud. La vetta al nord è più alta e misura 883 metri, quella al sud circa 840. La sella intermedia è elevata a 792 metri. Sulla vetta nord si vede il leucitoforo a grossi cristalli, su quella sud si trova qualche pezzo di leucitoforo a struttura bollosa. Sul fianco orientale, sino alla altitudine di 719 metri, le lave sono coperte da lapillo stratificato; sull'occidentale stanno come dei dicchi di lava fonolitica a piccole leuciti, identica a quella del monte Fogliano (trachite leucitica del Rath, fonolite leucitica del Rosenbusch).

I leucitofori a Viterbo fuori Porta Romana sono addossati agli strati di lapilli felspatici; sulla strada di S. Martino agli stessi lapilli, ed a scorie leucitiche; nel recinto di Vico alle lave felspatiche e pirosseniche; tra la Cura rurale di Vetralla e S. Giovanni in Bieda, posano su lapilli contenenti ciottoli di trachite a grossi felspati (n. 2).

Nel territorio dai Cimini si vedono anche altre correnti leucitiche. Una viene dalle parti del monte Rosso, dalla altitudine di 356 metri, passa per Ferento e giunge vicino a Viterbo. Posa sopra lapilli leucitici stratificati, ed è coperta da

lapilli con leuciti e molti pirosseni verdi. Nella lava si trovano parecchi cristalli di sanidino. Altra grandissima corrente con grosse leuciti, viene dal mezzogiorno e si arresta a Nepi.

La terza corrente sta tra Civita Castellana e Borghetto, zeppa anche questa di grosse amfigeni. Tanto in questa che in quella di Nepi, si vedono pezzetti di lava nell'interno delle leuciti. A Borghetto la lava posa direttamente sopra le ghiaie calcaree. Nel torrente sotto Casa Ciotti, tra le ghiaie calcaree e la lava si vede qualche metro di lapillo stratificato con pezzi di scorie rosse e brune; in un punto sembra che un filone di lava traversi verticalmente gli strati delle ghiaie calcari. Lungo la strada vicinale, parallela alla nazionale la quale va al torrente Treia, sotto la lava si vede una massa di roccia tenera cenerino-violacea con grossissime leuciti, e lì presso un frammento di strati di lapillo inclinati a mantello, tra i quali uno strato di pomici bianche. Andando un poco avanti, all'altezza del cimitero di Civita Castellana, sulla strada anzidetta si vede, sotto la roccia cenerino-violacea, uno strato di finissima terra bianca, la quale dà forte effervescenza trattata cogli acidi; sotto questo strato ne è un altro di materie vulcaniche color bruno caffè; poi un letto di ciottoletti di lave felspatiche e pirosseniche, di trachiti a grossi felspati (n. 2), e ciottoli di piromaca; sotto questo le ghiaie calcaree alla quota di 98 metri. Il tufa circostante impedisce da quella parte altre osservazioni ed altre misure, su quanto può riferirsi alla corrente del leucitoforo. Nissun legame intermedio ho potuto notare tra la lava di Nepi e quella di Borghetto, distanti tra loro circa 8 chilometri; nè tra questa e la corrente di Fabrica, dalla quale dista circa 11 chilometri.

7. Tufi con sanidino, leuciti e pirosseni. - Tufa di colore lionato scuro atto ad essere lavorato del Brocchi. - Tufo leucitico. — Per bene precisare le idee, attese le conseguenze che possono derivare dalle osservazioni che registro, intendo col nome di tufo leucitico d'indicare solo quell'immensa massa di roccia di colore giallo lionato, composta di materie vulcaniche senza ordine nè stratificazione alcuna; contenente pezzi di lava pumicea (secondo Brocchi) di colore nero o giallo aranciato, pochi cristalli di felspato vitreo, alcuni di pirosseno, e molti di amfigene, generalmente farinosi; racchiudente anche frammenti di lava pietrosa pirossenica o leucitica; talvolta presentante massa compatta, ed a volte con cavità bollose; facile ad essere lavorato, e molto adoperato, per la sua abbondanza, leggerezza, e resistenza all'azione meteorica, negli usi edilizi (1). Di questa roccia faccio una classificazione a parte, separandola da tutti gli altri materiali vulcanici terrosi, sia che si presentino in masse caotiche, sia con più o meno sensibile stratificazione.

A differenza di tutte quelle altre materie piovute dai crateri, e che ritroveremo in molti luoghi del territorio, e sopra e sotto le diverse lave, il tufo del quale ho precisate le qualità occupa esclusivamente le zone più depresse; come se si fosse insinuato su tutte le valli preesistenti e le avesse colmate.

(1) Su questo tufo è intagliato il grandioso anfiteatro romano di Sutri; sul medesimo sono scavati i sepolcreti etruschi di Vetralla, Bieda ecc.

Il tufo leucitico cinge come un grande anello il gruppo Cimino; l'anello presenta però una interruzione al nord-ovest, e quello spazio è occupato dal tufo trachitico. È qui del massimo interesse di notare, che la porzione scoperta segna una altitudine maggiore di quella delle spianate di tufo leucitico, e che questo si è internato nella zona del tufo trachitico dovunque una qualche insenatura glie lo ha permesso.

Dalla parte orientale è stato arrestato l'espandimento dei tufi dai poggi di Orte, e da quelli che formano le pendici ultime del Soratte. Una piccola vena però si è fatta strada fino ad Orte, ed una larga corrente è giunta sino alla valle del Tevere tra Gallese e Civita Castellana, passando sopra ai depositi vallivi, i quali in quel tratto coprono i sedimenti pliocenici.

Nella superficie del tufo leucitico si nota che l'altitudine decresce verso il perimetro esterno dell'anello.

Il tufo leucitico appoggia indifferentemente su tutte qualità di terreni. Ad Orte è in immediato contatto colle marne plioceniche marine; a Viterbo, a Vignanello sta sopra i lapilli felspatici; verso Ferento, Borghetto e Civita Castellana sopra le marne vallive, sopra le ghiaie, sopra depositi di lapillo leucitico stratificati tra il tufo ed i terreni sedimentari, e sopra ghiaie calcari mescolate a grossi ciottoli di leucitoforo (Cimitero di Civita Castellana, Strada vicinale alla Treia); nel burrone di S. Giovanni in Bieda il tufo posa sul calcare eocenico; presso la Cura rurale di Vetralla sta sopra i leucitofori. Il suo piano inferiore ha una livellazione affatto saltuaria. Nel masso d'Orte è a circa 100 metri; sull'alveo del Vezza sotto Ferento a 286 metri; verso Vignanello a 300 metri; sotto il cimitero di Civita Castellana a 56 metri; sotto la città a 70 metri; sulla riva destra della Treia nella strada di Sant'Elia a 100 metri; a Borghetto a 90 metri; lungo il Rio della Fratta a 104 metri; presso Gallese ora a 157 metri, ora sotto 100. Da queste variazioni altimetriche del piano inferiore, ne risultano forti differenze nella potenza della roccia da un punto all'altro.

8. Lapilli con leuciti ed altri minerali. — Ho posta per ultima, nella descrizione delle manifestazioni della vulcanicità primaria, la classe dei materiali detritici con leuciti, non perchè sempre appartenga ad un'ultima eruzione, ma per evitare eccessive suddivisioni. Questi materiali stanno indifferentemente sopra e sotto i leucitofori ed i tufi leucitici, ed anzi quelli, appartenenti al raggio d'azione del sistema di Vico, mi sembra che per la maggior parte siano anteriori ai tufi.

I materiali terrosi con leuciti generalmente sono stratificati, meno in qualche punto più vicino al cratere, dove a volte assumono forma caotica, sempre però ben distinta da quella del tufo e pel colore e più per la compattezza della massa, la quale manca a quei materiali. Vario è il colore degli strati: ora giallo, ora bianco sporco, ora grigio scuro. La formazione principale si addossa a mantello al gruppo di Vico, ha interclusi ciottoli e massi delle diverse lave, e copre le lave che si vedono nelle pareti del recinto sul lato orientale e meridionale. La potenza dei lapilli sopra i leucitofori sul lato orientale è più che 100 metri.

Non sempre si trovano quelle terre sovraposte ai tufi leucitici, nè le rare

sovraposizioni hanno considerevole spessore. Sulla spianata da Bassanello a Vignanello si vede sopra al tufo, alla quota di 320^{m}, uno strato detritico di non molto spessore con molti ciottoli di tutte le qualità delle roccie descritte, ed innumerevoli blocchi pietrosi, che a primo aspetto fanno dubitare che sotto si trovi in posto della roccia compatta: sono confusi insieme massi erratici di tufo trachitico, di trachite a grossi felspati, di lave felspatiche, di lave pirosseniche, di lave leucitiche. Anche tra Borghetto e Corchiano si rivedono parecchi di quei massi, pure sopra al tufo, però non in tale abbondanza come presso Vignanello. Non ve ne ho potuto vedere alcuno nè di tufo trachitico, nè di trachite a grossi felspati (n. 2), ma invece ve ne ho trovati di roccia calcarea alterata. Sul versante opposto del gruppo montuoso si ripetono anche i massi erratici nei territori di Vetralla, Barbarano etc.. e particolarmente sulle pendici del monte Fogliano, sotto la Cura rurale di Vetralla, dove abbondano anche i ciottoli della trachite a grossi felspati.

Meritano speciale attenzione le terre vulcaniche, che si trovano al perimetro dei tufi, ed anche a distanza da questa roccia. Nelle colline tra Orte e Gallese troviamo invece del tufo i lapilli e le ceneri leucitiche, mescolate a ciottoli calcarei, sopra le giaciture delle ghiaie. Nei colli al di là del Torrente Treia, lungo la strada di Rignano, si ripete il fatto, coll'aggiunta che vi sono intercalati straterelli di pomice bianca con piccoli cristalli di sanidino, e che quei depositi non solo riposano sui terreni sedimentari, ma anche sopra i tufi leucitici. A Faleria i tufi ne sono coperti per l'altezza di più di 30 metri, mentre sul ciglio della Treia per la strada di Sant'Elia i lapilli hanno appena uno o due metri di spessore, e poi si perdono; in alcuni strati vi sono mescolati ciottoli calcarei. In generale queste materie guadagnano in potenza allontanandosi dal gruppo Cimino, anzi nel suo territorio si trovano solamente in qualche luogo del perimetro. I terreni coperti da quei materiali, senza tufo sottoposto, conservano le ordinarie pieghe delle colline.

Altre masse di simil genere si incontrano al di là del Tevere, delle quali le più importanti sono quelle di Attigliano e quelle di Aspra.

Fra Attigliano ed i monti Amerini giacciono grossi depositi di terre rosse e brune con molte leuciti, sovraposte ai terreni di sedimento; tra Aspra e Poggio Catino appiè dei monti della Sabina si ripete il fatto, coll'aggiunta che in questo luogo abbondano anche strati di pomice bianca, come nei colli tra Civita Castellana e Rignano, strati che non ho trovato nelle giaciture di Attigliano.

Da questa qualità di terreni si cavano eccellenti pozzolane (1).

(1) Sui monti di Narni e sui bacini di Terni e di Rieti si trovano altri depositi di terre color caffè, e di sanidino, contenenti cristalli di pirosseno, e coprono nelle due ultime località i depositi pliocenici composti di sabbie, marne, ghiaje rotolate, stratificandosi col detrito scaglioso delle conoidi di sfasciume montano. Benchè abbia scoperta una massa di lava presso Rieti, credo che quelle terre vulcaniche debbano riferirsi piuttosto alle dejezioni dei vulcani occidentali.

Attesa la vicinanza colle masse vulcaniche dei Cimini, dirò qualche cosa d'un'altra roccia vulcanica, evidentemente dovuta al centro di azione di Bolsena. A circa metà strada da Viterbo a Montefiascone, alla fine del piano di Viterbo, s'incontra un'altura elevata a 452 metri, ossia a più che 100 metri sulla pianura. Questa eminenza, chiamata monte Jugo è formata da lapilli stratificati a mantello, e lave scoriacee, le quali abbondano particolarmente sulla spianata superiore. Sul fianco

Altri fenomeni di vulcanicità secondaria

La vulcanicità secondaria è tuttora molto attiva nel territorio dei Cimini: nel piano di Viterbo ad ogni passo s'incontrano sorgenti minerali, delle quali la più celebre è quella del Bulicame. La sorgente del Bulicame scaturisce bollente come da un pozzo artesiano, e forma tutto in giro copiose concrezioni calcaree. Molti ruderi di terme romane si trovano nelle adiacenze. Acque minerali sulfuree ho anche notate vicino alla strada che da Nepi va a Ronciglione presso il casale di Procciaga; altre, però molto indebolite, sopra Orte.

Immensamente più attive doverono essere le manifestazioni vulcaniche, per mezzo delle sorgenti minerali, nei tempi trascorsi, a giudicarne dai vasti depositi di travertino. Una bellissima giacitura di questa roccia si trova sui colli sopra Orte, della quale si fa gran commercio, attesa la buona qualità, negli usi edilizi. Il travertino di Orte alterna con terre vulcaniche, nelle quali si notano cristalli di sanidino, di pirossene, di leucite. Contiene filliti, tra le quali potei inviare a Milano al prof. Sordelli le specie *Quercus sessiliflora*, *Acer laetum*.... Sotto i colli di Orte la pianura del Tevere, fino al ponte della Ferrovia, non è che una lastra di Travertino. Molto travertino si trova anche presso il Soratte, pur esso eccellente per costruzioni.

Il piano di Viterbo per gran parte è anche una lastra di travertino, e colà la formazione della roccia si continua tuttora, come sopra fu detto mercè le acque del Bulicame. Il Brocchi nel travertino del Barco, tra la Palanzana e la strada di Ronciglione, trovò un frammento di *turbo elegans,* una grossa *helix* ombelicata, e piccole conchiglie fluviatili; sul travertino di Ferento delle *helix* fluviatili; su quello del piano di Viterbo lungo la strada di Montefiascone trovò una grossa elice assomigliante alla *helix nemoralis;* piccole conchiglie fluviatili (*helix fasciculatis*), qualche piccola amfigena, frammenti di felspato, squammette di mica argentina, un pezzo d'osso nel travertino della valle del Caldano presso Viterbo. Travertino ricco di ossami mi fu detto che si cava sulle coste del torrente Vezza presso Vitorchiano.

Singolare è la massa di travertino che si vede nella località detta delle *Masse di S. Sisto,* lungo la strada che da Viterbo va a Vetralla. Quella massa costituisce una piccola cresta lunga circa 60 metri, alta 5 a 7 metri, ed ha tutta l'apparenza d'essere stata sollevata per la rottura della crosta di travertino che forma la spianata, ed il raddrizzarsi d'un suo frammento. Lì presso sorge dell' acqua sulfurea termale, utilizzata per macerare canape e lino: avanzi di costruzione romana e medio-evale indicherebbero, che anticamente anche quella sorgente era adoperata per uso di bagni.

orientale per una squarciatura è escita una forte corrente di lava basaltina bigio nerastra, a frattura quasi concoide, con numerosi cristalli di pirossene verde bottiglia. Ai piedi del monticello si vede il solito tufo leucitico, e le osservazioni locali mi fanno credere che quella lava posi sul tufo.

IV.

Sintesi geologica

Avanti di incominciare la sintesi delle manifestazioni vulcaniche del territorio dei Cimini, gioverà allargare l'orizzonte oltre il perimetro di quella regione. Mi servirò per questo delle osservazioni compiute nel subapennino tirreno, delle quali ebbi occasione di parlare (1), e sulle quali dovrò maggiormente estendermi nello svolgimento del mio subbietto principale, cioè la costituzione del bacino del Tevere.

Avvenuto il sollevamento del fondo marino oligocenico, nel subapennino mediterraneo corse un lungo periodo terrestre. Per fratture dovute alle forze endogene, l'orografia risultò costituita da più catene parallele tra loro, e parallele a quella maggiore apenninica, separate da profonde vallate. La più ampia delle vallate fu quella fiancheggiata ad oriente dai monti Aretini, Orvietani, Amerini, Narnensi, Tiburtini; ad occidente dalla catena littorale. I fiumi dell'Apennino stabilirono i loro bacini parziali sulle vallate più interne, e sboccati da quelle confluirono nella gran valle tirrena, la quale accolse il Tevere mioceno.

Determinatasi una nuova oscillazione discendente, fu facile al mare l'invadere la valle tirrena più vicina alla costa, ma non potè entrare nelle valli interne, perchè i fiumi gli opposero le masse dei detriti fluitati, elevando nella val di Chiana le deltazioni dell'Arno e del Tevere, e nella Sabina sul territorio di Poggio Mirteto la deltazione intrecciata della Nera, che vi sboccava a destra dalla gola di Configni, e del Velino, che si sboccava a sinistra dalla valle di Belmonte-Castelnuovo di Farfa.

Terminata, in questa condizione di assetto idrografico, la sommersione del continente nel periodo del pliocene antico, ed incominciato il movimento ascensionale, o per maggiore inclinazione presa dalle catene montuose, oppure pel naturale allargamento delle valli, le quali in conseguenza della discesa del terreno dovevano tendere a restringersi, e viceversa subire l'effetto opposto nel rigonfiarsi della crosta terrestre, le masse di riempimento plioceniche, marine o vallive, cessarono d'essere costrette tra le pareti dei monti laterali. Dilatatesi le fessure centrali delle primitive linee di rottura, da queste si aprirono il passaggio verso l'esterno, agevolate dai distacchi trovati sui lati dei depositi pliocenici, infinite polle di sorgenti minerali. L'azione sotterranea di quelle acque doveva naturalmente produrre l'effetto di scalzare le fondamenta dei terreni pliocenici, e quindi ne risultarono parziali sfasciamenti nelle masse di riempimento, onde in alcuni luoghi contrade intere furono sepolte, in altre i frammenti s'inclinarono in vari sensi, secondo le forze dalle quali erano sospinti, ed i contrasti che incontravano al libero movimento. Ne risultarono deviazioni dei corsi d'acqua: l'Arno incominciò a volgersi verso Firenze; il Tevere abbandonò la foce di Città della Pieve per incanalarsi nella gora di Todi; la Nera lasciato l'alveo di Configni escì dalla stretta di Narni; il Velino, non potendo più seguitare per la

(1) *Sui movimenti sismici della Val di Chiana. — Sulla cronologia dei Vulcani Terreni. — Avvenimenti nell'interno del bacino del Tevere antico. — Deltazione pliocenica della Nera. — Canale e delta pliocenico del Velino. — Le Valli antiche e moderne dell'Umbria. — Terreni terziari e quaternari nel bacino del Tevere.*

valle di Belmonte, dove l'alveo gli era rimasto sollevato di più che 400 metri, si volse verso le Marmore.

Nondimeno la nuova orografia non risultava con radicali modificazioni sulla prima orografia miocenica, e tutti i fiumi tornarono a confluire nella gran valle Tirrena, per ricostituirvi il corso del Tevere, compreso l'Arno, il quale però fino da quel tempo incominciava il lavoro di corrosione, per costruirsi un bacino indipendente da quello del fiume limitrofo.

Gli sconvolgimenti delle masse plioceniche nelle valli interne, larghe dieci chilometri al più, dovevano essere un nulla al paragone di ciò che intanto avveniva nella gran valle Tirrena, larga 45 chilometri. Tutte le osservazioni portano a credere, che la catena occidentale di quella valle subisse un forte spostamento, o non elevandosi come le altre masse, o tornando di nuovo a deprimersi: per quel che vedremo, si hanno molte probabilità di ritenere, che si sieno verificati fenomeni di vulcanicità primaria nella fenditura centrale della valle fino dal periodo miocenico; è fuor di dubbio, che una strapotente vulcanicità vi incominciò prima che il mare se ne fosse ritirato, e dopo vi continuò la sua azione lunghissimo tempo. Nel quale, da Bolsena al Lazio, la massa delle materie solide eruttate non può valutarsi a meno di 600 chilometri cubi, il che ci dà la forza d'un 1000 miliardi di tonnellate. Aggiungasi l'incalcolabile forza delle sostanze liquide, e gassiformi sprigionate dai crateri, e si potrà immaginare quale influenza tanto fattore dovè avere sul movimento dei soprastanti terreni.

Adunque nessuna maraviglia se, nel territorio Cimino, i terreni pliocenici ora giacciono orizzontali, ora inclinati in tutte le direzioni, ora sono quasi affatto sepolti, come si vede tra Orte ed il Soratte.

Periodo pliocenico nel territorio Cimino

1. Depositi di sedimento. — Nella parte descrittiva dei terreni ho segnati i letti di ghiaie calcari sotto i tufi trachitici di Orte. Là, come in altri luoghi del territorio transteverino, le ghiaie non s'alternano alle marne marine, ma soltanto si sovrappongono a quelle, contrariamente a ciò che si nota a Chianciano, Chiusi, Città della Pieve in Val di Chiana; a Cantalupo, Poggio Mirteto ecc. nella Sabina. Tale differenza viene da questo, che, nelle indicate località di Valdichiana e della Sabina, i terreni pliocenici ci rappresentano le deltazioni di fiumi di lungo corso, quali l'Arno, il Tevere, la Nera, il Velino; per cui una delle speciali caratteristiche della formazione doveva essere per l'appunto l'alternarsi per lungo tratto di strati a ciottoli e ghiaie con altri di più calma sedimentazione. Invece di faccia ad Orte non abbiamo alcuna foce di grosso fiume, ma solo sbocchi di torrenti costieri distanti dal territorio di Orte più che 10 chilometri. Il protendimento della spiaggia doveva pertanto riescire assai più lento, e quindi dovè trascorrere molto tempo prima che i torrenti potessero spingere fin là le loro grosse deiezioni.

Non basta. Dietro la catena dei monti Orvietani ed Amerini esisteva nel territorio Umbro una lunga vallata tra Perugia e Narni. Le acque della valle, colle intersezioni delle loro conoidi di deiezione, l'avevano spartita in due displuvi, verso il Tevere l'uno, verso la Nera l'altro. Come tutte le catene montuose, quella

accennata, che divideva la valle continentale dalla spiaggia marina esterna, aveva le sue vette e le sue selle: senza bisogno d'induzioni sono ancora là tutte le gole, le quali a maggiore o minore altezza incidevano la catena. Le quote altimetriche delle selle, confrontate colle quote del riempimento di colmata interno, ci dicono che, ad un certo punto della oscillazione discendente, dettero diretto sbocco verso il mare a parte delle acque della valle. Perciò, in quella ultima fase marina, nuove forze si aggiunsero ai torrenti costieri per protendere la spiaggia, e portare più lontano il grosso materiale convogliato. In questo si trovano d'accordo e le note prese nell'interno dei bacini, e quelle prese sull'esterno, e resta spiegato come abbia potuto accadere, che nelle ghiaie del territorio di Orte ora si abbia, ed ora manchi la calcarea rossa mesozoica, dipendentemente dal corso libero dei diversi torrenti i quali ivi sboccavano.

E perciò che solamente negli strati superiori di Orte, vicino alle ghiaie, s'incontrano le filliti, ossia si manifesta la prima fase maremmana, e gli strati col *Cardium edule*, ossia la fauna salmastra. La mancanza di fossili marini intatti nei letti ghiaiosi, ed il ritrovarvene soltanto rari frammenti, indica che dopo il breve periodo salmastro segnalato dal piccolo strato a cardi, le deiezioni dei torrenti prolungarono fin là la spiaggia, e solo il moto delle onde potè rotolarvi qualche conchiglia. La forma delle ghiaie viene a conferma della ipotesi, perchè ordinariamente presentano figura discoidale.

Le condizioni della sedimentazione cambiavano all'altezza del Soratte. La deltazione della Nera, sboccante dalla valle di Configni, dovea colà impedire l'azione indipendente ai torrenti della costa, per assorbirli coi loro depositi nel suo corso. Il protendimento di foce, sul delta dei due fiumi Nera e Velino, doveva colà manifestarsi a grande distanza cogli effetti delle primarie deltazioni. Di fatti, mentre troviamo la più forte massa delle ghiaie nel terreno di Torrita, situato precisamente sull'asse del delta, le ghiaie stesse o mancano del tutto, o sono ridotte a piccolissimi letti a Filacciano, Ponzano, monte Cipriano, sui quali luoghi si costruivano i cordoni littorali, e le lagune intercluse. Invece d'un piccolo strato salmastro, come ad Orte, laggiù abbiamo forte potenza di sedimenti, con fossili indicanti la mescolanza delle acque dolci del fiume alle salse del mare; si è veduto che a Filacciano la massa salmastra raggiunge la potenza d'un 200 metri. La distanza dei depositi di Torrita, Ponzano, Filacciano, monte Cipriano dalla costa pliocenica è di circa 10 chilometri, ossia eguale a quella dei depositi di Orte; quindi le differenze tra le qualità delle formazioni non dipendono da condizioni diverse dei rilievi, ma da circostanze inerenti al modo, con cui si manifestava l'azione delle forze esterne.

2. Roccie vulcaniche. — Era sul cessare la oscillazione discendente, e già era incominciato il movimento ascendente, se pochi torrenti costieri avevano la potenza di guadagnare sul mare tanta terra, mentre allorchè la discesa si trovava al suo massimo, il mare inghiottiva una appresso l'altra vaste maremme conquistate dai fiumi principali (come si vede specialmente nel delta del Tevere a Città della Pieve), quando rincominciarono i fenomeni vulcanici. La presenza dei numerosi interclusi nel tufo trachitico, le loro qualità mineralogiche, la loro giacitura piuttosto alla base

dei tufi, la loro forma medesima per lo più a spigoli vivi m'hanno persuaso, che quei frammenti siano stati strappati, da sotto i depositi pliocenici, da altre roccie trachitiche in posto, e che quindi anche nel territorio dei Cimini si debbano riferire le prime eruzioni della trachite ad epoche anteriori alla pliocenica. È per questo che ho detto, rincominciarono a manifestarsi i fenomeni vulcanici nella valle tirrena.

Il tufo trachitico pertanto, il quale evidentemente viene ad imbasarsi sopra i sedimenti del mare pliocenico, altro non sarebbe se non un rimescolamento dei materiali delle roccie sottostanti, senza avere subita novella rifusione. L'esame della giacitura di quel tufo ci dà una lunga spianata, che completata colla porzione al sud-ovest, rimasta a capo saldo della massa scomparsa per gli avvenimenti posteriori, prende una figura ellittica coll'asse maggiore inclinato nella direzione da nord-est a sud-ovest. La lunghezza dello espandimento in confronto della sua larghezza, mi fa supporre che la eruzione ne avvenisse per una frattura lineare, diretta secondo l'asse maggiore della ellissi. Lo spianamento della massa, la sua minore estensione secondo l'asse trasversale, l'avervi trovato uno strato marino soprastante sopra Orte, mi fa credere che la eruzione del tufo trachitico sia avvenuta a non molta profondità sotto il mare, e che vi abbia costrutta una specie d'isola leggermente rilevata al centro, sulla quale non poterono più salire le acque marine, mentre ne coprirono almeno parzialmente il perimetro. La mancanza assoluta di traccie di metamorfismo, nel piano di contatto tra il tufo trachitico ed i terreni marini, mi conferma nelle esposte idee.

Fu quello il primo segnale degli sconvolgimenti. A Bassano abbiamo veduto che i depositi pliocenici si trovano di molto inclinati immediatamente sotto al tufo trachitico; sicchè le masse plioceniche incominciarono fino da allora a frammentarsi. La stessa frattura, dalla quale escì l'eruzione, dice abbastanza che i terreni laterali non potevano più conservare il loro piano di sedimentazione. Il volume dei tufi trachitici può ascendere a 90 milioni di metri cubi.

Alla eruzione dei tufi trachitici, l'ordine di sovrapposizione fa succedere quella delle trachiti a grossi felspati. Neanche per questa roccia si può vedere alcuna traccia di alterazione recata alle sottostanti, benchè a Bagnaia le marne plioceniche in un punto ne siano separate da leggiero strato di tufo. È difficile poterla attribuire ad eruzione sottomarina, perchè tra il tufo e la trachite non si vede mai alcuno strato sedimentario. La roccia è omogenea, cioè senza interclusi; non ha alcuna somiglianza esterna colle lave superiori. Il suo centro di eruzione si trova presso al centro della ellisse dei tufi. Tutto concorre ad indicare che in origine formasse un solo monte, perchè si vede bene la posteriore suddivisione in tanti poggi, per gli avvenimenti che narrerò in seguito.

In qual modo è sbucata dalle viscere della terra quella enorme massa cristallina, la quale ci misura almeno 100 milioni di metri cubi? Non ha colate, non ha scorie, e per ora almeno bisogna attenersi alla ipotesi emessa dal Ponzi, dal Lotti e da altri naturalisti, cioè che le eruzioni di tale varietà di trachite siano avvenute senza i sintomi che accompagnano le solite eruzioni subaeree: che cioè sia tranquillamente traboccata dal cratere, e si sia riversata in giro al medesimo in poca

distanza per difetto di fluidità, erigendo una grossa cupola. Resta sempre da spiegare la totale mancanza del metamorfismo di contatto, non solamente sul tufo trachitico, ma puranche sulle marne plioceniche di Bagnaia, molto vicine a quella trachite, mentre invece, nelle eruzioni seguenti, troviamo sempre una più o meno grande alterazione nelle roccie sottoposte.

Il modo con cui è uscita una tale massa è forse il solo punto oscuro della storia dei Cimini, perchè procedendo nella sintesi, appaiono sempre più chiari i caratteri degli avvenimenti che vi si svolsero.

Riguardo a quale piano del pliocene si deva collocare la eruzione dei tufi trachitici, posto che le acque marine abbiano potuto bagnare le spiaggie dell'isola sorta per la eruzione di quei tufi, come credo d'aver veduto ad Orte; oppure, prescindendo anche da quella nota locale, posto che le induzioni, basate sulle altre osservazioni, sieno tali da costringere a riguardare l'eruzione dei tufi sottomarina, i fossili dei dintorni di Viterbo, benchè la collezione non ne sia troppo ricca, possono dare la risposta. Identiche specie ho trovate nella Valdichiana, e sotto i tufi leucitici di Orvieto. Quelle raccolte furono giudicate dai Paleontologi appartenere al piano del pliocene antico, sicchè la eruzione di tufi trachitici, coinciderebbe colla fine di quel piano, e colla fine di quel piano il mare si sarebbe ritirato dal Viterbese, come si ritirò dalla Val di Chiana.

Periodo dopo il pliocene antico nel territorio Cimino.

Non ho documenti per definire se i fatti seguenti debbano essere riferiti al pliocene superiore, oppure all'epoca quaternaria, come per parere dei geologi, si può asserire delle eruzioni leucitiche. Per ciò ne ho fatto un articolo a parte, il che non reca alterazione all'ordine secondo il quale i fatti medesimi si avvicendarono.

1. Roccie vulcaniche — Il mare s'era del tutto ritirato dal territorio dei Cimini; un'alta cupola di trachite dominava la contrada, quando nuove convulsioni del terreno segnalarono la ripresa dell'attività vulcanica. Si squarciarono i fianchi della cupola, e dalle squarciature sgorgarono le lave delle correnti del monte Ciliano: sulla vetta si aprì un cratere ed altre lave vomitate da quello scorsero sulle pendici orientali. Una delle correnti, incanalatasi tra la spaccatura, per la quale la Palanzana era rimasta divisa dal resto del monte, si diresse verso il luogo dove è costrutto il villaggio della Quercia. Anche in queste lave ritroviamo i grossi cristalli di sanidino della cupola trachitica, ma le due roccie differiscono grandemente quanto alla struttura, e al colore della pasta. Le ultime si presentano in forma di correnti, sono più o meno bollose e scoriacee, ed hanno alterate le sottoposte formazioni.

La fenditura della crosta terrestre prosegue ad allungarsi, si sposta il centro d'azione; una nuova bocca vulcanica è aperta al sud del cratere Cimino. Le lave da questa vomitate sul principio hanno molta somiglianza con quelle descritte di sopra, ma vi appare un altro ingrediente cristallino, il quale poco a poco va prevalendo, talchè nella roccia avviene anche un mutamento esteriore. Scorie rosse coprono quelle lave con grossi cristalli di felspato e con pirosseno.

Il Brocchi cita ancora una corrente con felspati e pirosseni dalla parte di

Soriano, il che indicherebbe che anche il vecchio Cimino ebbe la sua eruzione di lava dopo l'apertura del nuovo cratere di Vico: però l'attività del primo è notevolmente affievolita, e finisce a palesarsi soltanto con pioggie di lapilli, ricche di cristalli di sanidino e di pirosseno, e di pomici bianche. Coperto con questi detriti gran spazio di terreno, sono esaurite le ultime forze, e quella bocca tace forse per sempre [1].

2. Terreni sedimentari. — Come fu detto, tante commozioni non potevano lasciare la faccia del territorio nell'assetto, col quale il mare plioceno vi aveva deposto i suoi sedimenti. Quegli strati furono spezzati; piegati o sepolti i frammenti. Larghe cavità fecero ristagnare le acque; i torrenti, i fiumi cominciarono ad otturare quelle buche, colmandole con melma, con sabbie, con ghiaie. Le sorgenti minerali largamente sgorgando dai crepacci del terreno, s'insinuavano sulle antiche ghiaie littorali plioceniche, e correndo sui nuovi depositi dei torrenti, vi lasciavano gli elementi minerali sottratti alle viscere della terra.

Epoca quaternaria nel territorio Cimino.

1. Fenomeni di vulcanicità primaria. — Una nuova variante incomincia ad apparire nei cristalli delle lave di Vico. Ai felspati, ai pirosseni si uniscono le leuciti, scarse sul principio, dipoi in copia strabocchevole. Se grandiosa appare la eruzione delle lave con felspati e pirosseni, dalle masse rimaste a testimoniarle sui dirupi del recinto, e dagli affioramenti che spuntano fino a 10 chilometri di distanza dal centro di azione, non minore fu il versamento delle lave leucitiche. Oltre alle immense correnti escite dalla bocca del cratere, e rovesciate al nord ed all'ovest, da una larghissima squarciatura, avvenuta sul fianco orientale, i leucitofori corsero fino a dieci chilometri di distanza. Altra più piccola squarciatura si trova a sud-ovest nel luogo del fontanile della cava, e forse anche una squarciatura è quella che dette uscita alla lave di Ronciglione. Il cono, dopo l'eruzione dei leucitofori, dovè raggiungere la massima altezza, ed eguagliare se non superare l'adiacente Cimino, perchè sul perimetro del recinto le lave sono all'altitudine di circa 1000 metri.

Alla eruzione delle lave leucitiche dovè seguire un lungo periodo di riposo, misurato da più che 100 metri di lapillo, ammassato particolarmente sui lati orientale e meridionale del cratere. Il vulcano raccoglie le forze per gareggiare colle altre bocche tirrene nella sua ultima e più potente eruzione, appetto alla quale dovevano quasi scomparire tutte le passate manifestazioni.

Dalla carta e dalla premessa descrizione, risulta che Vico non fu solo a vomitare le lave leucitiche. Vi abbiamo la corrente di Ferento, venuta sino quasi in piedi del Cimino dal sistema di Bolsena; vi abbiamo quella di Nepi venuta dal sistema di Bracciano; in fine vi è quella di Borghetto, la più importante per la vicinanza ed i rapporti col gruppo dei Cimini.

La distanza di circa 10 chilometri tra i leucitofori di Borghetto e quelli di Nepi e di Fabrica; il non trovarsi nessuna traccia di correnti di quelle lave nello

[1] Può darsi che trachite porfiroide del Monte Amiata corrisponda alle lave di queste eruzioni.

intervallo, e più le traccie, indicate nella descrizione dei terreni, di lapilli e scorie, mi fanno preferire l'ipotesi che si aprisse un cono eruttivo secondario presso Civita Castellana. L'apertura di quel cratere forse può essere stata la conseguenza della grande squarciatura orientale del cono di Vico, per la quale escirono le correnti di Vallerano, Fabrica, Caprarola; però mi sembra più naturale riferirla al prolungarsi della fenditura della crosta terrestre, segnata dai crateri di Baccano, Martignano, Stracciacappe, Lagustello, Monterosi. Perciò, quantunque contemporanee nell'ordine cronologico alla eruzione dei leucitofori di Vico, le lave di Borghetto sarebbero indipendenti dal sistema Cimino, e formerebbero un episodio delle eruzioni dell'adiacente sistema Sabbatino. Non è forse difficile, combinato lo studio di questo sistema col Cimino, di trovare in quella fenditura la causa, per la quale si seppellì in parte una lunga zona di terreno pliocenico marino, incominciando dal territorio di Borghetto e Civita Castellana, e proseguendo per Falari, Ronciglione, Nepi, Sutri ecc., sui quali luoghi non affiora più il pliocene ad altitudini inferiori a quelle, cui giungono i suoi sedimenti ad Orte e sotto il Soratte.

Nella descrizione analitica della formazione di Borghetto, ho notato che nello strato vulcanico, immediatamente sovraposto ai depositi sedimentari, stanno dei frammenti di trachite a grandi felspati (n. 2), mescolati a pezzi di altre lave felspatiche e pirosseniche, e ciottoli di piromaca. Lo strato è alto appena pochi decimetri. Se nel medesimo avessi trovato i soli frammenti della prima roccia, avrei dubitato che potessero essere stati eruttati dal cratere di Civita Castellana, e che quella trachite si trovasse sul luogo a qualche profondità, sotto i depositi marini e vallivi; ma la presenza delle altre lave mi fa credere piuttosto, che siano stati spinti fin là dei materiali detritici di qualche eruzione dei Cimini, prima che accadesse quella dei leucitofori, analogamente a quanto avvenne dopo l'eruzione dei tufi, come dirò in seguito. Nella quale idea mi conferma l'aver trovato identico strato di materiale detritico sul versante opposto del gruppo Cimino, presso la Cura rurale di Vetralla.

La convulsione terminativa del vulcano di Vico supera la somma di tutte le antecedenti esplosioni: il volume del materiale solido, vomitato nell'ultima eruzione, supera i mille milioni di metri cubi.

Il non trovarsi mai il tufo leucitico sotto le lave contenenti amfigeni, mentre lo si vede chiaramente circuirle, in particolare a Ferento e Civita Castellana, e coprirle alla Cura rurale di Vetralla; i grossi ciottoli di leucitoforo in mezzo ai depositi alluvionali sotto il cimitero di Civitacastellana, per tacere di altre osservazioni, le quali da sole non basterebbero a definire la serie delle roccie vulcaniche, mi hanno convinto che la produzione del tufo sia stata posteriore a quella dei leucitofori (1).

Da dove escì il tufo? Sotto quale forma fu vomitato? Quale era la condizione dei terreni che ricoperse? Il recinto di Vico non serba alcun materiale per cui si

(1) Incominciate le osservazioni sul vulcanismo Cimino coll'idea preconcetta che il tufo rappresentasse una eruzione anteriore a quella delle lave leucitiche, nel notare le cose vedute a Ferento, scrissi sul taccuino — Sembra che il tufo si sia opposto come diga e come argine a sbarrare la strada ed a limitare il cammino della corrente di leucitoforo.

possa rispondere a tali quesiti: mentre chiaramente segna la sovraposizione delle diverse lave che per esso si fecero strada, gli squarciamenti pei quali alcune, anzichè sollevarsi fino al cratere, ne sgorgarono per drenaggio dai fianchi, non mostra nè un filone di tufo, nè una sovraposizione di questa roccia. Nè più chiare risposte danno le pendici del cono: non vi si può trarre altra nota salvo che, avvicinandosi al suo perimetro, vi si trovano degli ammassi caotici di alcune materie contenute nel tufo, però senza cementazione alcuna. Scorie nere, blocchi di leucitofori, qualche ciottolo di felspato compongono quelle masse, le quali mi pare che indichino una eruzione di scorie e frammenti, immediatamente antecedente o susseguente a quella del tufo.

Il tufo leucitico ha riempite tutte le parti più depresse, colmate tutte le valli preesistenti; ha lasciata scoperta la zona al nord-est del Cimino, rialzata dai tufi trachitici; vi si è solo più o meno accostato, coprendo i tufi trachitici ed il lapillo felspatico, per quanto le erosioni meteoriche, o le fratture sismiche gli hanno permesso d'insinuarvisi. Posa indifferentemente e sul terreno marino pliocenico, e sui sedimenti vallivi, e sui tufi trachitici, e sulle pozzolane felspatiche e sulle altre lave: di rado si vede sovraposto ai leucitofori, perchè le correnti di queste lave dovevano costituire dei dossi sugli adiacenti terreni, e perciò il tufo non li ha potuti sempre coprire. Però quando non ne copre la parte più elevata, vi si livella sui fianchi come se si fosse appoggiato ad una diga, e copre decisamente i leucitofori al Tezzavolto sotto Caprarola, e specialmente alla Cura rurale di Vetralla. Nelle altimetrie del piano superiore dei tufi leucitici, è costante la forma lenticolare; ossia le altitudini decrescono dal perimetro interno all'esterno dell'anello. Su tutta la zona la roccia ritiene identici caratteri.

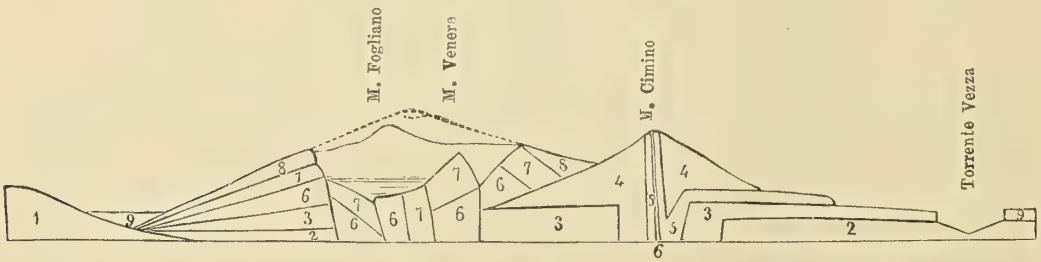
Dunque bisogna escludere la formazione sottomarina, perchè strati marini non sono da per tutto sottoposti al tufo, ed anzi lo sono proporzionalmente su piccola superficie; è necessario escludere la formazione per eruzione di materie o sotto, o sopra un bacino lacustre, perchè mancano da per tutto i veri terreni lacustri, e quei depositi d'acqua dolce che vi si trovano indicano valli in fase d'interrimento. Bisogna escludere l'idea che il tufo sia stato eruttato su terreno asciutto, sotto forma di pioggia di materie detritiche, perchè sarebbe caduto indifferentemente su tutto il territorio, e non potrebbe avere la compattezza che lo distingue, ma sarebbe una massa caotica punto cementata, come quelle che con analoghi materiali si trovano vicino alle pendici del cono di Vico. In altro scritto, parlando dei tufi di Orvieto e di Acquapendente, venni alle medesime conclusioni (1). Alla mia mente non s'offre altra spiegazione, che renda ragione di tutti i caratteri del tufo e sua giacitura, se non considerandolo come una eruzione fangosa, la quale si espanse su un territorio prosciugato e generalmente nella fase di erosione (2). Quella eruzione dovè avvenire per semplice trabocco dal cratere, senza projezione delle materie,

(1) *Nota sulla cronologia dei Vulcani Tirreni.*

(2) I tufi dei distretti di Bolsena e Cimino differiscono da quelli della Campagna Romana. Mi sembra che almeno in parte la differenza dipenda principalmente da ciò, che i primi furono eruttati su terreno asciutto, i secondi invece su fondo lacustre o palustre per la depressione postpliocenica che da Passo Corese in giù si vede lungo la sinistra del Tevere.

perchè altrimenti si sarebbero sparse anche sopra i luoghi, che appunto rimasero scoperti perchè più elevati. Così al nord-est ne fu impedito l'espandimento dalla barriera del cono Cimino, mentre nessun ostacolo si oppose al riversarsi dalle altre parti. La fluidità della massa la fece scorrere agevolmente lungo le pendici del cono, molto ripide come quelle di tutti i coni eruttivi, in modo da non lasciarvi potenti depositi, e da rendere facile all'azione meteorica il dilavamento delle poche traccie rimastevi. Giunti i fanghi appie' del cono, finchè si conservarono fluidi, poterono facilmente correre il territorio laddove non trovarono ostacoli. Così non superarono i più elevati colli di Orte, nè quelli di Civita Castellana nella destra del Treja, mentre, incanalati nella valle di Borghetto, andarono fino alle pendici dei colli sabini, dove se ne trova ancora un frammento a Foglia sulla sinistra del Tevere. La linea di pendenza, che li distingue, è l'effetto naturale di tutte le masse fangose mosse da una velocità iniziale, la quale va decrescendo e mancando e per gli attriti e per altre cause.

L'eruzione del tufo leucitico segnò la fine del vulcanismo primario nei Cimini. Un volume così ingente, tolto improvvisamente all'interno, doveva certamente alterare l'equilibrio statico alle pareti del cono, le quali non poterono reggere ad un'ultima convulsione. Massi di qualche metro cubo di tutte le roccie, eruttate nelle varie epoche, furono balestrati fino a 14 chilometri verso Bassanello, Falari, Barbarano; le pareti del cono crollarono, i rottami precipitarono nell'abisso, eccetto uno che sostenuto dagli altri ne restò sovraposto, acquistando poi per l'azione meteorica la configurazione del cono, che fu chiamato Monte Venere; sopra gli altri la brezza increspa le limpide acque del lago di Vico (1).



1 Terreni Eocenici-Miocenici — 2 Terreni Pliocenici marini — 3 Trachite a piccoli felspati — 4 Trachite a grandi felspati — 5 Lava con felspati — 6 Lava con felspati, pirosseni — 7 Lava con felspati, pirosseni, leuciti — 8 Lapillo leucitico — 9 Tufo leucitico.

(1) Il ch. professore Stoppani, nel restituire all'Accademia il manoscritto di questa Memoria, riguardo allo spaccato dimostrativo dei Vulcani Cimini, espose le seguenti osservazioni: « Vorrei sentire « dall'autore come giustifica il suo supposto, senza nemmeno accennare a quanto io ho scritto abba- « stanza diffusamente contro questa idea degli sprofondamenti (idea di Rath, di Ponzi) tanto per « riguardo al vulcano di Vico, quanto per quelli di Bolsena, Bracciano e Laziale. Per me il cratere « di Vico è un vero cratere; il M. Venere è un cono posteriore interno; un Vesuvio in rapporto con « un M. Somma, che è il M. Fogliano. Ecco l'unico appunto che io farei alla Memoria del bravo signor

Conosco appena sommariamente gli altri distretti vulcanici, ma combinando le osservazioni esposte su quello dei Cimini cogli apprezzamenti del Ponzi sulla origine dei laghi di Bolsena e Bracciano, mi sembrerebbe di poter concludere, che anche in quelli siano accaduti fatti analoghi agli avvenimenti del vulcano di Vico, almeno dalla eruzione dei tufi allo sfasciamento dei coni principali.

Però non cessarono contemporaneamente negli adiacenti sistemi le manifestazioni della attività vulcanica principale. Lasciata anche da parte l'epoca cui riferire le lave basaltiche del vicino Monte Jugo, abbiamo sempre tutta la massa del lapillo sulla destra della Treja, la quale ha coperto i tufi a Faleria, e forse in altri luoghi ed è venuta a sfiorarsi sul perimetro d'intersezione tra le dejezioni dei Cimini e dei Sabatini. Lo svolgimento della potenza di quella massa accusa un centro di eruzione più meridionale, e mi sembra di doverla ascrivere ad una delle bocche del sistema di Bracciano.

2. Assetto del territorio dopo la eruzione dei tufi leucitici.—Fenomeni di vulcanicità secondaria. — È facile intravedere sul territorio dei Cimini le conseguenze della eruzione dei tufi leucitici. Nell'ordine sismico probabilmente dovè risultare anche una qualche depressione, per riaccostare le formazioni inferiori dopo il gran vuoto avvenutovi. Nell'ordine delle vicende esterne, il primo effetto fu di segnare i limiti al corso del Tevere, e forse di deviarne qualche tronco. Le valli dei torrenti che circuivano il gruppo Cimino furono sepolte, e le acque doverono tornare a scavarsi nuovi alvei. Man mano che il sollevamento del terreno faceva

« Verri, non perchè mi abbia contradetto col fatto, ma perchè doveva contradirmi anche collo scritto, « accennando almeno qualche prova di ciò che suppone. Intanto osservo che tutta quella specie di « rovina e di caos, il quale risponde a capello all'idea dello sprofondamento, si trova sotto al livello « del lago, o del piano di esso lago abbandonato sullo spaccato dimostrativo. Entra adunque nella « parte affatto suppositiva. Non è più naturale il supporre che il cono formato dapprima con lave « pirosseniche e leucitiche, come il M. Somma, abbia subìto, come quest'ultimo, uno di quegli *sven-* « *tramenti* di cui è così già ricca la storia dei vulcani, ed a cui appunto si deve la formazione dei « grandi crateri, a pareti verticali, come lo sono appunto quelli di Vico e del Somma, e che per una « successiva eruzione di lave della stessa natura sia nato nel mezzo un Vesuvio? L'enorme strato di « lapillo leucitico, che ricopre il tutto, sarebbe il prodotto e al tempo stesso il più sicuro testimonio « di tale *sventramento*, col quale si chiude il periodo delle grandi eruzioni cimine, salvo una o più « eruzioni interne e limitatissime, a cui deve il M. Venere la sua esistenza ».

Unitamente alle bozze, comunicatami la lettera dell'illustre Maestro, mentre approfitto dell'occasione per ringraziarlo vivamente del benevolo augurio in essa contenuto verso questo piccolo mio lavoro, obbedendo al suo invito, riepilogo sommariamente le ragioni, le quali m' hanno indotto a considerare il M. Venere come un rottame del cono di Vico, anzichè come un cono posteriore.

1.ª Non ho potuto notare, nè nell'interno, nè nell'esterno del recinto, alcuna traccia di correnti vulcaniche, le quali possano riferirsi ad eruzioni posteriori a quelle, che ne hanno costrutte le pareti.

2.ª Ho trovata la sezione del M. Fogliano perfettamente identica a quella del M. Venere, per rapporto alle qualità delle lave leucitiche: sotto lave contenenti piccoli cristalli di sanidino, di leucite, di pirosseno, e poche laminette di mica; sopra lave con molti e grossi cristalli di leucite; sopra lapillo. Nel dosso occidentale del M. Fogliano, le tre masse sono stratificate a dolce pendenza secondo la loro serie di eruzione; nel M. Venere la vetta sud-ovest è composta dalle lave con piccole leuciti, la vetta a nord-est dalle lave con grosse leuciti; il lapillo manca ad occidente e si trova soltanto ad oriente, ossia dalla parte delle seconde lave. La veste boscosa del monte non permette di eseguirvi tanto minute

abbassare la valle, che il Tevere si sistemava per erosione, si abbassarono o approfondirono i tagli dei torrenti, fino al punto dove li troviamo al giorno d'oggi.

Seguita ancora, dopo tanti secoli, in quelle contrade la vulcanicità secondaria; però oggi in proporzioni minime, se guardiamo tutte le giaciture dei travertini, la cui formazione oramai quasi da pertutto è rimasta sospesa.

Non ho potuto rintracciare nessun ricordo, che indichi la presenza dell'uomo alle descritte conflagrazioni. Terme romane sorgevano al Bulicame; gli scrittori latini ricordano il lago di Vico, e dicono che quella regione era tutta vestita da bosco, ma nessun di essi accenna a commozioni vulcaniche, come nemmeno v'allude, che io sappia, alcuna figura dei vasi etruschi (1).

Qualche cosa di straordinario dovè nondimeno accadervi il 28 maggio del 1320, perchè nelle cronache locali si trova scritto che « apparsero in Viterbo nel aere grandissimi segni, che derno terror a tutto il populo con tenebre orribili et figure de demoni che parea che subissasse il Mondo » (Gio. Giacomo Sacchi testimonio di vista nei *Ricordi della casa Sacchi di Viterbo*). Da questo cenno e da altre memorie, non che dai dipinti votivi fatti fare nella Cappella della Trinità, dove si vedevano per l'aria demoni sotto forma di corvi, il Busi nella *Storia della Città di Viterbo* edita il 1742 scrive a pag. 187 « ingombrarono ad un tratto la Città nuvole sì tenebrose, udironsi tuoni sì formidabili, caddero fulmini sì frequenti,

osservazioni, ma combinando quelle citate colla disposizione dei dicchi di lave a piccole leuciti, i quali si vedono ad occidente, m'è sembrato che le masse siano di molto raddrizzate in confronto della disposizione che hanno nel M. Fogliano, e che la sella, la quale le separa, e dà al M. Venere l'aspetto di un cono forcuto, sia il risultato della corrosione meteorica, manifestatasi con maggiori effetti nel piano di divisione tra le due varietà di lave.

3.ª La gran massa di lapillo addossata al cono di Vico non si estende a molta distanza dal centro del cratere; generalmente è composta di materiali di piccole dimensioni, e sono rari gl'interclusi di gran mole; da strato a strato varia molto nella composizione, e di più ho veduto talvolta che uno strato si è adattato alle cavità prodotte dalle corrosioni meteoriche nel sottoposto; mai vi ho trovati frammenti delle trachiti n. 1 e n. 2. Perciò ho creduto dover concludere, che quella massa doveva essere piuttosto il risultato di molte parziali dejezioni, prolungatesi nel lungo periodo, che passò tra le eruzioni dei leucitofori e quella dei tufi leucitici, anzichè di una grossa convulsione, per la quale si sarebbe sventrato il cono.

4.ª Invece mi sembrò di trovare i testimoni della eruzione finale nei grossi blocchi gettati fino a 14 chilometri, composti di roccie calcaree, e di lave appartenenti a tutte le altre eruzioni dal tufo trachitico in su, e quindi strappate da molto maggiore profondità, che non i lapilli coi quali è costrutto il mantello del cono.

Siccome poi anche la massa di lava con piccole leuciti, eguale a quelle del M. Fogliano e del M. Venere, la quale affiora al piano del lago al sud del recinto, composto in quel luogo di lave pirosseniche, m'apparve come un frammento visibile delle pareti del cono, mi sembrò che manchino gli argomenti per stabilire uno sventramento del vulcano, prodotto dall'azione del vapore, la quale lacera e sbrana le roccie all'ingiro, allargando e prolungando la fessura. È perciò che ho disegnato lo spaccato come si vede, ed ho posto il franamento del cono di Vico come conseguenza della eruzione dei tufi, e con questo la chiusura dei fenomeni di vulcanicità primaria nei Cimini. Del resto, non potendo il problema uscire dai limiti dell'ipotetico, desidererei solo aver esposti i fatti notati con chiarezza e con precisione, perchè il lettore dall'esame di quelli si formi il proprio criterio.

(1) Virgilio *En.* L. 7; Silio Italico, L. 8; Tito Livio L. 9, 1. Deca; Lucio Floro, L. 1, Cap. 17.

soffiarono venti così gagliardi, scesero pioggie sì vaste, crollarono la terra terremoti così terribili, e si sentirono per l'aria gridi e stridori sì spaventevoli che non solamente gli uomini, ma gli animali d'ogni sorta ululando e fuggendo dai loro alberghi, facevano credere evidente il subissamento della Città. . . . quei brutti spiriti a vista di tutto il popolo si precipitarono in quel tal piccolo lago perpetuamente ardente che chiamasi il Bullicame ».

Le osservazioni locali non mi dettero alcun indizio di perturbazione così recente nel sistema Cimino, da doverla riferire al tempo di cui parlano i citati cronisti, nel quale il volgo vidde nelle materie lanciate altrettanti spiriti infernali vaganti per l'aria. L'ultima eruzione, accusata dal terreno, lanciò, come già dissi, una quantità di ciottoli e di massi diretti piuttosto verso il sud e l'est del vulcano di Vico, che non sopra Viterbo.

Riepilogo delle fasi dei Vulcani Cimini.

Verso la fine del pliocene antico, per una linea di rottura, diretta dal nord-est verso il sud-ovest, traboccò nel territorio di Viterbo una quantità di cristalli di sanidino, lamine di mica, e ciottoli composti cogli stessi minerali, strappati a roccie cristalline presistenti sotto i depositi marini pliocenici, e con essi fu costrutta un'isola di tufo trachitico. Una seconda eruzione, non di materiale disaggregato, ma neppure coi caratteri delle lave ordinarie, alzò la cupola del Cimino presso che al centro dell'isola.

Ritirato del tutto il mare da quei luoghi, convulsioni sismiche spezzarono la cupola, e dalle squarciature laterali, da un cratere apertosi sulla vetta sgorgarono torrenti di lava trachitica.

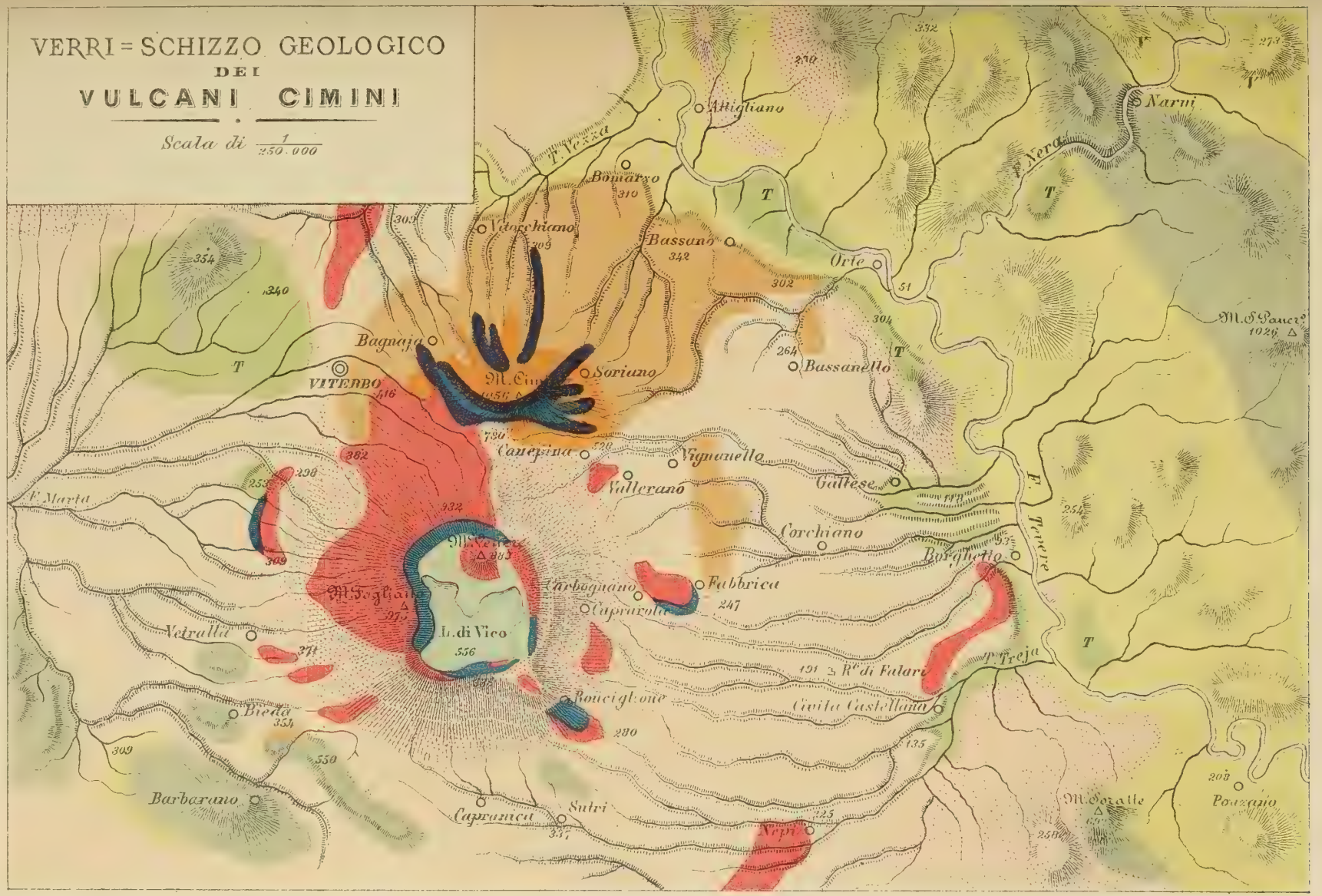
Dopo questo periodo, si aprì sul fianco occidentale del Cimino la nuova bocca vulcanica di Vico. Nel principio ambedue i crateri vomitarono lave con felspati e pirosseni: però la eruzione delle lave cessò presto nel Cimino, e proseguì solamente a Vico. Sfogata ancora per qualche tempo l'attività con pioggie di lapillo felspatico, il Cimino si estinse.

Nelle lave di Vico, dopo la estinzione del Cimino, incominciò ad apparire un nuovo minerale: la leucite, scarsa sulle prime, nelle ultime lave fece scomparire pressochè totalmente gli altri cristalli. La eruzione dei leucitofori fu seguita da un tempo di quiete, nel quale il vulcano gettava fuori soltanto lapillo leucitico, preparandosi alla esplosione finale del sistema. In quella esplosione furono riversati dalla bocca del cono torrenti di fango, che seppellirono tutta la regione per un raggio di 10 a 14 chilometri; da quel fango solidificatosi venne il tufo giallo o tufo leucitico.

L'ingente volume delle materie (il quale non si può valutare a meno di mille milioni di metri cubi), tolto improvvisamente all'interno alterò l'equilibrio statico delle pareti del cono: lanciati sopra al tufo massi di tutte sorta di lave divelti dalle profonde cavità, sprofondò, restandone un rottame più sollevato a costituire il Monte Venere, mentre gli altri furono sepolti dalle acque del lago di Vico.

È interessante notare, che molti dati inducono a credere che durante il periodo di commozioni descritto, nei bacini inferiori dei confluenti del Tevere, e particolarmente in quello della Nera, siano stati sospesi i corsi dei fiumi: le loro acque inghiottite dai crepacci, comunicando per vie sotterranee coll'adiacente regione, avrebbero recato potente alimento alla immensa manifestazione di vulcanicità, della quale ho procurato di descrivere un parziale episodio.

Per comodità di coloro, che credessero farvi studî più accurati, la raccolta dei fossili di Bagnaja e delle roccie principali dei Cimini fu donata al Museo geologico dell'Università di Roma.



TERRENI DI SEDIMENTO

- Mesozoici Eocenici-Miocenici
- Pliocenici (V): Marini; Vallivi
- Post-pliocenici (T): Vallivi; Travertini
- Contemporanei

ROCCIE VULCANICHE

- Trachite a piccoli felspati
- Trachite a grossi felspati
- Lava con felspati
- Lava con felspati, pirosseni, leuciti
- Tufo leucitico
- Lapillo leucitico
- Lava con felspati e pirosseni

I diaspri della Toscana e i loro fossili.

Memoria del dott. DANTE PANTANELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

La parola DIASPRO (ἴασπις, iaspis, jaspe, jasper, jaspis,) il cui tema *spi* nelle lingue indo-germaniche comune alle parole spina, spicula, spingere, aspide, cuspide, spike, spitze ecc. potrebbe svelare la traccia dell'antichissimo uso di questo materiale, ha il comune significato di « pietra dura varicolore, che s'annovera tra le gioje di minor pregio » (V. Vocab. italiani).

Nella geologia e nella mineralogia il significato di questa parola non è egualmente ben definito: Dana lo definisce (*Sistem of mineralogy* pag. 242) « A dull red, yellow, brown or green siliceous rock, nearl or quite opaque, and presenting little beauty until polished »; Zirkel (*Lehrbuch der Petrographie.* Bonn 1866 pag. 288) lo distingue con le seguenti parole: « Der Jaspis tritt ebenfalls hier und da sebständing als ein Gesteinglied von untergeordneter Bedeutung auf; die meist geschichtete, dichte, watte Masse mit muscheligen Bruch zeigt verschiedene Farben, gewöhnlich schmutzig gelb, roth, braun, bisweilen wechseln die Farben in Streifen. Mit Hornstein findet sich Jaspis zusammen, manchmal in der Nachbarschaft von Serpentinen und Gabbrogesteinen, Z. B. am Lehrberg bei Hausdorf in Schlesien, bei Waidhofen, Ipsitz, bei Felling in der Gegend von Krems in Osterreich, auf Elba und in Ligurien, am Berg Uschkul bei Anninsky am Ural »; Credner (*Traité de géol. et paléont.* 1878 trad. franc. pag. 47) chiama scisto siliceo o lydite « une roche quarzeuse, compacte, très-dure, infusible, impregnée d'argile, de carbone et d'oxide de fer ressemblant au silex corné, à fragments en éclats et de couleur sombre » mentre riserva il nome di « jaspe » per una selce cornea a zone alternativamente colorate; Bombicci (*Corso di mineralogia* 1875 pag. 470) stabilisce che « il miglior criterio per separare la serie dei diaspri da quella delle tante varietà di pietre silicee, sta nel loro modo di origine, potendosi ritenere per veri diaspri quei materiali argillosi ed ocracei che una copiosa infiltrazione di elementi silicei, quale può venir prodotta da acque termali silicifere, metamorfosò e ridusse in stato di durissima roccia vi sieno o no parti trasparenti e venature quarzose ».

I geologi toscani sono più concordi su ciò che intendono con questo nome: Targioni lo usò per le roccie silicee che riteneva argille indurite; Savi lo assegnò agli strati induriti e silicizzati dalle roccie ignee (*Osserv. geogn. sul Campigliese*, Nuov. giorn. letter. tosc. vol. XVIII. pag. 217) e mantenne questa definizione in tutta la lunga serie dei suoi lavori geologici: la stessa definizione è data da Burat (*Obs.*

sur quelq. gîtes métal. de la Toscane. Paris 1846 pag. 146) e da Pilla nel suo *Trattato di geologia* pag. 260; D'Achiardi (*Mineralogia della Toscana* pag. 104) dice: « i diaspri da noi si presentano come roccie metamorfiche là, ove roccie sedimentarie, specialmente argillose o marnose, sono state cotte o silicizzate ».

Ed ora per quanto possa essere chiaro il senso attribuito a questa parola dai geologi toscani, significato che è stato pure seguìto da molti non toscani, io credo opportuno dare di questa roccia una nuova definizione o meglio, modificare la definizione da tutti accettata, se non altro per conseguire una maggior chiarezza su ciò che dovrò in seguito dire dei medesimi.

Diaspro: Roccia silicea, varicolore, opaca, a frattura concoide più o meno lucente a volte vetrosa, costituita da silice amorfa unita a silice cristallizzata, inquinata da ossidi metallici e terrosi, spesso distintamente cristallizzati nella massa della silice, nel maggior numero dei casi risultante da *un fitto aggregato di avanzi di organismi a scheletro siliceo, e che trovasi in masse rilevanti e stratificate e tali da raggiungere una vera importanza stratigrafica nella successione delle roccie, considerata dal lato geologico.*

Con questa definizione intendo escludere dal novero dei diaspri tutte le roccie silicee che si trovano in arnioni o anche in strati nelle rocce calcaree, riservandolo solo per quelle masse che hanno o una importanza stratigrafica a sè o che fanno parte di altre prossime ai diaspri per la natura dei loro elementi; nel che poi non mi discosto dalla comune degli autori che non hanno mai accordato ad esempio, il nome di diaspro alla selce dei calcari del lias, benchè sia con essi stratificata.

Uguale accordo riscontrasi tra i geologi che hanno parlato della Toscana, circa l'origine dei diaspri. Savi, loc., cit. ripete la ipotesi già emessa da altri che gli strati del galestro divengano diasprini per l'azione del calorico prodotto da una roccia in fusione: nella seconda lettera geogn. al Guidoni (N. gior. tosc. vol. XIX. pag. 154) riferisce i diaspri di Barga agli strati del macigno alterato pel contatto della dolomite fusa: lo stesso ripete nei lavori seguenti pubblicati nello stesso periodico (Lettera al Guidoni vol. XXIV. pag. 210; Tagli geologici delle Alpi Apuane e Monte Pisano vol. XXVII. pag. 83; Catalogo ragionato d'una collezione geografica della Toscana vol. XX. pag. 120). Nel lavoro sulle masse ofiolitiche della Toscana (loc. cit. vol. XXXVII. pag. 49) pone i diaspri tra le roccie alterate dal serpentino, e nello stesso volume a pag. 109, dice che si formano i diaspri quando i terreni argillosi per l'azione delle roccie nettuniane « variano colore ed acquistano durezza silicea conservando la stratificazione ».

La stessa idea compare nei seguenti autori: Viviani, *Voyages dans les Apennins de la Ligurie* 1807 pag. 12; Brogniart, *Sur les gîsem. ou sur la pos. rel. des ophiolites, jaspes, euphotides* etc. Paris 1821; Pareto e Guidoni, *Sulle mont. del gol. della Spezia* 1832 pag. 262; De la Bêche, *Manuel de géologie.* Paris 1833 pag. 598; Repetti, *Dizionario geogr.* 1833 vol. I. pag. 436; Pilla, *Saggio comparativo dei ter. che comp. il suolo d'Italia* pag. 299, e *Geologia* pag. 260; è ripetuta come ho accennato da D'Achiardi nella sua *Mineralogia della Toscana.*

Issel (*Intorno a un minerale manganese del Senese.* Rivist. scient. industr. anno VIII. pag. 361) crede i galestri originati da sedimenti di mare profondo; non

parla però dei diaspri che pure sono frequenti negli strati di Rapolano, ai quali egli si riferisce.

De Stefani è stato il primo a dissentire in questa veduta ormai a tutti comune e in una sua comunicazione alla Società toscana di scienze naturali (Proc. verb. della Soc. tosc. vol. I. 1879 pag. CII.) emise l'opinione che i diaspri e i manganesi dovevano attribuirsi a sedimenti di mare profondo e che le diverse gradazioni delle roccie siliceo-calcaree e delle roccie silicee non dovevano considerarsi che aspetti diversi di uno stesso sedimento raccolto a diverse e grandi profondità, mentre da tutti era ed è ritenuto che questo diverso aspetto provenisse dalla differente azione metamorfosante delle roccie ignee o delle emanazioni plutoniche.

Finalmente invogliato da questa comunicazione del De Stefani; da un lavoro del Boney (*Geolog. Magaz.* 1879 n. 182 e Boll. Comit. geol. ital. 1879 n. 9 e 10) il quale asseriva aver trovato in una roccia, facilmente riconoscibile per quella da noi toscani usualmente chiamata diaspro, raccolta all'Impruneta presso Firenze avanzi di policistine; poco persuaso dell'azione metamorfosante delle roccie ignee, le quali frequenti nell'eocene superiore, mancano nei piani a questo inferiore che pure abbondano di diaspri, mi misi di buon animo ad un accurato esame microscopico dei diaspri e fui abbastanza fortunato di raccogliere una ricca serie di diaspri con avanzi di radiolarie.

Delle mie prime ricerche detti una breve comunicazione alla Società toscana di scienze naturali (Proc. verb. della Soc. tosc. 1880 vol. II. pag. 27); presentai in quella occasione le sezioni da me preparate e i diaspri dai quali le avevo ottenute, alcuni dei quali appartenevano al Museo della r. Università di Pisa, e conclusi fin d'allora che i diaspri debbono essere considerati come sedimenti marini di origine organica analoga a quella dei calcari; che la stessa origine deve attribuirsi ai manganesi; e nello stesso tempo avvertiva essere con queste ricerche giunto alla prova di fatto, che le serpentine rappresentavano vere lave vulcaniche distese nel fondo dei mari; come avevano ritenuto Stoppani, Taramelli, De Stefani ed altri, in opposizione a coloro che le giudicarono roccie plutoniche intrusè e non pervenute alla superficie degli strati all'epoca della loro eruzione.

Prometteva inoltre in quella comunicazione di spiegare più dettagliatamente le mie idee su queste questioni, e di occuparmi segnatamente della determinazione della ricca e nuova fauna che il microscopio mi aveva svelato nelle sottili e trasparenti lamelle di diaspro da me preparate.

Ora adempio alla mia promessa, lieto se potrò facendolo, aggiungere un sassolino alla mole maestosa della geologia italiana.

I.

I diaspri si presentano in Toscana nei diversi piani geologici in masse stratificate formate da sottili filari, ciascuno di questi raramente superando i cinque centimetri (il più grosso filare di diaspro di nove centimetri l'ho riscontrato in un frammento erratico dell'Arno), separati da straterelli di materiali incoerenti, da strati di galestro e da strati di roccie siliceo-calcaree; generalmente dove i diaspri si presentano in

grandi masse è notevole la uniforme grossezza dei filari, mentre è rarissimo che sieno i diversi filari composti di una roccia uniforme, riscontrandosi facilmente in essi e sovente senza ordine alcuno, tutte le durezze possibili, dal diaspro compatto a frattura vetrosa e lucente fino al galestro a sfoglie, friabile e che si riduce prestissimo, prima in minute scaglie e poi in una poltiglia uniforme sotto l'azione degli agenti atmosferici.

Nè meno differente è la potenza di questi strati; a luoghi, essa si riduce a pochi filari intercalati nella massa dei galestri; in altri i numerosi filari formano banchi di una potenza rispettabile fino a raggiungere lo spessore di parecchie decine di metri.

Il colore è pure vario, ordinariamente è rosso, e si trovano in questo tuono di colore dovuto principalmente all'ossido di ferro, tutte le gradazioni possibili; per la quantità vengono in seconda riga i diaspri verdi, poi i bruni, gialli, violetti, bianchi e grigi; qualchevolta uno stesso filare è varicolore, ed in questi casi il colore rosso o scuro è alla superficie degli strati, mentre i colori chiari si trovano nell'interno.

Qualunque sia il diaspro che si esamina esso può rendersi sempre trasparente ridotto in lamelle di mediocre grossezza, e rari sono quelli che non cominciano a lasciar passare i raggi luminosi ridotti allo spessore di due decimi di millimetro; ridotti alla sottigliezza conveniente per l'esame microscopico cioè inferiore ad un decimo di millimetro, offrono apparenze diverse a seconda del loro colore originale.

I diaspri rossi risultano ordinariamente da un impasto di nuclei trasparenti di radiolarie, i quali sono anche visibili ad occhio nudo, contro luce, sulla superficie levigata del diaspro, offrendosi sotto l'apparenza di punti lucenti più chiari, attesa la loro maggior durezza, che li rende più resistenti e li conserva lungo gli orli delle lamelle microscopiche, quando per la sottigliezza di queste cominciano consumandosi a ridursi in superficie sotto l'azione logoratrice della ruota sulla quale vengono preparate. La pasta colorata nella quale sono immersi gli avanzi fossili è costituita da un miscuglio di silice amorfa e cristallizzata, cosparsa di minute particelle irregolari di ossidi metallici, che a volte riempiono l'interno degli avanzi fossili, i quali costituiscono la massa principale dei diaspri; quando questi stessi avanzi non sono riconoscibili o sono ridotti a macchie chiare rotonde o irregolari, l'intera massa è un impasto di silice amorfa, di silice cristallizzata e di minute particelle ocracee e cristalline spesso nettamente distinte: sotto il microscopio polarizzante si rende evidente questa struttura per il pleocroismo delle parti trasparenti, nelle quali ordinariamente si manifesta a fasci o a zone di colori diversi; le parti invece ove più abbondano i frammenti ocracei seguono, senza colorazione alcuna, la regolare variazione della luce per la diversa posizione dei due nicol, quasichè queste stesse sostanze avessero impedito alla silice di cristallizzare, o meglio stieno a rappresentare, con la parte silicea nella quale sono immersi, tutto quel primitivo detrito che si doveva raccogliere unitamente agli scheletri delle radiolarie quando queste si depositavano lentamente nelle profondità del mare; la parte cristallizzata invece, evidente nell'interno delle radiolarie, anche per le sottili strie che presenta al microscopio (vedi fig. 6) indipendentemente dal pleocroismo con la luce polarizzata, e nelle parti più trasparenti della massa del diaspro, rappresenta il resultato di un'azione posteriore dovuta a quel metamorfismo lento che è frutto del tempo, delle complicate azioni dell'acque, della

temperatura, della pressione e di tutte quelle cause che hanno modificato e continuamente modificano le roccie della scorza terrestre.

Che poi gli ossidi metallici che colorano i diaspri rossi sieno semplicemente mescolati nella massa silicea, risulta anche dal fatto della completa decolorazione dei diaspri per l'azione dell'acido cloridrico; anzi decolorati che sieno presentano un' apparenza che è di molto aiuto a spiegare l'abbondanza di forme fossili nei diaspri rossi in paragone di quella dei diaspri bianchi o verdi.

Tagliata in due una stessa lamella di diaspro e sottopostane una parte all'azione dell'acido cloridrico fino a completa decolorazione, fu perduta nella medesima ogni traccia definita di fossili, rimanendo al loro posto macchie trasparenti, rotonde e spesso indeterminate sugli orli, mentre l'altra offriva le solite forme eleganti e nettamente determinate delle radiolarie; questo fatto non ammette altra spiegazione che quella accennata poco più sopra circa alla miscela della silice cristallizzata con quella amorfa nei diaspri, anzi posso ora aggiungere che sono precisamente gli ossidi metallici che delimitano e rendono discernibile quelle parti dei nuclei delle radiolarie tuttora conservati. Non tutti i diaspri rossi sono egualmente ricchi di fossili, nè questi sono egualmente in tutti ben conservati; ordinariamente è nei diaspri più compatti e più uniformi che gli avanzi delle radiolarie conservano la precisione dei contorni anche con ingrandimenti forti, mentre sono sempre incerti e confusi nei diaspri poco compatti o minutamente attraversati da vene di quarzo o in quelli a frattura vetrosa; in quella varietà poi che prende il nome generico di ftanite, nelle poche che ho esaminato, non ho mai trovato traccie evidenti di avanzi fossili; questi avanzi sono poi meglio conservati nei diaspri eocenici che in quelli cretacei o liassici, quasichè il tempo abbia concorso alla loro distruzione; sono poi sempre poverissimi o ne mancano affatto quei diaspri ricchi di concrezioni cristallizzate di silice o attraversati fittamente da screpolature ripiene sempre di silice cristallizzata.

È molto probabile che con i diaspri dovessero coabitare le diatomèe, io però non sono riuscito a distinguere nessuna forma riferibile a quelle, il che potrebbe dipendere dalle stesse cause che hanno logorato gli avanzi delle radiolarie.

Mi sono lungamente fermato su i diaspri colorati in rosso perchè è dai medesimi che ho tratto le diverse forme fossili che più in là dovrò descrivere, non per questo lascerò di dire qualchecosa dei diaspri di altro colore. I diaspri verdi, bianchi o grigi presentano ordinariamente una pasta omogenea cosparsa di minuti cristallini colorati o trasparenti, offrendo qua e là e anche molto riavvicinate tra loro delle macchie rotonde o irregolari, trasparenti; in altre parole offrono la stessa apparenza dei diaspri rossi decolorati dagli acidi; laonde la mancanza in essi di resti ben definiti di radiolarie deve attribuirsi alla deficienza della parte colorante che li delimita in tutti quelli fortemente colorati; solo un diaspro grigio scuro eocenico mi ha fornito una serie di forme ben determinate.

In tutti i diaspri che hanno conservato le impronte dei fossili occorre sempre per poterle avere più nette, tagliarli secondo il piano di stratificazione o secondo un piano a quello perpendicolare; essendo però abbondanti gli avanzi riferibili alla forma scheletrica delle Discidi, sono sempre più ricche le sezioni parallele di quelle perpendicolari al piano di stratificazione ; per contro in queste ultime abbondano

le sezioni delle spicule delle Acanthometre, rare sempre nelle sezioni parallele. I diaspri, anche i più omogenei ed uniformi, presentano sempre delle fenditure ripiene di silice cristallizzata; queste possono avere tutte le direzioni, ma è però prevalente la direzione perpendicolare a quella di stratificazione; le diverse fenditure s'intrecciano sovente sotto angoli diversissimi; queste fenditure sono poi avvenute in epoche differenti ed è rarissimo che quando due di esse s'incontrano non vi sia un salto per una di loro, ripetendo in piccolo ciò che accade nei piani di stratificazione rispetto alle linee di rottura degli strati, o fra due qualunque di queste linee non contemporanee.

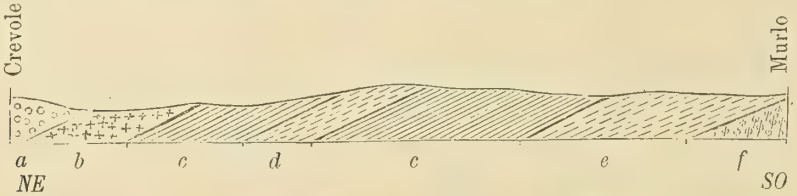
Il fatto poi che i diaspri omogenei e compatti sieno anche i più ricchi di avanzi ben conservati di radiolarie risulta da una osservazione secondaria; avendo avuto occasione di preparare molte sezioni in diaspri provenienti da ghiaie plioceniche e poscia rotolate nell'Arno, ho sempre riscontrato in questi forme nitide e distinte; ora è evidente che solo i più compatti ed omogenei potevano resistere all'azione logorante delle acque, conservarsi nelle ghiaie plioceniche e percorrere lunghi tratti per i torrenti ed i fiumi che li hanno strappati e al primitivo loro posto e dai depositi successivi.

II.

I diaspri che ho sottoposto all'esame microscopico provengono da varie località della Toscana e da differenti piani geologici, e sono dell'eocene superiore, della creta e del lias superiore; nella descrizione delle località dalle quali ho tratto i diaspri che ho studiato progredirò in ordine inverso alla loro età.

Al di sopra degli strati eocenici così sviluppati in Toscana non riscontransi diaspri di sorta, e nell'eocene sono di preferenza nei piani superiori, intercalati in quelle masse di argille indurite chiamate in Toscana galestri, i quali, se dell'eocene superiore, hanno l'equivalente nelle argille scagliose della parte settentrionale dell'Apennino. Molte volte sono prossimi ai serpentini; che io sappia non se ne trovano nella massa degli strati inferiori dell'eocene stesso, costantemente rappresentato da arenarie.

Diaspri di Crevole. — Di questi diaspri e della località dove essi si trovano ebbe a parlare Lotti in una breve Memoria inserita nel Bollettino del r. Comitato geologico (*Una sezione geol. attrav. il monte Murlo* 1878 n. 1, 2). Nella sezione unita a questo lavoro non figura che una parte della località nella quale ho raccolto i diaspri che ho esaminato, trovandosi questi più che altro tra Murlo e Crevole,



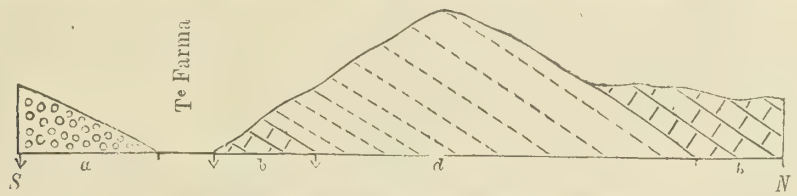
a Serpentino - *b* Gabbro rosso - *c* Galestro - *d* Diaspri - *e* Diaspri e Ftaniti - *f* Diabase.

dove la successione degli strati avviene nell'ordine seguente: diabase di Murlo, ftaniti e diaspri (gli stessi del taglio figurato dal Lotti pag. 31 loc. cit.), galestri, diaspri, galestri, gabbri rossi, serpentini di Crevole, come può vedersi dal qui unito disegno.

In questa località, come in tutte le altre che ho potuto esaminare, non tutti i diaspri contengono resti fossili evidenti; sono ordinariamente quelli compatti a frattura lucente i più ricchi, e per quanto i diaspri di Crevole, quelli provenienti dagli strati segnati con lettera *d* nell'annessa figura, mi abbiano fornito molte specie, essi non rappresentano che una piccola parte della potente formazione silicea di ftaniti, galestri e diaspri compresa in questa regione. Come è solito, i diaspri si presentano in straterelli di pochi centimetri, divisi tra loro da sfoglie di galestro; sono variamente colorati dal bianco latte al bruno, a frattura opaca o lucente e attraversati da sottili vene di quarzo.

Alla stessa formazione di Crevole appartengono alcuni diaspri raccolti lungo la Merse a Tocchi, località del versante opposto a quello di Crevole.

Diaspri di Pietra. — Lungo la Farma nel comune di Chiusdino nei terreni della fattoria di Luriano (1) trovasi una delle più belle formazioni di diaspro dell'eocene superiore; i diaspri compariscono a un tratto in mezzo agli alberesi eocenici, i quali sono qua e là intercalati da galestri; la maggior potenza di questi strati è sulla riva sinistra della Farma rimpetto alla foce del Bardellone; si estendono per circa un chilometro tra i due torrenti Vallone e Rimondacci e si alzano sul livello della Farma in dirupi oltremodo pittoreschi per circa una ottantina di metri; sulla destra della Farma compariscono per poco in un dirupo sulla sinistra del Bardellone, mentre il dirupo di fronte a questo è costituito da roccie serpentinose, nella parte inferiore di serpentino fibroso, nella superiore di eufotide diallagica; strati d'alberese e di argilla azzurrognola sono intercalati tra i diaspri ed i serpentini.



a Serpentino (Eufotide) - *b* alberese - *d* diaspri

La successione degli strati molto evidente in questa località, avviene nel modo seguente dagli strati più antichi ai più recenti (fig. annessa). Serpentino ed eufotide, alberese ed argille, diaspro sino al sommo della collina e solo nel versante opposto, i diaspri su i lati sono ricoperti da un mantello d'alberese.

Qui i galestri e le ftaniti sono ridotti a straterelli sottilissimi tra i diaspri, e tutta questa immensa massa è formata prevalentemente da diaspri di colore variabile dal rosso acceso al rosso cupo; solo nella sommità si trova qualche strato di diaspro verde; i diaspri non sono che raramente attraversati da fenditure ripiene di quarzo trasparente, anzi in questa località le fenditure sono spesso ripiene di silice dello stesso colore del diaspro. Un esemplare a frattura opaca, impasto fittissimo di

(1) Se ho potuto studiare con cura questa località difficilmente accessibile, devo ringraziarne il march. Bonaventura Chigi, che oltre ad avermene procurato i diaspri, mi offrì alla fattoria di Luriano sua proprietà, cortese ospitalità, guide e mezzi di trasporto attraverso le macchie estesissime di quel luogo.

radiolarie, mi ha dato i seguenti resultati saggiato chimicamente: trattato con acido cloridrico a caldo, perdè in peso l'uno e mezzo per cento, decolorandosi completamente e lasciando un residuo di pura silice; la parte sciolta nell'acido conteneva molto ferro e traccie di manganese, calce, magnesia ed acido fosforico; non potei ottenere dal medesimo nessuna traccia di allumina.

Per la maggior parte questi diaspri sono compatti, a frattura lucente; ed anche in quelli a frattura opaca ho sempre riscontrato una estrema ricchezza di fossili, il che non mi è accaduto che assai raramente nei diaspri di altre località. La massa intera dei diaspri è rotta secondo piani perpendicolari a quelli di stratificazione, e queste rotture hanno lasciato isolate delle masse colonnari, hanno prodotto delle pareti verticali così pittoresche da risvegliare l'idea di un fantastico castello diruto; somiglianza che è singolarmente aiutata dal colore stesso della roccia e dai piani di stratificazione, ripetendo una disposizione già per altri diaspri osservata da Savi (*Delle masse ofiol. tosc.* N. giorn. lett. toscan. vol. XXXVII. pag. 133) cioè « quella di una gran muraglia messa a secco ».

Diaspri del Romito. — Alla base della collina del Romito, per la strada che lungo mare conduce da Livorno in val di Cecina, nella insenatura che si trova prima di giungere al promontorio del Romito e precisamente poco prima e poco dopo il ponte dalla parte di Livorno, trovasi in relazione coi serpentini uno strato di diaspro variamente colorato in rosso cupo e in verde; questo non è molto ricco di fossili, nonostante mi ha fornito alcune specie comuni a quelli che meglio hanno conservato le traccie degli organismi che li hanno prodotti.

Diaspri di Monte Vaso e Badia. — Nella potente massa serpentinosa di Monte Vaso (provincia di Pisa) si trovano strati di diaspro uniti a manganite; poco ricchi di fossili ho però anche in essi costatato la presenza delle radiolarie.

A questa località va aggiunta quella prossima di Terriccio, dove il D'Achiardi (Proc. verb. soc. tosc. di s. n. pag. 57, adun. del 9 maggio 1880) raccolse dei diaspri intercalati ai gabbri, e i diaspri si mostrarono al solito zeppi di avanzi di radiolarie, le cui forme saranno con le altre a suo tempo citate.

Diaspri dell'Elba.—Un diaspro dell'Elba, della collina di Forte Falcone, conservato nel Museo di Pisa è stato da me sezionato con i soliti resultati. Come è noto anche questi diaspri sono in relazione coi serpentini.

Diaspri erratici. — Con questo nome indicherò tutte le sezioni provenienti da ciottoli raccolti nel greto dell'Arno presso Empoli o nelle ghiaie quaternarie di Limite portati principalmente dal torrente Pesa. Questi diaspri, che non ho potuto trascurare per la squisita conservazione degli avanzi fossili che contengono, furono da me esaminati prima di conoscerne la esatta provenienza; procuratimi dal mio ottimo amico e collega prof. Cecchi, ritenni che potessero provenire dal monte di Pietra Marina, e fu solo dopo tre giorni di assidue e costanti ricerche che potei accertarmi della loro derivazione dalle ghiaie plioceniche delle colline lungo la riva destra dell'Arno sopra Empoli e da quelle ove scorre la Pesa. La costanza delle specie e l'averle ritrovate quasi tutte anche nei diaspri di Crevole e di Pietra non mi lascia alcun dubbio sulla loro epoca, tanto più che se oggi il corso della Pesa, meno che verso le sue origini, è tutto nel pliocene, le colline plioceniche dalla medesima attraversate sono

indubbiamente formate a spese dei terreni eocenici del Chianti e degli ultimi contrafforti dell'Apennino toscano.

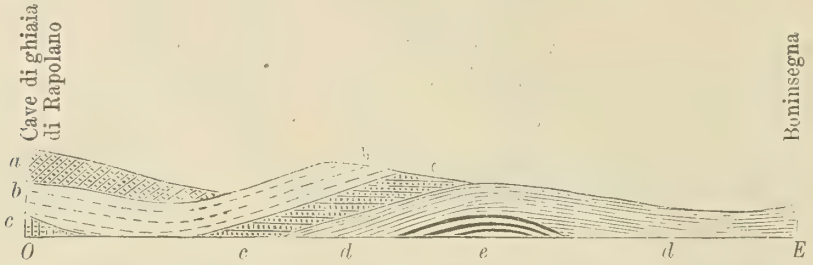
Diaspri cretacei. — Sono classici tra questi i diaspri di Barga e di Monte Fegatese nella provincia di Lucca; adoperati come pietra da decorazione; sono pure di questa epoca i diaspri di S. Gusmè e di Brolio in Chianti (provincia di Siena); in ambedue i casi, sottoposti al nummulitico, sono associati a strati di manganese e a calcari a fucoidi ricchi di foraminifere: per quanto però io abbia cercato nelle poche sezioni che ho potuto raccogliere, non mi è ancora occorso di riscontrare nei medesimi avanzi fossili evidenti; tutti i campioni di diaspro di queste località che ho avuto tra mano sono sempre fittamente spaccati, e le spaccature, spesso molto larghe, sono ripiene di quarzo e anche di silice amorfa, come ebbi ad osservare nella sezione di un diaspro di Barga, preparato nel Museo di Pisa, il quale non offriva sulle parti trasparenti alcun pleocroismo al microscopio polarizzante; e che a questo profondo metamorfismo debba accagionarsi la scomparsa dei resti fossili, lo deduco non tanto dalla loro struttura quanto dall'avere osservato una simile alterazione in molti diaspri eocenici e in quelli specialmente del lias superiore; così io credo che, se non ho ancora trovato fossili che in un solo esemplare di diaspri cretacei, ciò dipenda più che altro dal piccolo numero dei medesimi che ho avuto a mia disposizione, e dal non essermi ancora imbattuto in strati dove questi sieno in modo migliore conservati. Solo in un diaspro di Castiglione (Garfagnana), fornitomi da De Stefani e dal medesimo ritenuto per cretaceo, avrei trovato avanzi certi di radiolarie e non comuni con quelli dei diaspri di altre località.

Diaspri liassici. — I diaspri di questa epoca li ho tratti nel maggior numero da Rapolano, ed il loro massimo sviluppo è manifesto in un taglio a poca distanza da questo paese, ove vengono estratti ad uso di breccia per il servizio della ferrovia. La formazione diasprina è in questa località molto estesa, si ritrova in tutti i poggi che sono al sud-est di Rapolano e si estende lungo il piano del Sentino fin presso a Lucignano. Quelli che ho studiato provengono da Rapolano e dal Poggio S. Cecilia; formano due grandi banchi, separati da un calcare rosso siliceo ricco di globigerine e nel quale ho riconosciuto una sezione di Actinomma, unica radiolaria rinvenuta da me nei calcari; gli strati inferiori sono prevalentemente galestrini, o meglio sono formati da galestri, ai quali sono associati strati di diaspro e di manganese, e le cave di quest'ultimo minerale pochi anni indietro coltivate con buon esito, sono state da poco definitivamente abbandonate perchè gli strati, una volta ricchissimi in manganese, tendevano a trasformarsi in puro diaspro.

Dove abbonda il manganese, i diaspri sono ordinariamente neri o verdi, a frattura vetrosa, ricchi sempre di numerose se non ben definite forme di fossili. Negli strati superiori, dove manca il manganese, sono rossi o chiari e nella successione dei soliti filari offrono tutte le durezze possibili e tutte le gradazioni dal galestro polveroso ed untuoso al diaspro durissimo e compatto. Nelle cave di ghiaia lo strato dei diaspri ha la potenza di venticinque metri.

L'unita sezione rende ragione della successione degli strati in questa località. I due strati di diaspro, separati da un calcare rosso a globigerine, sono sottoposti ad un calcare giallo con aptici, e sono sovrapposti ad un calcare a selce che

ho riferito al lias medio, contenendo, in località prossime a questa e nelle quali è sempre sottoposta ai galestri, l'*Ammonites algovianus* Op. ed altre specie del lias medio.



Lias superiore; *a* Calcare con aptici - *b* Diaspri e galestri - *c* Calcare rosso a globigerine - *d* Galestri, diaspri e manganese.
Lias medio; *e* Calcare con selce.

Diaspri nel lias superiore si trovano anche a Chianciano, Cetona e Sarteano, nei monti pisani a Corliano; io però ho solo potuto esaminare un esemplare di quest'ultima località.

III.

La determinazione delle specie non è facile, e occorre tener presente che le sole sezioni è ciò che può studiarsi delle medesime. Ora, nei rizopodi di questa classe, forme diverse possono presentare sezioni eguali o poco differenti, risiedendo i caratteri principali o nella porzione esterna dello scheletro o nelle spicule esterne che lo accompagnano e sovente da sole lo costituiscono, le quali per essere indipendenti fra loro, si rendono libere con la distruzione della massa sarcodica dell'animale.

Per istituire qualche confronto io mi sono procurato dei tripoli a radiolarie dei terreni miocenici della Calabria e della Sicilia e particolarmente della classica località di Grotte (Girgenti); in questi, mentre sono benissimo conservati gli avanzi solidi delle radiolarie a scheletro integro, per quelle a scheletro radiato o tangenziale non si trovano che frammenti di spine, che possono attestare la presenza della famiglia a cui appartengono, ma che malamente servono alla determinazione della specie; in generale le radiolarie dei tripoli sono libere tra loro, facilmente isolabili e perfettamente conservate, per modo che si può con la stessa facilità delle viventi studiare le condizioni dei loro scheletri; nei diaspri invece la superficie esterna si confonde con la massa della roccia e subisce una specie di soluzione nel diaspro circostante, in modo che molte volte, e specialmente nei diaspri più antichi, tutto si riduce ad una massecola rotonda nella quale sono sparite affatto le eleganti forme di questa classe di rizopodi.

Per queste ragioni io sono andato molto a rilento nella determinazione delle specie, ed in alcuni casi mi sono limitato ad assegnare solo il genere al quale ho creduto riferirle.

Nonostante questa difficoltà, alcune delle forme studiate non parendomi anche lontanamente rientrare nelle forme conosciute, ho proposto nuovi nomi generici; per ciascuno di essi dirò le ragioni parlandone a suo tempo, solo qui avvertirò che ho ricorso a questa necessità quando le forme che dovevo studiare erano molto comuni

e tali che potranno essere facilmente rinvenute da chi vorrà seguitarmi nei miei studî : quelle forme poi, uniche o molto rare, che non rientravano in altre già conosciute, ho preferito lasciarle nella indeterminazione, limitandomi a figurarle e descriverle il meglio che ho potuto e saputo.

Nelle brevi diagnosi che seguiranno ho cercato di tradurre più davvicino che fosse possibile le frasi usate da Ehrenberg e da Haeckel, mancandomi qualunque modello italiano per la nomenclatura delle diverse parti di queste forme animali.

Per la classificazione ho seguìto quella indicata da Hertwig, *Der Organismus der Radiolarien*, Jena 1879, che meglio si presentava per l'ordine delle forme che avevo da studiare.

De' sei sottordini di Hertwig, i tre primi, cioè *Thalassicollidae*, *Tripylaee*, e *Sphaerozoae* non sono rappresentati tra le specie seguenti, e le ragioni facilmente intenderanno coloro cui sono noti i caratteri delle famiglie nei medesimi riunite.

Prima di procedere alla descrizione delle specie, dirò qualchecosa del criterio che mi sono dovuto formare per una conveniente interpretazione delle sezioni. Le radiolarie dovevano depositarsi in un fondo fangoso, il detrito loro e degli altri organismi che con esse vivevano ha dovuto circondarle nel fondo dei mari ; questo detrito, meno rari casi, non è penetrato nel loro interno, ed ha solo riempiuto parte dei fori superficiali quando questi erano imbutiformi ; la silice è poi successivamente penetrata nelle cavità rimanenti, conservando queste parti trasparenti. Si ha quindi nelle sezioni una specie di negativa dello scheletro delle radiolarie, dove per quelle prive di grandi aperture o di grandi pori superficiali, le cavità esterne sono rappresentate dal detrito che le ha colmate e le cavità interne sono trasparenti ; così le *Ethmosphaeridae* compariranno coperte di punti rotondi rappresentanti i pori ; le *Cirtydae*, ad apertura dilatata o a grandi maglie superficiali, saranno ripiene di detrito e le *Disphaeridae* conserveranno solo il nucleo centrale trasparente, il detrito avendo riempito lo spazio tra le due capsule. In questo modo io intendo avvenuta la consolidazione del fango siliceo e con essa la conservazione delle radiolarie.

Le misure delle specie sono espresse in millimetri.

Classe. Rizopodi. — Ordine. Radiolarie.

Sottordine. PERIPYLAEE Hert.

Fam. **Ethmosphaeridae.** Haeck.

1. Ethmosphaera minuta nov. sp. fig. 1, 2.

Sezione circolare dentata nel margine interno o presentante nella parte centrale una serie di piccole maglie rotonde disposte prossimamente secondo i vertici di un reticolato esagonale.

Diametro 0,09. Diametro dei fori 0,005. Numero dei fori nella sezione meridiana 18-20.

Loc. Diaspro rosso cretaceo di Garfagnana (Castiglioni). È specie assai comune, anzi è la sola riconoscibile nelle sezioni praticate nel diaspro citato.

La forma dentata dei margini rappresentando la sezione delle cavità imbutiformi dei fori ed uno scheletro spesso, mi ha indicato di riferire questa forma e le due seguenti al genere *Ethmosphaera* di Haeckel.

2. Ethmosphaera vulgaris nov. sp. fig. 3, 4, 5, 6. Differisce dalla precedente per le dimensioni costantemente maggiori.

Diametro 0,2. 0,24. Diametro dei fori 0,008. Numero dei fori nella sezione meridiana 20-24.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole, Monte Vaso, Forte Falcone, Pietra, Terriccio, erratici di Limite e liassici di Rapolano. È specie assai comune, una delle più comuni in tutte le sezioni ricche di avanzi fossili dei diaspri eocenici; in alcune sezioni presenta nell'interno sempre trasparente (fig. 5), una fina granulazione a contorno poligonale curvilineo concavo irregolare; questa apparenza, essendo comune con altre forme a nucleo trasparente, reputo che dipenda da una accidentalità del riempimento siliceo del guscio della radiolaria. La fig. 6, rappresenta la stessa forma dove nell'interno sono visibili, leggermente forzate nel disegno, le linee di cristallizzazione del quarzo.

3. Ethmosphaera siphonophorites nov. sp. fig. 7.

Differisce dalle precedenti per le dimensioni e specialmente per il numero minore e il diametro maggiore dei fori.

Diametro 0,25. Diametro dei fori 0,01. Numero dei fori nella sezione meridiana 12-14.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra; rara.

Ho inteso col nome *siphonophorites* riavvicinarla alla *E. siphonophora* Haeck., dalla quale differisce per le dimensioni, mentre vi si accosta per il numero e la disposizione dei fori.

Di questo genere di Haeckel non si conosce che una sola specie; vivente.

4. Heliosphaera echinoidites nov. sp. fig. 8.

Sezione circolare a maglie esagonali.

Diametro 0,18. Diametro delle maglie 0,015. Numero delle maglie nella sezione meridiana 12-14.

Loc. Diaspri eocenici erratici d'Arno; rara.

Differisce dalla *H. echinoides* Haeck. per le maggiori dimensioni e per la maggior larghezza nelle pareti divisorie delle maglie.

Si conoscono di questo genere sei specie, cinque viventi ed una fossile di Grotte (Stöhr).

Fam. **Cladococcidae** Haeck.

5. Raphidococcus Lurianensis nov. sp. fig. 9.

Sezione subrotonda dalla quale si diramano spine numerose di varia lunghezza.

Diametro del nucleo 0,12. 0,14. Lunghezza massima tra le estremità delle spine 0,35.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra (Luriano); rara.

Tre sole specie conosciute di *Raphidococcus* e tutte viventi.

Fam. **Ommatidae** Haeck.

6. Heliodiscus simplex nov. sp. fig. 11.

Sezione circolare con otto corte spine disposte regolarmente; nell'interno si scorge un anello, concentrico alla sezione, opaco, interrotto.

Diametro 0,1.

Loc. Diaspri del lias superiore di Rapolano.

Ho riferito questa sezione al genere *Heliodiscus* non tanto per le spine esterne quanto per il nucleo centrale; è da notarsi che le spine di questo genere variano nelle specie conosciute tra 12 e 24, per conseguenza l'*H. simplex* rappresenterebbe un minimo nel numero delle spine rispetto alle altre specie.

Se ne conoscono sei specie, delle quali due viventi e quattro fossili.

Actinomma ..... sp. fig. 12, 13, 14, 15, 16, 20. Riferisco le sezioni figurate e molte simili al genere *Actinomma* Haeck.; diecinove specie sono conosciute di questo genere, delle quale cinque sole sono viventi.

Fig. 12 *Actinomma* A. Sezione a forma di croce, a braccia sottili, a breve nucleo centrale trasparente che attraversa un disco opaco, i cui margini sembrano oscuramente dentati.

Larghezza tra le estremità delle spine 0,4. Diametro del margine esterno 0,2. Diametro del nucleo centrale 0,04.

Loc. Diaspri eocenici erratici d'Arno.

Una sezione schematica simile a questa dell'*A. asteracanthion* Haeck. è figurata da Hertwig (*Der. Org. d. Rad.* 1879) a tav. IV. fig. 4.

Fig. 13. *Actinomma* B. Sezione a forma di croce, a bracci sottili, con nucleo centrale quadrangolare a lati concavi.

Larghezza tra le estremità delle spicule 0,4. Diametro del nucleo centrale 0,06.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole, Pietra, Romito, Terriccio ed erratici d'Arno; diaspri e calcari liassici di Rapolano.

Nella forma figurata, che proviene da un diaspro erratico d'Arno, si scorge una traccia di pori in serie parallela ai margini del nucleo e delle spine; è forse questa una apparenza casuale. La specie probabilmente è la stessa della precedente.

Fig. 14. *Actinomma* C. Sezione a forma di croce, con nucleo quadrangolare a margine dentato.

Larghezza tra le estremità delle spicule 0,38. Diametro del nucleo centrale 0,09.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra ed erratici di Limite; comune. È una forma assai comune e forse rappresenta una specie distinta dalle due precedenti.

Fig. 15. *Actinomma* D. Sezione a forma di croce, con nucleo centrale circolare, nel quale i pori sono distribuiti regolarmente secondo i vertici di un reticolato esagonale.

Larghezza tra le estremità delle spicule 0,4. Diam. del nucleo centrale 0,07.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole.

Fig. 16. *Actinomma* E. Sezione circolare a margini dentati, con tre forti spine disposte simmetricamente secondo i vertici di un triangolo equilatero.

Diametro del nucleo 0,16. Lunghezza delle spine 0,07.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra, Crevole, ed erratici d'Arno.

Una figura, il contorno, simile a questa e data da Stöhr (*Die Radiolarienfauna der Tripoli von Grotte* 1880), per l'*A. exactis*. tav. II. fig. 7, e da Ehrenberg (Fortsetzung der Mikr. Abhand. Berl. Akad. 1875) tav. XXVIII. pag. 4.

Fig. 20. *Actinomma* F. Sezione circolare con nucleo centrale circolare trasparente; la parte interna opaca è ottagonale; i margini sembrano lievemente dentati.

Diametro 0,32.^{mm} Diametro del nucleo centrale 0,073.

Loc. Diaspri eocenici erratici d'Arno.

È certamente una *Disphaerida*, potrebbe però anche essere di una famiglia diversa da quella indicata.

È a notarsi che tutte queste forme indicate sotto il nome generico di *Actinomma*, sono tutte assai più grandi di quelle conosciute sì viventi che fossili; in fatti la specie più grande sarebbe l'*A. drymoides* Haec. che ha la larghezza tra le spicule di 0,37. Mentre le forme da me indicate raggiungono per la stessa dimensione la lunghezza 0,4. E ciò senza tener conto che le misure da me prese sono sempre per difetto, non essendo facile di determinare il punto preciso del termine delle spine.

Fam. **Discidae** Haeck.

7. Histiastrum? Lurianensis nov. sp. fig. 17.

Sezione a forma di croce nucleata; le quattro braccia sono in direzioni ortogonali, e la loro larghezza subisce un ristringimento in prossimità del nucleo centrale: i fori sono irregolarmente distribuiti nel nucleo e nelle quattro appendici.

Lunghezza tra le due estremità delle braccia 0,25. Diametro del nucleo centrale 0,07. Larghezza massima delle braccia 0,05. Larghezza minima 0,03.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra: rara.

Sembra affine all'*H. quaternarium* Ehr. (Fortz. d. Mikrog. Abhand. Berl. Akad. 1875 tav. XXIV.).

Sono conosciute due specie fossili di Barbados.

8. Trematodiscus soritoides nov. sp. fig. 18.

Sezione circolare con sette giri concentrici di eguale larghezza; la superficie è coperta di minuti fori che si palesano secondo altrettante interruzioni negli anelli oscuri concentrici.

Diametro 0,124.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra.

È specie affine al *T. Sorites* Haeck. (*Die Rad.*) pag. 492 tav. XXIV. fig. 2.

I *Trematodiscus* conosciuti sono sette; tre viventi, due fossili e due viventi e fossili.

9. Euchitonia Muellerites nov. sp. fig. 21.

Sezione triloba, estremità dei lobi circolare, riuniti con una lieve strozzatura alla parte centrale: superficie cosparsa di fori irregolarmente.

Lunghezza compresa tra l'estremità di un braccio e la tangente agli altri due 0,28.

Loc. Diaspri eocenici Pietra, Terriccio; rara.

10. Euchitonia amoena nov. sp. fig. 23.

Sezione triradiata con nucleo centrale; i fori sono disposti in serie circolare nel nucleo e prossimamente in serie parallele alla lunghezza nelle braccia, due delle quali sono tra loro riavvicinate; le tre braccia terminano bruscamente senza traccia di lobo terminale.

Lunghezza compresa tra l'estremità del braccio dispari e la tangente all'estremità delle braccia pari, 0,48.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra, Crevole ed erratici di Limite. Una sezione simile senza traccia di fori e completamente trasparente, diaspri liassici di Rapolano.

11. Euchitonia clathrata nov. sp. fig. 22.

Sezione triradiata con nucleo centrale: le braccia crescono di larghezza dal nucleo alle estremità ove terminano bruscamente; i fori, assai marcati, sono disposti in serie parallele alla lunghezza delle braccia.

Lunghezza presa dall'estremità del braccio impari alla tangente all'estremità delle braccia pari, 0,29.

Loc. Diaspri eocenici erratici di Limite.

12. Euchitonia Crevolensis nov. sp. fig. 25.

Sezione triradiata, le tre braccia si riuniscono senza traccia di nucleo centrale e terminano con una specie d'ingrossamento; i fori sono disposti in serie parallele alla lunghezza dei bracci, due pari ed uno impari.

Lunghezza presa dall'estremità del braccio impari alla tangente all'estremità delle braccia pari, 0,61. Larghezza delle braccia 0,04.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole ed erratici di Limite; comune.

13. Euchitonia grandis nov. sp. fig. 24.

Sezione triradiata, le tre braccia terminano con lobi circolari e si riuniscono sotto un angolo netto senza traccia di nucleo centrale; le braccia presentano nella parte centrale una linea oscura; manca qualunque traccia di fori lungo le tre braccia, solo ne appare una traccia confusa nei lobi estremi.

Lunghezza presa dall'estremità del braccio dispari alla tangente all'estremità delle braccia pari, 0,84. Larghezza delle braccia 0,04.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra, Terriccio; rara.

È notevole in questa forma e nella precedente l'assenza del nucleo centrale, e questa particolarità potrebbe essere una distinzione per un nuovo genere nella tribù delle *Euchitonidae*.

14. Euchitonia dubia nov. sp. fig. 26.

Sezione triangolare a lati concavi, coperta da fori regolarmente disposti secondo un reticolato esagonale.

Lunghezza dall'estremità di un braccio alla tangente delle altre due 0,2.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra; unica.

È proprio un'*Euchitonia*? sono assai incerto su questa determinazione ed è solo per non lasciare in disparte questa forma facilmente riconoscibile, e che è nella sezione abbastanza netta, che mi sono deciso a collocarla provvisoriamente in questo genere.

Riunendo al genere *Euchitonia* i generi affini *Rhophalastrum* e *Stylactis*, il numero delle specie conosciute ascende a quindici, delle quali tre sono fossili e tre sono a un tempo viventi e fossili.

Fam. **Spongodiscidae** Haeck.

Spongodiscus sp. fig. 19.

Riferisco a questo genere alcune forme che presentano anche nei diaspri più

trasparenti, una sezione circolare granulata a grani aghiformi irregolari; queste forme, essendo meno comuni nelle sezioni perpendicolari al piano di stratificazione, trovo in questo fatto l'argomento migliore per riunirle al genere suddetto: è probabile che in queste sezioni opache molto comuni si nascondano specie assai diverse.

Diametro 0,14. 0,2.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole, Pietra, Romito, Forte Falcone, Montevaso, Badia, Pieve a Tocchi, ed erratici di Limite; diaspri liasici di Rapolano e Corliano.

Sottordine. — MONOPYLAEE Hert.

Fam. **Achantodesmidae** Haeck.

15. Lithocircus Haeckeli nov. sp. fig. 41, 42.

Sezione annulare, con solchi radiali e traccie di spinule esterne.

Diametro 0,3. Larghezza dell'anello 0,025.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole, Pietra, Terriccio ed erratici d'Arno: comune.

L'interno dell'anello è sempre opaco, e l'unico caso, figurato, fig. 32, nel quale è trasparente presenta nell'interno dei corpicciuoli rotondi evidentemente estranei alla specie principale, d'altra parte quest'unico caso proviene da un diaspro grigio quasi incoloro; queste apparenze costanti accennano con sufficiente chiarezza la forma cricoidica dello scheletro e per conseguenza determinano la sua posizione genèrica.

È una delle forme più esattamente conservate che io abbia rinvenuto, e quando presentai le mie prime sezioni alla Società toscana di scienze naturali, fu questa la prima che feci osservare, onde non restasse dubbio negli intervenuti sulla presenza delle radiolarie fossili nei diaspri.

16. Lithocircus truncatus nov. sp. fig. 43.

Sezione annulare troncata secondo due linee parallele, solchi radiali minuti.

Diametro 0,25. Larghezza dell'anello 0,2.

Loc. Diaspri erratici di Limite.

Differisce dalla precedente non solo per la troncatura ma anche per i solchi radiali più fitti e minuti. Forse la troncatura deriva dal non essere le diverse parti dell'anello in uno stesso piano.

17. Lithocircus rhombus nov. sp. fig. 57.

Sezione rombica con cavità centrale della stessa forma, attraversata da solchi radiali.

Diametro massimo 0,18. Diametro minimo 0,15. Larghezza dell'anello 0,06.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole ed erratici di Limite.

Riferisco a questo genere questa elegante forma, la quale potrebbe essere affine al *L. ellipticus* Ehr. fossile del Maryland.

Le specie conosciute di questo genere, indicate altre volte col nome di *Mesocena* da Ehrenberg, sono sette, delle quali sei sono fossili dei terreni terziarî superiori.

Fam. **Cyrtidae** Haeck.

18. Cornutella pseudoprofunda nov. sp. fig. 27.

Sezione fusiforme, diritta, ristretta verso l'apertura, pori superficiali disposti in serie alterne parallele.

Lunghezza 0,28. Larghezza massima 0,056.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra.

19. Cornutella pseudoclathrata nov. sp. fig. 28.

Sezione falciforme, ristretta verso l'apertura, pori superficiali disposti in serie alterne parallele.

Lunghezza 0,27. Larghezza massima 0,6.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra.

Questa specie e la precedente differiscono respettivamente dalle *C. profunda* Ehr. e *C. clathrata* Ehr. per essere ristrette verso l'apertura, mentre le due specie di Ehrenberg sono regolarmente coniche: esse poi si trovano in una stessa sezione di un diaspro di Pietra, il che non sarebbe conforme all'idea di Ehrenberg, che ammetteva essere le Cornutelle diritte proprie dei mari profondi, avendo osservato questa forma esclusivamente nelle specie tratte da grandi profondità variabili tra 6000 e 12000 piedi.

Le specie conosciute sono cinque, una sola delle quali vivente.

20. Lithopera ovata nov. sp. fig. 29.

Sezione ovata divisa in due concamerazioni, una delle quali ovato-troncata assai grande, l'altra circolare, piccola; interno delle concamerazioni opaco.

Diametro longitudinale 0,12. Diametro trasversale 0,09. Altezza della concamerazione maggiore 0,09. Diametro della concamerazione minore 0,028.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra ed erratici di Limite.

Il margine di questa sezione e della seguente, non offrendo traccia di denticolature, indicherebbe un invoglio sottile o almeno non rialzato sul contorno dei pori come nelle cornutelle, circostanza che ha conservato in quelle forme la traccia dei pori superficiali sotto la parvenza di macchie oscure, senza che i margini esterni della sezione sieno dentati come accade in quelle specie i cui pori sono imbutiformi.

21. Lithopera elongata nov. sp. fig. 30.

Sezione ovato-allungata divisa in tre concamerazioni diseguali e riunite per un angusto canale; le superiori minori e diseguali sono circolari, la terza più ampia ha la forma cordata; sono tutte opache nel loro interno.

Altezza 0,16. Diametro della concamerazione superiore 0,025. Diametro della seconda concamerazione 0,046. Altezza della terza concamerazione 0,069. Larghezza 0,08.

Loc. Diaspri erratici di Limite.

Mentre per la prima di queste due *Lithoperae* il genere non è dubbio, la seconda non corrisponde in tutto alle diagnosi generiche di Ehrenberg e di Haeckel.

Infatti il primo (Monatsbericht der Berliner Akademie 1847 pag. 54) la diagnostica colle seguenti parole: « Testa strictura unica, nucleo fine lobato, appendi- « cibus laterum nullis »; il secondo (*Die Radiolarien* pag. 300) assegna i seguenti caratteri; « Gitterschale zweigliedrig, durch eine ringförmige Querstrictur in zwei « über einander liegende umgleiche Glieder abgetheilt, ohne Anhänge an den Seiten « und an der Mundung, das zweite Glied ununterbrochen gegittert, gegen die Basis « stark verengt, mit eng zusammengezogener oder übergitterter Mundung ».

E l'essere divisa in due concamerazioni da un setto trasversale è anche carattere della tribù delle *Dicyrtidae* a cui appartiene il genere *Lithopera*, mentre la

mia *L. elongata* per le sue tre concamerazioni dovrebbe avvicinarsi alla tribù delle *Polycyrtidae*. D'altra parte questo genere è conosciuto per poche specie, nessuna delle quali è vivente, preferisco quindi lasciare la specie in questione nel genere accennato, piuttosto che crearne un nuovo, salvo a modificare il suo posto in seguito ad ulteriori ricerche.

Specie conosciute cinque, tutte fossili.

Dicthyophinus . . . . sp. fig. 31, 32.

Riferisco a questo genere alcune forme non rare, due delle quali ho figurato; esse hanno in generale una forma pileare, ed una di esse mostra traccie di spine attorno all'apertura basale.

Altezza 0,12. 0,16.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra ed erratici d'Arno.

Polystichia novum genus
(πολυ, molti στίχος piano)

R. conica, septis parallelis perforatis, in 6-8 *articulis divisa; superficie porosa; articulo terminali aperto.*

Ho istituito questo nuovo genere per alcune forme comunissime in tutti i diaspri che ho esaminato; questo genere appartiene alla tribù delle *Stichocyrtidae*, ed avrei ben volentieri impiegato questo nome se non fosse stato già usato per la tribù alla quale appartiene.

Nella classificazione delle *Cyrtidae*, secondo Haeckel, va collocato prima del genere *Lithocampe*, col quale ha molta affinità per quanto se ne distingua per la forma conica, per i setti più estesi e per le concamerazioni egualmente alte.

Le forme che appartengono a questo genere sono comunissime e si presentano sovente nelle sezioni sotto la forma di triangoli isosceli trasparenti: quando poi l'interno delle concamerazioni è opaco, esse offrono eleganti disposizioni, alcune delle quali ho figurato.

22. Polystichia Ehrenbergi nov. sp. fig. 33, 34, 35, 36.

Sezione triangolare, costituita da 6-8 concamerazioni a lati paralleli; i setti hanno nella parte centrale un'apertura, il cui diametro è poco meno del quarto del diametro totale.

Lunghezza 8,10. Diametro dell'ultima concamerazione 0,1.

Loc. Diaspri eocenici di Tocchi, Crevole, Pietra, Romito ed erratici d'Arno; diaspri liassici di Rapolano.

Ordinariamente in questa forma e nelle due seguenti l'interno delle concamerazioni è opaco, nè sempre il canale centrale è discernibile, fig. 34, il che dipende dalla sezione avvenuta parallela all'asse; a volte il canale centrale si scorge solo verso la base; in alcuni casi i setti e le concamerazioni non sono appariscenti, o si rendono palesi per sottilissime linee o al microscopio polarizzante per il differente pleocroismo dipendente dal diverso aggruppamento dei cristalli: è la sola specie indubbiamente comune ai diaspri eocenici e ai diaspri del Lias.

Ho rinvenuto la stessa forma in una sezione di un utensile preistorico in diaspro dell'Umbria.

23. Polystichia Haeckeli nov. sp. fig. 37, 38.

Differisce dalla precedente per le maggiori dimensioni e per i lati leggermente convessi, il che accenna ad una certa globosità che, più accentuata nella specie seguente, stabilisce un passaggio tra la forma precedente e il genere affine *Lithocampe;* in questa sezione inoltre i setti si debbono manifestare anche all'esterno con strozzature lungo la superficie, il che non accade nella specie precedente.

Lunghezza 0,2.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra, Terriccio ed erratici d'Arno: comune.

24. Polystichia Muelleri nov. sp. fig. 39.

Sezione triangolare a base circolare, divisa in sei concamerazioni opache riunite da un canale centrale, le prime limitate da linee parallele, l'ultima maggiore delle altre è semicircolare.

Lunghezza 0,16. Larghezza massima nell'ultima concamerazione 0,8.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole.

Per quanto l'ultima concamerazione la differenzi dalle altre, per la similitudine della parte apicale la conservo nello stesso genere.

Urocyrtis novum genus
(οὐρά coda, κυρτίσ canestro)

R. tres vel quatuor articulis inaequalibus divisa; primo magno, quadrangulari vel subrotondo, apice valida spina producto; basi duobus vel tribus articulis parvis superpositis constituta; superficie cellulis aequalibus ornata.

Ho stabilito questo nuovo genere, che reputo appartenere alla tribù delle *Polycyrtidae*, per alcune forme assai comuni che presentano nella sezione una concamerazione principale parallelogrammica o circolare a margini dentati internamente, che terminano dal lato apicale con una lunga spina e da quello basale con due o tre piccole concamerazioni.

25. Urocyrtis Emmae nov. sp. fig. 44, 45.

Sezione quadrangolare ottusa; lato apicale munito di una lunga spina; lato basale terminante con due piccole concamerazioni; margine dentato.

Lunghezza totale 0,4. Lunghezza della spina 0,18. Larghezza della concamerazione centrale 0,12.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole, Pietra, Forte Falcone, ed erratici di Limite; comune.

Ordinariamente l'interno delle concamerazioni in questa forma è opaco; è però alcune volte trasparente; i denti larghi del margine interno accennano a maglie larghe per le quali l'interno dello scheletro si è dovuto riempire a volte di detrito; le concamerazioni basali sono divise tra loro e dalla principale da un finissimo setto.

26. Urocyrtis Amaliae nov. sp. fig. 46.

Sezione rotonda allungata nel senso della maggior lunghezza; lato apicale munito da una lunga spina, lato basale terminante con tre piccole concamerazioni; margine dentato.

Lunghezza totale 0,4. Lunghezza della spina 0,18. Larghezza della concamerazione centrale 0,08.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra Terriccio ed erratici di Limite.

27. Urocyrtis De-Stefanii nov. sp. fig. 47.

Sezione ovato-allungata nel senso trasversale; lato apicale munito di lunga spina; lato basale munito di appendice; margine finamente dentato.

Lunghezza totale 0,42. Lunghezza della spina 0,18. Larghezza della concamerazione centrale 0,23.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra ed erratici di Limite.

In tutte le sezioni di questa forma il nucleo è sempre trasparente o è appena cosparso di frammenti ocracei; ciò potrebbe essere in relazione coi fori più piccoli del guscio in confronto alle altre due specie; l'appendice basale rappresenta secondo me l'insieme delle concamerazioni analoghe distinte nelle altre due specie.

Adelocyrtis novum genus incertae sedis.
(ἄδηλος incerta κυρτίς canestro)

R. subsphaerica; apice valida spina producto; lorica cellulosa, cellulis ad basim majoribus.

Propongo il nuovo genere *Adelocyrtis* per alcune forme, una delle quali molto comune, e che nella sezione presentano un nucleo centrale rotondo o subrotondo a margini inegualmente dentati, e terminano con una appendice notevolmente lunga. Per quanto io non nutra dubbio alcuno sulla forma generale di queste specie, non oso pronunziarmi sul posto che dovrebbesi assegnare al genere che le comprende; esso appartiene alle *Cyrtidae*, ma l'incertezza comincia quando io voglio stabilire la tribù, offrendo alcuni caratteri comuni delle due tribù estreme delle *Monocyrtidae* e delle *Polycyrtidae*

28. Adelocyrtis cometa nov. sp. fig. 49.

Sezione circolare terminante con una larga punta; il margine è dentato e i denti sembrano più larghi nella parte opposta all'appendice apicale.

Lunghezza 0,26. Diametro del nucleo 0,18.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole, Pietra, erratici di Limite; diaspri liassici di Rapolano.

Nella sezione figurata l'interno è occupato, secondo il solito, da detrito finissimo a forma di un poligono irregolare, come ho notato per una delle *Ethmosphaeridae*.

29. Adelocyrtis pala nov. sp. fig. 48.

Sezione subrotonda, circolare alla base, oscuramente quadrata dal lato apicale, terminante con una appendice prolungata a lati paralleli; margine basale dentato.

Lunghezza 0,44. Diametro trasversale 0,16. Lunghezza dell'appendice 0,22.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra; rara.

È una sezione benissimo conservata, ed è evidente che i fori debbono essere assai più larghi nel lato basale, la dentatura andando progressivamente diminuendo verso la parte apicale; l'interno della concamerazione è ripieno del solito detrito, fatto che è correlativo alle maglie più larghe di quelle delle altre specie.

30. Adelocyrtis spinosa nov. sp. fig. 50.

Sezione circolare terminante in una lunga e sottile spina; margine regolarmente dentato.

Diametro 0,2. Lunghezza della spina 0,22.

Loc. Diaspri di Crevole, Pietra ed erratici di Limite; comune.

Si presenta sempre questa forma con il nucleo trasparente, e i pori superficiali sembrano piccoli e regolarmente distribuiti, come nelle *Ethmosphaeridae*.

Sottordine. — ACANTHOMETRAE Hert.

Fam. **Acanthophractidae** Hert.

Dorataspis sp. . . . . fig. 10.

Reputo questa famiglia rappresentata da frammenti pentagonali che non saprei riferire che alle porzioni poligonali nelle quali è divisa la lorica di questa famiglia di radiolarie.

Larghezza 0,05. 0,08.

Loc. Diaspri eocenici di Crevole ed erratici d'Arno.

Riassunto delle specie

		Eocene	Creta	Lias
	PERIPYLAEE			
	Ethmosphaeridae			
1	Ethmosphaera minuta	. .	+	. .
2	» vulgaris	+	. .	+
3	» siphonophorites	+	. .	. .
4	Heliosphaera echinoidites	+	. .	. .
	Cladococcidae			
5	Raphidococcus Lurianensis	+	. .	. .
	Ommatidae			
6	Heliodiscus simplex	. .	. .	+
	Actinomma sp.	+	. .	+
	Discidae			
7	Histiastrum? Lurianensis	+	. .	. .
8	Trematodiscus soritoides	+	. .	. .
9	Euchitonia Muellerites	+	. .	. .
10	» amoena	+	. .	+
11	» clathrata	+	. .	. .
12	» Crevolensis	+	. .	. .
13	» grandis	+	. .	. .
14	» dubia	+	. .	. .
	Spongodiscidae			
	Spongodiscus sp.	+	. .	+
	MONOPYLAEE			
	Achantodesmidae			
15	Lithocircus Haeckeli	+	. .	. .
16	» truncatus	+	. .	. .
17	» rhombus	+	. .	. .
	Segue . .	17	. .	5

		Eocene	Creta	Lias
	Riporto. .	17	. .	5
	Cyrtidae			
18	Cornutella pseudoprofunda	+	. .	. .
19	» pseudoclathrata	+	. .	. .
20	Lithopera ovata	+	. .	. .
21	» elongata	+	. .	. .
	Dicthyophinus sp.	+	. .	. .
22	Polystichia Ehrenbergi	+	. .	+
23	» Haeckeli	+	. .	. .
24	» Muelleri	+	. .	. .
25	Urocyrtis Emmae	+	. .	. .
26	» Amaliae	+	. .	. .
27	» De-Stefanii	+	. .	. .
28	Adelocyrtis cometa	+	. .	+
29	» pala	+	. .	. .
30	» spinosa	+	. .	. .
	ACANTHOMETRAE			
	Acanthophractidae			
	Dorataspis sp.	+	. .	. .
	Totale. .	32	1	7

Forme indeterminate. — fig. 12. Ammasso di spicule che potrebbe essere casuale o rappresentare i resti di *Coelodendridae*; questi ammassi si ripetono varie volte.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra e Crevole.

Fig. 54. Sezione opaca con ventinove nucleoli semitrasparenti disposti a spirale; è probabilmente una *Discidae.*

Diametro 0,25.

Loc. Diaspri eocenici erratici di Limite; unica.

Fig. 40. Sezione circolare opaca limitata da un sottile margine trasparente; presso al margine si scorge una sezione circolare trasparente.

Diametro 0,27.

Loc. Diaspri eocenici erratici di Limite.

Fig. 56. Non saprei meglio descrivere questa sezione che paragonandola a quella di un occhio, l'anello opaco tra il margine trasparente e l'interno della sezione è interrotto.

Diametro massimo 0,21. Diametro minimo 0,19.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra.

Fig. 58. Sezione ovato-acuta; lungo i margini corre un orlo ripiegato a zic-zac trasparente; il resto è opaco.

Diametro massimo 0,3. Diametro minimo 0,22.

Loc. Diaspri eocenici erratici di Limite.

Fig. 55. Sezione circolare con nucleo semitrasparente; i margini sono fortemente incisi da 12 intagli che danno alla sezione l'apparenza di un rosone ornamentale.

Diametro 0,25.

Loc. Diaspri eocenici erratici di Limite.

Questa forma e le due seguenti mi sembra, anche per quello che ho detto circa al modo di considerare queste sezioni, che non debbano essere riferite ad avanzi di radiolarie.

Fig. 59. Sezione circolare formata da corpi radiali opacissimi, e che sembrano risultanti da articoli successivi uniti per le estremità. In maggiori dimensioni richiamerebbe la forma di una *Cidaris*.

Diametro 0,23.

Loc. Diaspri eocenici erratici di Limite.

Fig. 60. È la forma più strana che io abbia trovato; si presenta in sezione circolare munita di una lunga appendice spiniforme; nell'interno della sezione si scorge un nucleolo trasparente circondato da sei nucleoli opachi e tra il margine e questi, vi sono altri dodici nucleoli alternativamente trasparenti ed opachi, gli opachi del giro esterno corrispondendo a quelli dell'interno; il nucleo corrispondente all'appendice è più grande degli altri.

Diametro 0,23. Lunghezza dell'appendice 0,17. Diametro dei nucleoli 0,04.

Loc. Diaspri eocenici di Pietra.

Fig. 51. Piccole sezioni triangolari a vertici tronchi che potrebbero rappresentare sezioni di grandi spicule di radiolarie, e tanto più facilmente che esse abbondano nelle sezioni perpendicolari al piano di stratificazione: queste piccole sezioni sono comuni in tutti i diaspri che presentano traccie di fossili; il loro diametro varia da 0,02 a 0,05. Egualmente potrebbero essere considerate le sezioni indicate nella stessa tavola fig. 53, se non che queste forme sono più rare e non è improbabile che possano anche rappresentare avanzi di spugne.

Finalmente rammenterò che sezioni semplicemente circolari, sì trasparenti che opache, sono comuni in tutte le preparazioni; sono queste per me, essendo le ultime a sparire, le rappresentanti dell'ultimo stadio delle modificazioni successive che devono aver subìto gli avanzi organici per il lento metamorfismo del tempo.

IV.

Le radiolarie conosciute e descritte, tra fossili e viventi, sono fino ad oggi 865 specie; di queste 460 sono viventi e 462 fossili tra le quali 57 sono viventi: aggiungendovi le 30 specie descritte in questo lavoro il numero totale delle radiolarie ascende a 895 e quello delle fossili a 492; alle quali poi anderebbero aggiunte: tutte quelle indicate e non descritte da Ehrenberg e nel presente lavoro; quelle poche indicate in un breve elenco comunicato da me e De-Stefani nell'adunanza della Società toscana del 9 maggio 1880, provenienti da un tripoli miocenico di S. Barbara (Calabria), (Proc. verb. della Soc. toscana di scien. natur. pag. 59, 1880): una radiolaria indicata da Waters, *Quelques roches des Alpes Vaudoises*. Bullet. Soc. Vaud. XVI. 83 pag. 593 tav. XXIV. fig. 3, del Trias di Tignières (Svizzera) e le bellissime radiolarie trovate da Shrubsole nel carbonifero di Chester (Inghilterra) delle quali ho potuto esaminare i disegni.

Le specie fossili conosciute provengono dai terreni terziarî superiori di Sicilia (Grotte, Caltanisetta), Orano, Aegina, Zante, Richmond, Bermuda, Barbados, Nicobare,

Chilì e Kasan; sei sono della creta del nord della Germania, due del Trias. Il maggior numero delle radiolarie fossili è stato fornito dall' isole Barbados, dall'isole Nicobare e dalla Sicilia.

Le specie dei diaspri che ho descritte rappresentano tutte nuove forme, il che risponde a tutte le osservazioni fin qui fatte su questi organismi. In fatti sulle 462 specie fossili conosciute solo 57 sono state riscontrate viventi; e Stöhr, nel suo ultimo catalogo (*Die Radiolarienfauna.....* 1880) di 118 specie, 29 sole ne cita di viventi e di queste 11 nel Mediterraneo; e qualora si voglia anche far larga parte alla insufficienza delle nostre cognizioni e alle limitate ricerche praticate in proposito, resterà sempre una notevole sproporzione tra il numero delle specie fossili e il numero di quelle che sono ad un tempo fossili e viventi; deve aggiungersi poi che le specie fossili meno le poche già citate della creta, del trias, provengono dai terreni terziarî superiori.

Una osservazione d'indole generale può farsi sulle dimensioni delle specie dei diaspri, che sono ordinariamente sempre maggiori di quelle delle specie affini viventi.

Ma il maggior interesse offerto da questa nuova fauna si riferisce alla geologia toscana in particolare: è noto che da noi la serie dei terreni compresa tra il Lias e l'eocene inclusivo scarseggia di fossili, i quali si riducono a poche fucoidi, a pochi molluschi della creta e alle nummuliti del piano omonimo. Questi nuovi avanzi forniranno, io son certo, buoni criterî per la specializzazione degli strati nel periodo indicato, e questo materiale sarà anche più importante quando si estenda l'esame microscopico a tutte le roccie calcaree o argillose di questo periodo, le quali in tutte le sezioni che vi ho praticato mi hanno sempre offerto traccie numerose di avanzi fossili. Nè il piccol numero di specie che io ho descritto deve far dubitare di ciò che asserisco; la preparazione delle lamelle di diaspro è lunga e laboriosa, e tanto maggiore è per me che non sono in posizione di affidare ad altri quella parte puramente manuale dell'operazione; i diaspri che ho segato di poco oltrepassano il cento, e in questi stessi, se avessi voluto tener conto di tutte le forme incerte, avrei riempito non una doppia tavola come quella annessa a questo lavoro, ma forse anche quattro sarebbero state insufficienti. Io nutro fiducia che tra qualche anno, quando avrò raccolto un numero rilevante di materiali, e specialmente se altri vorranno seguire questa nuova via aperta alle ricerche paleontologiche, il numero delle radiolarie dei diaspri raggiungerà quello di tutte le radiolarie fossili conosciute.

V.

Assai più interessanti sono le deduzioni geologiche che possono trarsi dall'esame di questi fatti.

Ho già avvertito fin dai primi capitoli di questo lavoro come fin qui tutti i geologi sieno stati sempre d'accordo nel ritenere i diaspri d'origine metamorfica nel senso almeno di una silicizzazione posteriore alla loro deposizione, dovuta all'azione o di roccie ignee o di sorgenti silicee. Enunciata questa ipotesi dal Targioni, fu costantemente seguìta dal Savi, dal Pilla e con essi da tutti coloro che si occuparono della geologia toscana, fino a De-Stefani che primo negò questa origine ai diaspri.

Ed io mi guarderò bene dal muovere rimprovero ai sommi che hanno gettato le fondamenta della geologia toscana e i cui lavori non dovrebbero mai essere dimenticati da coloro che intendono studiare le condizioni geologiche di queste provincie, se hanno accettato un'ipotesi che, anche senza l'accertamento dei nuovi fatti che sono venuto svolgendo, si trova spesso in contradizione con la realtà. Limitandomi al primo tra loro, al Savi (1), occorre ricordare che si accinse a questi studî in tempi nei quali non si aveva alcuna idea sulla costituzione geologica della Toscana, nei tempi nei quali la lotta tra il plutonismo e il nettunismo non era ancora sopita, nè ancora si erano sviluppati quei sani criterî che servono oggi ad attribuire ad ognuna di queste cause la sua parte nella modificazione della superficie terrestre.

Così è noto, che nei primi lavori il Savi ritenne eruttivi i calcari cristallini delle Alpi Apuane, assegnando alle eruzioni dolomitiche la trasformazione delle argille in diaspri; ben tosto però modificò la sua idea sulla origine dei calcari, essendo per avventura una delle maggiori glorie del Savi, quella di aver potuto e saputo nella sua lunga carriera scientifica correggere e modificare le sue ideè a seconda dei nuovi fatti, mostrando che il preconcetto, compagno inseparabile dell'uomo, non facevagli mai velo alla mente nelle sue indagini.

Il metamorfismo delle argille in diaspri, ftaniti, galestri e gabbri fu poi dal Savi attribuito ai serpentini, e nel diverso grado di durezza di queste roccie, vedeva il grado differente di silicizzazione delle medesime; era però così buon osservatore che non gli sfuggì come alcune volte questa silicizzazione appariva misteriosa, essendosi prodotta anche lungi da roccie ignee; e nel suo lavoro sulle masse ofiolitiche toscane (Nuov. giorn. dei letter. tosc. vol. XXXVIII. 1838 pag. 132) esce in queste parole: « questa strana mutazione dello schisto in diaspro, come quella del galestro, non accompagna soltanto le masse ofiolitiche; trovasi anche lontano da esse e dove altre sono state le cause plutonizzanti ».

Pilla segue la stessa opinione nel ritenere i diaspri e i galestri metamorfici, per quanto dichiari (*Saggio comparativo dei terreni che compongono il suolo d' Italia* Ann. Univers. toscane, vol. I. 1846 pag. 299) di averli veduti ricisamente separati dall'alberese, fatto che non era sfuggito al Savi, il quale ad esso accenna dicendo della rarità « di trovare in una medesima stratificazione e gli strati calcarei e i diasprini, giacchè per il solito ove sono gli uni mancano gli altri » (*Delle masse ofiolitiche toscane.* Nuov. giorn. letter. tosc. vol. XXXVIII. pag. 132).

D'altra parte è bene ricordare che ancora non erano conosciuti i risultati dei

(1) Come il Savi fosse profondo ed acuto osservatore e come sapesse modificare le sue idee a seconda dei nuovi fatti osservati, risulta in un modo brillante dalla storia dei terreni eocenici della Toscana. Questi, nei primi tempi della vita scientifica del Savi, erano confusi nella formazione da lui chiamata del macigno che comprendeva tutti gli strati dal verrucano fino al miocene; poi in questa lunga serie vennero dal medesimo distinti i piani superiori, che avrebbero in seguito fatto parte dell'eocene, da quelli inferiori; più tardi li ritenne cretacei; venuto il Pilla li staccò dal cretaceo per farne un piano distinto che chiamò etrurio; finalmente il Murchison, profittando dei suoi studî sull'eocene dei Carpazi e dei molteplici lavori del Savi, del Pareto, del Pilla ed altri, assegnò ai terreni dell'eocene toscano la loro vera posizione, e fu immediatamente seguìto nella sua idea dal Savi e dal Meneghini che completarono in modo mirabile con lo studio dei fossili il classico lavoro del Murchison.

regolari scandagli praticati modernamente nelle grandi profondità oceaniche, quindi non è a maravigliarsi se di fronte ad un fenomeno che usciva dalla cerchia di quelli, i cui analoghi potevano essere facilmente riscontrati nell'attualità, i padri della geologia toscana ricorsero all'azione di forze endogene, alle quali pur troppo anche oggi si ricorre ogni qualvolta sfugge qualunque altra spiegazione per la origine di certi fatti; nel caso speciale poi la prossimità dei serpentini, ritenuti come roccie plutoniche e non vulcaniche, dettava facilmente in molte circostanze questa spiegazione (Savi, *Lettera a Girolamo Guidoni* Nuov. giorn. letter. tosc. vol. XXIV. 1832 pag. 78. — *Sui terreni stratificati dipendenti e annessi alle masse serpentinose* ibid. vol. XXXIV. ed altri citati).

Le relazioni degli scandagli oceanici, tra le quali quella di C. Wyville Thomson (*Preliminary notes on the nature of sea bottom*..... Proceed. of the r. Society vol. XXIII. n. 156 pag. 32) hanno posto mirabilmente in luce la natura dei sedimenti marini a grandi profondità. L'autore, nella relazione citata, mostra che al di sotto di 2700 fathoms, il fondo del mare era costituito da argilla rossa prevalentemente silicea contenente spicule di spugne e di radiolarie, e che questo sedimento non era stato mai trovato ad una profondità inferiore a 2150 fathoms (pag. 42 loc. cit.; tra S. Salvador e Tristan d'Acunha).

Al di sopra dell'argilla rossa fu trovato un sedimento chiamato da Thomson *grey-ooze* e *globigerina-ooze*, di natura calcarea non privo di silice, contenente resti di spugne, di radiolarie, e noduli di manganese, la cui quantità aumentava passando all'argilla rossa.

Wyville, con una frase felice, chiama l'argilla rossa cenere degli organismi viventi nel mare e spogliati dall'acido carbonico della sostanza calcare; senza seguire le discussioni che fecero seguito a questa comunicazione e all'altra (*On dredging and deep sea sonding in the south Atlantic,* Wyville Thomson; Proceed. of r. Society Vol. XXII. n. 154), specialmente per parte del Carpenter (loc. cit. Vol. XXIII. n. 159. *Remarks on Prof. Wyville Thomson's preliminary notes on the nature of sea bottom* etc., Carpenter), che attribuirebbe, riferendosi a certe osservazioni di Forbes nel mare Egèo, la sparizione dei gusci calcarei all'azione logorante delle correnti marine, dichiarando nello stesso tempo che la questione dell'origine dell'attuale *red-clay* e del *green-sand* del cretaceo rimane sempre aperta alla scienza (loc. cit. pag. 245), a me basta il fatto che i depositi di mare profondo sieno prevalentemente silicei; e questo è ormai accettato nella scienza, qualunque sia la spiegazione che al medesimo voglia attribuirsi.

Un'altra questione non ancora risoluta, e che in parte si riunisce all'origine dell'argilla rossa è quella che riguarda la distribuzione verticale delle radiolarie; cioè se questi organismi rappresentino una fauna pelagica, oppure siano peculiari alle grandi profondità marine.

Ehrenberg ammette che possano vivere anche alla superficie, ma che formano da sè sole la fauna delle grandi profondità, trovandosene viventi fino a 20000! piedi sotto la superficie. Müller (*Ueber die Thalassicollen, Polycistinen und Acanthometren des Mittelmeers.* Abhand Berl. Akad. 1858 pag. 26) esprime francamente l'opinione che questi organismi vivano dalla superficie fino alle più grandi profondità. Haeckel ritiene che vivano fino a grandi profondità (*Die Radiolarien,* monogr. pag. 172 e

seg.) ma, che vi sia un limite oltre al quale cessi la vita oceanica, fondandosi specialmente sul fatto che le radiolarie tratte dalle grandi profondità erano sempre prive della massa sarcodica. Non esprime però a questo riguardo una opinione definitiva e dopo enumerate le ragioni pro e contro alla possibilità della vita nelle grandi profondità, crede la questione sempre aperta alla scienza (loc. cit. pag. 189); nè gli studî posteriori l'hanno risolta. Hertwig (*Der Organismus der Radiolarien* 1879 pag. 256) ammette pure che vivano a tutte le profondità; quindi tralasciando di entrare in questa questione che dovrà essere risolta dall'osservazione diretta, rimane sempre assicurato che, se organismi viventi si trovano nelle grandissime profondità, essi devono appartenere ai rizopodi a scheletro siliceo.

D'altra parte questa questione non è essenziale per concludere sull'origine dei diaspri in seguito alle mie ricerche; è sufficiente che, viventi o morte, il numero delle radiolarie vada aumentando con la profondità, e questo risulta da tutti gli scandagli praticati nei mari; raccolti in gran parte da Ehrenberg e da Haeckel, per maggior chiarezza mi limiterò a riportare il seguente quadro dedotto da una serie di scandagli (Haeckel, loc. cit. pag. 179) dove sono indicati i rapporti tra il numero delle radiolarie e delle politalamie, a quello degli scandagli.

La profondità è espressa in piedi.

Profondità del mare	100—500	501—1000	1001—5000	5001—10000	10001—15001	15001—20000
Radiolarie	3	14	19	130	88	55
Politalamie	60	104	103	113	73	3

Il numero crescente delle radiolarie con la profondità, in confronto di quello delle politalamie, trova il suo riscontro, qualora non si voglia ammettere che esse vivano nelle grandissime profondità, nelle osservazioni di Wyville, di Forbes e di Carpenter che più sopra ho citato; è in tutti i casi notevole che nelle grandi profondità spariscono i rizopodi a scheletro calcàreo per conservarsi o nuclei silicei di questi o i soli rizopodi a scheletro siliceo.

Stabilito ciò che accade al presente nelle grandi profondità marine, è ovvia la spiegazione della origine dei diaspri.

Essi, a mio parere, rappresentano sedimenti marini avvenuti lontani dalle coste e a grandi profondità; analoga origine hanno i galestri, le ftaniti e tutte le roccie più o meno silicee che li accompagnano, come pure i calcari rossi che vi sono uniti, gli scisti a fucoidi e simili roccie, le cui lamelle microscopiche mi hanno mostrato invariabilmente resti di globigerine, orbuline ed altri fossili che unici rimangono nelle profondità marine.

Il fatto poi di non aver riscontrato nelle sezioni praticate nei diaspri resti di politalamie fornisce un criterio per giudicare della profondità di questi depositi; non è già per porre in evidenza dei numeri che debbono essere accettati solo come una approssimazione, ma per esprimere in modo più concreto una mia idea, io non esito ad asserire che la profondità marina minima alla quale si possono essere raccolti quei fanghi che oggi si presentano come diaspri, non ha dovuto essere inferiore ai 1000 metri.

Ora sarebbe a domandarsi perchè i soli diaspri hanno conservato evidenti i resti di radiolarie, mentre queste non sono sempre riconoscibili nelle roccie che li accompagnano.

Io potrei subito osservare che non sempre una ragione d'indole generale può servire a spiegare fatti speciali, e quando quella non serve a dilucidare completamente certe circostanze singolari, si deve ammettere non la insussistenza della causa prima, ma piuttosto la ignoranza delle azioni secondarie che hanno accompagnato il suo svolgimento; e che tale sia il caso dei diaspri facilmente si scorge; essi rappresentano una piccola parte di una formazione importante che ha il suo riscontro in ciò che accade attualmente nelle grandi profondità marine. Come in queste il sedimento siliceo è variabile circa alla proporzione della silice, e poichè non sempre gli scandagli marini hanno riportato avanzi di radiolarie, benchè il fango fosse sempre siliceo, a me viene piuttosto l'idea di domandarmi, rispetto al fenomeno della conservazione delle radiolarie nei diaspri, se non debba invertirsi la questione e in luogo di chiedere per quali ragioni le radiolarie si sono solamente conservate nei diaspri, non debba ritenersi che i diaspri si sieno formati là dove per cause ancora ignote le radiolarie hanno potuto maggiormente accumularsi.

Sarebbe facile ora fare delle ipotesi in questa nuova via; io però rifuggo dal batterla; mi contento dei fatti e lascio volentieri una strada altrettanto lusinghiera quanto pericolosa; che le ipotesi per spiegare un fenomeno tutti possono farne e varie, basta che sieno possibili e le possibilità nei fenomeni naturali sono sempre a danno della loro probabilità; del resto io ammetto le ipotesi in quanto che servono a classificare ed ordinare i fatti, quelle emesse per spiegare ad ogni costo un fenomeno qualunque ho sempre riputate inutili se non dannose.

Piuttosto ora passerò a dir qualche cosa sulla ipotesi antica che attribuisce ai diaspri un' origine metamorfica dovuta al contatto o vicinanza di roccie ignee o di altre *cause plutonizzanti a noi ignote.*

Se le roccie di questa natura fossero sempre a contatto di roccie ignee; se non raggiungessero molte volte spessori enormi; se alcuni di questi strati e precisamente quelli che più degli altri avrebbero dovuto modificarsi per l'azione delle cause metamorfosanti non contenessero avanzi fossili, la ipotesi suespressa potrebbe anche accettarsi, per quanto essa rimarrebbe se non contraria alla possibilità, sempre inutile, il che non è poco.

Ma essa non solo è inutile, ma è anche in contradizione assoluta con tutto ciò che si è potuto osservare anche indipendentemente dai resti fossili superiormente descritti; ed io mi limiterò puramente a riepilogare tutti quei fatti che non possono essere spiegati col metamorfismo endogeno.

1. I galestri, le ftaniti e i diaspri raggiungono spessori di alcune centinaia di metri ed estensioni grandissime.

2. Si trovano queste roccie non solo nell'eocene superiore, nel quale l'azione metamorfica potrebbe essere attribuita ai serpentini, ma anche nella Creta e nel Lias ove mancano affatto roccie eruttive.

3. Nell'eocene stesso queste roccie sono sovente ben lontane dalle roccie eruttive.

4. Non è raro trovare intercalati tra i galestri strati calcarei o arenarie.

5. Gli strati di galestro e sue varietà passano sovente all'alberese senza alcuna transizione.

6. I serpentini si trovano anche intercalati, tra gli alberesi senza che abbiano prodotto in questi alcuna modificazione.

7. I serpentini possono essere separati dai galestri da strati calcarei inalterati.

8. Nella lunga serie di queste roccie, la cui durezza dipenderebbe dal grado di silicizzazione e quindi dalla maggiore intensità dell'azione metamorfica, hanno conservato traccie di fossili i diaspri, che precisamente dovrebbero essere quelli maggiormente modificati.

9. Gli avanzi fossili dei diaspri appartengono ad animali a scheletro siliceo.

E ciò parmi che basti; prima però di lasciare questa questione, voglio aggiungere alcune osservazioni: una di queste si riferisce alla struttura intima dei diaspri a radiolarie. Ho detto nel principio di questo lavoro che la struttura di questi diaspri risultava da un aggregato di minuto detrito involgente le radiolarie, che a lor volta sono ripiene o di questo stesso detrito o più generalmente di silice cristallizzata; come questo sia avvenuto, come questi materiali di lor natura incoerenti siansi agglutinati ed abbiano dato origine ad una roccia uniformemente compatta, può trovare la sua spiegazione in una serie di fenomeni analoghi a quelli che hanno trasformati i fanghi calcarei in roccie compatte, salvo la differenza dei materiali, i quali poi sono egualmente solubili nelle acque cariche di acido carbonico: e siccome da molto tempo nessuno più ammette che i nuclei cristallini che hanno sostituito i fossili nei calcari sieno dovuti ad una azione endogena, mi sarà anche facilmente accordato che in seno a roccie prevalentemente silicee, sia accaduto un fenomeno simile a quello avvenuto nelle roccie calcaree; così, come le spaccature dei calcari sono ripiene di calcite, quelle dei diaspri sono ripiene di quarzo, la causa è la stessa e solo i materiali differiscono; nè la differenza deve sorprendere, sapendo che ambedue si comportano nello stesso modo, rispetto a quella lenta circolazione acquea, che s'infiltra e penetra in tutte le roccie, modificandone continuamente l'intima struttura.

L'altra osservazione sarebbe quella che si riferisce alla generalità del fenomeno, cioè se tutti i diaspri abbiano la stessa origine, ossia se tutti sieno vere roccie di sedimento; io mi sono troppo occupato a combattere una idea nata per avere esagerato l'azione di una sola causa, per cadere poi volontariamente nello stesso errore; in natura si possono raggiungere effetti finali identici per mezzo di cause diverse, quindi non intendo escludere che in qualche caso i diaspri possano avere avuto una origine diversa da quella che fin qui ho ammesso. Credo però fermamente che questa debba essere l'eccezione, e probabilmente una eccezione assai rara, e quando questa si verificasse converrebbe escludere quelle roccie dal novero dei diaspri per riportarle nel novero dei calcedoni o di consimili roccie di silice concrezionata, precisamente come si è fatto per le selci dei calcari, le quali sono state separate dai diaspri non appena si è riconosciuto essere dovute a sedimenti organici piuttosto che ad azioni metamorfiche.

L'azione poi metamorfosante esercitata sopra una roccia preesistente, che alcuni intendono come una vera epigenesi, o in qualunque altro modo si voglia supporre, mi parrà sempre molto difficile a sostenersi; posso ammettere che una roccia ignea modifichi la struttura intima di una roccia di contatto, purchè questa modificazione sia limitata nello spazio, alla cristallizzazione, alla nuova disposizione dei suoi

elementi e anche alla introduzione di elementi non preesistenti; non mi persuaderò mai che possa spingere la sua azione a forti distanze dalla sua origine e tanto meno a cambiarne in modo assoluto la sua chimica composizione; lo stesso può ripetersi circa all'azione di sorgenti minerali o termali che si voglia; io conosco molte sorgenti termali capaci di dar luogo a nuove roccie e in masse rilevanti, che io sappia però ancora non ne sono state osservate che modifichino sensibilmente quelle preesistenti; le sorgenti calcaree daranno luogo ai travertini, le sorgenti silicee alle geiseriti, calcedoni e simili; ma nè le une nè le altre saranno capaci di cambiare una roccia calcarea in silicea, o una arenaria in calcare; quando si vorrà ritenere che alcuni diaspri debbano ripetere la loro origine da sorgenti silicee, non sarà mai, se i medesimi faranno parte di una serie di roccie in parte silicee, tanto meno poi se contenessero avanzi di organismi.

Nella mia comunicazione fatta alla Società toscana di scienze naturali (loc. cit), avvertii che l'aver trovato avanzi fossili nei diaspri (Romito, Falcone, Montevaso) intimamente collegati alle formazioni serpentinose, (diaspri di Terriccio, D'Acchiardi, Proc. verb. soc. tosc. 9 maggio 1880, pag. 57) semplificava la questione della origine dei serpentini.

È noto che queste roccie furono anticamente ritenute per roccie primitive, e questo fino a Brogniart che riconobbe i serpentini della Toscana (*Sur les gîsements ou sur la position relative des euphotides, ophiolites, jaspes* etc..... *dans quelques parties des Apennins.* Paris 1821) da lui visitati all'Impruneta, Monteferrato, Pietramala, ecc. trovarsi soprapposti a strati con fossili; fatto che era stato osservato dal Ferber sino dal 1772; il Savi nel 1832 (*Lettera al Guidoni concernente osservazioni geognostiche su i terreni antichi toscani.* Nuov. giorn. dei lett. toscani vol. XXIV) riconobbe la vera posizione dei serpentini, assegnando la loro comparsa dopo l'indurimento della formazione del macigno e poco avanti la formazione dei terreni gessosi solfiferi (loc. cit. pag. 215).

Nè questa determinazione che è costantemente ripetuta nei successivi lavori, deve oggi molto cambiarsi, e quando geologi non toscani supposero poter essere i nostri serpentini più antichi dell'eocene e anche prepaleozoici, non mancarono coloro che seppero dimostrare con nuovi e più validi argomenti le giuste deduzioni del Savi (De Stefani, *Le roccie serpentinose della Garfagnana.* Boll. Comit. geol. 1876 n. 1, 2).

Il Savi però e con esso molti dei suoi successori, ritennero sempre che i serpentini rappresentassero roccie eruttive intruse tra le roccie stratificate e precisamente fra il terreno calcareo e il macigno (*Tagli geologici delle Alpi Apuane* ecc. Nuovo giorn. letter. tosc. vol. XXVII. pag. 81) che deve intendersi per l'alberese e l'arenaria eocenici; questa idea come ho detto fu costantemente seguìta dal medesimo, da Pilla (*Saggio comparativo dei terreni che compongono il suolo d'Italia.* An. Univer. toscane vol. I.) da D'Achiardi (Mineralogia della Toscana pag. 180 vol. II.) e da molti altri.

Lo Stoppani (*Geologia*) contraddisse questa ipotesi, e fu seguìto dal Taramelli nel suo classico lavoro, *Sulle roccie serpentinose del Pavese*; dal De Stefani (*Serpentini della Garfagnana* loc. cit.; *La Montagnola senese.* Boll. Comit. geol. 1879 n. 9, 10), dal Bonney (*Geological magazine* n. 182, 1879 e Boll. Com. geol.), dall'Issel (*Conclusioni di uno studio su i terreni serpentinosi della Liguria orientale.* Boll.

Comit. Geol. 1879 n. 11, 12) e tutti ammisero che le serpentine rappresentavano vere e proprie lave di trabocco sottomarine dell'eocene superiore.

E questo nuovo punto di vista sotto il quale sono state considerate le serpentine è singolarmente comprovato dalla presenza dei fossili negli strati sedimentarî che accompagnano le serpentine, e dal rappresentare i fossili stessi una fauna di mare profondo; solo esso va esteso fino a tutte le sue conseguenze, escludendo completamente qualunque idea di metamorfismo per i galestri e roccie affini, che tanto poi vale supporli metamorfici o fanghi di eruzione che abbiano accompagnato o seguìto il trabocco delle serpentine.

In tale questione io mi associo per conseguenza all'opinione già emessa da De-Stefani, che limita il carattere di roccia eruttiva alle serpentine e loro varietà, ritenendo per sedimentarî i diaspri, i galestri e roccie affini, e sono oltremodo lieto di aver contribuito con le mie ricerche sulle radiolarie, ad aggiungere un nuovo argomento e non indifferente alla finale soluzione di questa questione, che ormai per me è evidentemente risolta.

Il De-Stefani nella stessa comunicazione fatta alla Società toscana (Proc. verb. loc. cit.) trovava nella presenza della manganite un argomento per la sua ipotesi sulla origine sedimentaria dei diaspri.

Io avvertiva presso a poco lo stesso nella mia comunicazione più volte citata.

Indipendentemente dal fatto già per se stesso importante per dimostrare la origine della manganite, l'essere questa compagna dei diaspri, oltre alla circostanza del rinvenimento delle radiolarie nei diaspri manganesiferi di Rapolano e Montevaso, basterà ricordare i risultati ottenuti negli scandagli oceanici. Wyville Thomson (Proceed. of r. Soc. vol. XXII. n. 154 pag. 426) riferendo di alcuni scandagli fatti nei mari australi, avverte che i noduli di manganese cominciavano a mostrarsi nei fondi calcarei, per poi divenire sempre più abbondanti con la profondità e specialmente nell'argilla rossa (*red-clay*) della zona degli abissi; e questo fatto è stato osservato in tutti gli scandagli praticati nelle grandi profondità oceaniche.

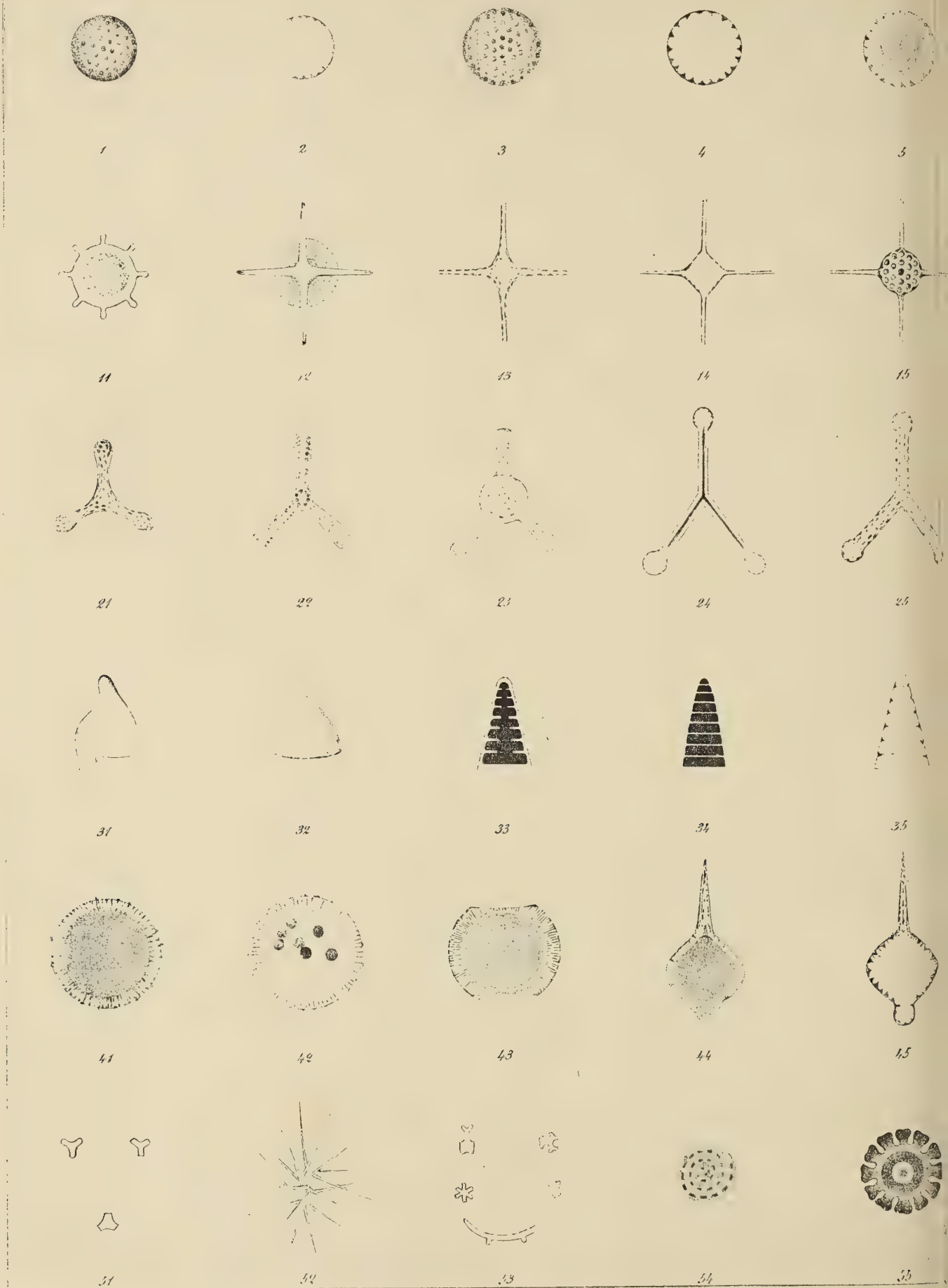
Così mentre il De-Stefani tra molti altri argomenti deduceva la origine sedimentaria dei diaspri dalla presenza della manganite, io ammetto invece che la manganite sia sedimentaria per essere accompagnata ai diaspri; e ciò senza intendere di fare un inutile giro di parole, ma solo per rendere più chiara l'idea, che le due roccie non possono avere che un' unica ed identica origine, specialmente in tutti quei casi nei quali si accompagnano reciprocamente.

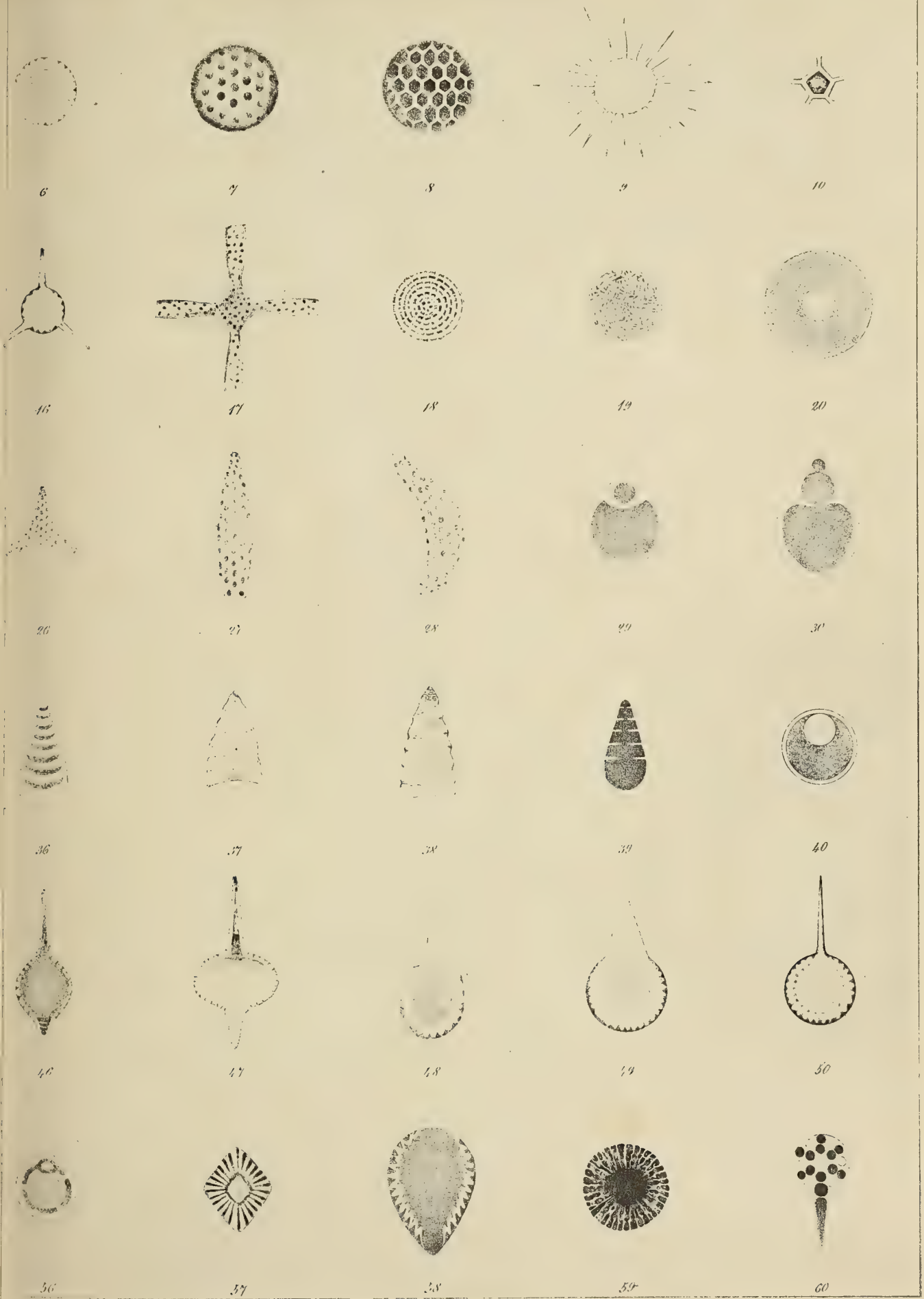
Nè diversamente potrei concludere, nonostante che molti ritengano potere essersi prodotta la manganite così comune in Toscana (v. fra gli altri Issel, *Intorno a un minerale manganesifero nel senese.* Rivista scientifico-industriale anno VIII. pag. 361) per l'afflusso di sorgenti manganesifere sottomarine; tolte le roccie che accompagnano costantemente la manganite ad una supposta azione metamorfica, non vedo perchè dovrei conservarla per una piccola parte delle medesime, quando ciò che avviene attualmente in condizioni simili, ne spiega sufficientemente la origine.

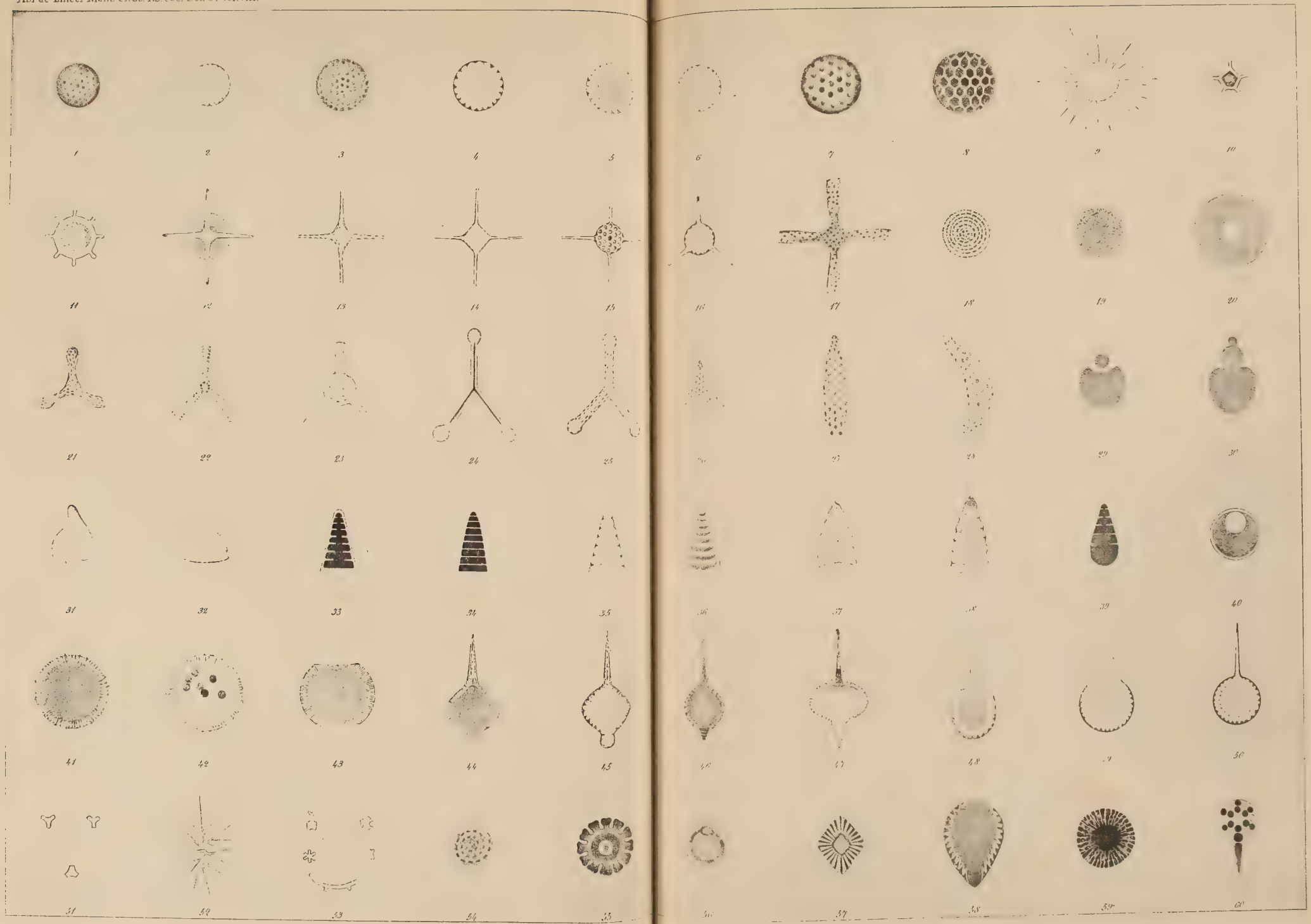
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA E LOCALITÀ DELLE SEZIONI FIGURATE:

Fig. 1	*Ethmosphaera minuta*	Castiglione,	Creta.
» 2	» »	»	»
» 3	*Ethmosphaera vulgaris*	Limite	Eocene
» 4	» »	»	»
» 5	» »	»	»
» 6	» »	»	»
» 7	» *siphonophorites*	Pietra	»
» 8	*Heliosphaera echinoidites*	Limite	»
» 9	*Raphidococcus Lurianensis*	Pietra	»
» 10	*Doratas pis* sp.	Pietra	»
» 11	*Heliodiscus simplex*	Rapolano	Lias
» 12	*Actinomma* sp. A	Limite	Eocene
» 13	» » B	»	»
» 14	» » C	Pietra	»
» 15	» » D	Crevole	»
» 16	» » E	Limite	»
» 17	*Histiastrum? Lurianensis*	Pietra	»
» 18	*Trematodiscus soritoides*	»	»
» 19	*Spongodiscus* sp.	Crevole	»
» 20	*Actinomma* sp. F	Limite	»
» 21	*Euchitonia muellerites*	Pietra	»
» 22	» *clathrata*	Limite	»
» 23	» *amoena*	»	»
» 24	» *grandis*	Pietra	»
» 25	» *Crevolensis*	Crevole	»
» 26	» *dubia*	Pietra	»
» 27	*Cornutella pseudoprofunda*	»	»
» 28	» *pseudoclathrata*	»	»
» 29	*Lithopera ovata*	Limite	»
» 30	» *elongata*	»	»

Fig. 31	*Dicthiophynus* sp.	Pietra	Eocene
» 32	» »	»	»
» 33	*Polystichia Ehrenbergi*	Tocchi	»
» 34	» »	Limite	»
» 35	» »	»	»
» 36	» »	Romito	»
» 37	» *Haeckeli*	Limite	»
» 38	» »	Pietra	»
» 39	» *Muelleri*	Crevole	»
» 40	*sp. indeterminata*	Limite	»
» 41	*Lithocircus Haeckeli*	Limite	»
» 42	» »	»	»
» 43	» *truncatus*	»	»
» 44	*Urocyrtis Emmae*	»	»
» 45	» »	Pietra	»
» 46	» *Amaliae*	»	»
» 47	» *De Stefanii*	Limite	»
» 48	*Adelocyrtis pala*	Pietra	»
» 49	» *cometa*	Crevole	»
» 50	» *spinosa*	Limite	»
» 51	*Sezioni di spicule ind.*		
» 52	*Spicule ind.*	Pietra	»
» 53	*Sezioni di spicule ind.*	»	»
» 54	*Indeterminata*	Limite	»
» 55	»	»	»
» 66	»	»	»
» 57	*Lithocircus rhombus*	»	»
» 58	*Indeterminata*	»	»
» 59	»	»	»
» 60	»	Pietra	»


1
2
3
4
5
11
12
13
14
15
21
22
23
24
25
31
32
33
34
35
41
42
43
44
45
51
52
53
54
55


6
7
8
9
10
16
17
18
19
20
26
27
28
29
30
36
37
38
39
40
46
47
48
49
50
56
57
58
59
60



Apparecchio
per la determinazione dell'equivalente meccanico del Calore.

Nota del dott. ADOLFO BARTOLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

La determinazione dell'equivalente meccanico del calore è stata il soggetto di molte ricerche sperimentali da parte dei fisici. Ma dopo tanti studî siamo ancora incerti sul valore che si deve assegnare a questo equivalente: mentre alcuni fondandosi sulle dirette misurazioni del Joule ammettono 425 all'incirca, altri invece appoggiandosi sopra altre considerazioni tendono ad ammettere un numero assai superiore a 425 e segnatamente assai prossimo a 433 (1). Ma quantunque i metodi adoperati e le determinazioni fatte sin qui siano in tanto numero, possiamo dire che solo poche sono di tal natura da ispirare confidenza nei risultati ottenuti.

Nei metodi anche i migliori fin qui adoperati la determinazione dell'equivalente dipendeva da osservazioni alle quali, per la natura del metodo, bisognava far subire delle correzioni non insignificanti e non sempre molto esattamente determinabili; per cui possiamo dire senza tema di errare, che se i valori già trovati per l'equivalente non sono tanto discordi, ciò è da attribuire più che altro alla valentìa degli sperimentatori e un poco anche a questo, che conoscendosi dallo sperimentatore i limiti entro i quali esser deve compreso il valore dell'equivalente, ciò serviva di norma per accertarsi se nel metodo da lui adoperato fosse stato commesso qualche errore significante, o per lo meno questa conoscenza faceva sì che lo sperimentatore non tenesse conto di quei risultati nei quali il valore dello equivalente troppo si scostava dai limiti entro i quali deve essere compreso. Ed a conferma di quel che ho detto, si può osservare che nelle prime determinazioni, quando si era più incerti che non oggi sul vero valore dell'equivalente, sperimentatori insigni e d'incontestabile valentìa hanno trovato per l'equivalente un valore moltissimo diverso da quello ora ritenuto il più probabile. E ciò è da attribuirsi principalmente alla difficoltà di tali

(1) Conf. Rühlmann, *Handbuch der mechanischen Wärmetheorie* Braunschweig 1878; Verdet, *Oeuvres, Théorie mécanique de la chaleur*, tom. 7° ed 8°; Hirn, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris 1875 (3 vol.). Nel vol. I. pag. 115 a 118 è riportata la tavola pubblicata dalla società di Fisica di Berlino relativamente ai valori dell'equivalente ottenuti nelle determinazioni più meritevoli di fiducia, con l'aggiunta dei resultati ottenuti dall'Hirn. Vedi anche: Wüllner, *Experimental Physik* Bd. III. pag. 354 et seg.; Mousson, *Die Physik auf Grundlage der Erfahrung*, Bd. II. pag. 94; Duprè, *Th. méc. la chaleur*, Paris 1869 pag. 22.

determinazioni, per la grandezza appunto del valore dell'equivalente, per cui un piccolo errore (specialmente nella misura calorimetrica) influisce sensibilmente sulla terza od anche sulla seconda cifra significativa di quel valore, come ne sarà persuaso chi con qualche attenzione abbia letto i processi di quelle determinazioni (anche di quelle accettate con maggior confidenza). Io ritengo che un metodo esatto col quale si volesse con tutta la precisione possibile determinare l'equivalente meccanico del calore, debba fondarsi sopra una diretta trasformazione del lavoro in calore, perchè così son tolte di mezzo le incertezze che provengono dal calcolare il resultato finale per mezzo di valori intermedî non sempre esattamente determinabili, i quali, anche nel caso più favorevole sperimentato sin qui, lasciano campo a discussione sulla esattezza del resultato finale: e ciò si può dire (per esempio) di alcune delle determinazioni dell'equivalente dove s'impiega la trasformazione di elettricità in calore e di altre ancora in sostanza non dissimili. Un metodo esatto e al di sopra di qualunque obbiezione deve fondarsi sulla diretta trasformazione del lavoro in calore; e tanto più sarà pregevole per quanto più piccolo sarà il numero delle correzioni anche esattamente determinabili che si devon fare agli elementi che entrano nel calcolo dell'equivalente e per quanto più piccola sarà l'entità di queste correzioni. Per tali ragioni io credo che abbia qualche interesse il metodo che ora sono per descrivere e che fu da me adoperato in condizioni (però) non le più favorevoli, non consentendomi di più i mezzi di cui posso per ora disporre.

Il principio del metodo da me adoperato è il seguente: una massa di mercurio esattamente determinata, e ad una temperatura esattamente di zero gradi, con una pressione esattamente determinata, passa per un tubo di acciaio di diametro interno così piccolo e di lunghezza tale che la velocità alla uscita sia sensibilmente nulla, la temperatura del tubo essendo pur mantenuta a zero gradi; si determina la quantità di ghiaccio fusa e se ne deduce la quantità di calore sviluppata.

La figura 1 della tavola annessa rappresenta l'apparecchio da me adoperato in queste esperienze. Esso è formato da un prisma verticale di legno A B C D E a base quadrata, alto circa 8 metri e grosso più di due decimetri, incastrato solidamente nel suolo e fissato alle pareti della sala per mezzo di tiranti e di staffe di ferro. Su questo prisma od asta è fissata invariabilmente una solida mensola B la quale sorregge una campana di vetro I di 20 centimetri di diametro: la campana è munita in basso di una larga tubulatura alla quale è fissato con mastice un tubo di ferro di due centimetri di diametro interno; al tubo di ferro è solidamente attaccato in *c* un tubo di gomma elastica di 18 millimetri di diametro interno, rivestito esternamente di una guaina di cotone ben resistente, rinforzata da una fasciatura fatta con nastro assai largo. Il tubo così fasciato può tenere per lunghissimo tempo il mercurio con pressioni assai forti, anche di 7 od 8 atmosfere senza perderne goccia (1). L'altro estremo del tubo di gomma è inserito in *s* sopra un tubo di

(1) L'impiego di questo tubo flessibile e ben resistente di gomma elastica semplifica molto la costruzione dell'apparecchio: esso fu già adoperato nel 1874 dal chiarissimo prof. Emilio Villari nelle sue esperienze: *Sull'efflusso del mercurio per tubi di vetro di piccolo diametro.* Nuovo Cimento, serie 2ª tom. XV. pag. 263, alle quali esperienze io ebbi la ventura di assistere essendo allora suo aiuto.

ferro lungo 180 centimetri e di 20 millimetri di diametro interno, composto di due grosse canne da fucile riunite insieme per mezzo di viti con cuoio ecc.: il tubo *s d e* è unito al rubinetto *f* di acciaio, a perfetta tenuta, munito di un foro di 18 millimetri di diametro; il rubinetto è riunito ad un recipiente di ferro *g* di forma sferica, della capacità di un litro; in fine al recipiente *g* è riunito un tubo di acciaio H, verticale, e a pareti sottili (compatibilmente con la pressione che deve sostenere) di un diametro interno di 18 millimetri circa, il quale termina in basso con un tubo capillare di acciaio, per il quale deve fluire il mercurio. Il diametro dei tubi *I c s d e g H* contenenti mercurio è così grande, (mai inferiore a 18 millimetri) che si può esser sicuri che la totalità della pressione si esercita sul mercurio contenuto nel tubo capillare.

Il recipiente *g* è circondato da un grande vaso cilindrico V che si empie di neve ben pura; ne contiene una tal quantità che possa nell' inverno durare per qualche giorno, senza bisogno di rinnuovarla. Il tubo *s d e* può scorrere verticalmente guidato da cuscinetti *d* sorretti da una staffa di ferro *G d* solidamente fissata all'asta di legno A C D E; tutto il sistema del tubo *s d e*, del rubinetto *f* e del recipiente *g* si appoggia ed è fissato con viti e con dadi al fondo del recipiente V e forma un tutto che può sollevarsi ed abbassarsi con una corsa di una trentina di centimetri, per mezzo di una binda *m n* e di sei guide u, t, u', t' (delle quali due non si vedono nella figura) scorrevoli sopra tre cilindri verticali d'acciaio $u, t, u', t', \ldots$. solidamente fissati all'asta A B C D E.

Il sollevarsi od abbassarsi del sistema *s d e f g H V* è reso possibile dalla flessibilità del tubo di gomma, il quale passa, senza esser teso sulla gola di 4 grandi carrucole situate in uno stesso piano verticale, per impedire che il tubo di gomma nei movimenti del sistema prenda delle piegature troppo sentite.

Sopra un banco solidamente fissato al suolo è un calorimetro Bunsen *i* (1) circondato da un doppio vaso di zinco, il vaso esterno ha 45 centimetri di diametro e 50 centimetri di altezza, quello esterno 23 centimetri di diametro e 37 centimetri d'altezza: il vaso interno comunica con l'esterno per mezzo del fondo che è munito di tanti piccoli fori dai quali può uscire l'acqua di fusione della neve che vi si colloca: nell'intervallo esistente fra i due vasi si colloca altra neve od anche ghiaccio; questa serve a difendere dal raggiamento il vaso interno, nel quale la neve si può conservare così per molti giorni. Infine il vaso esterno G è ricoperto così esternamente come sul fondo da una veste di feltro spesso un centimetro come si usa pei calorimetri Berthelot (2). Infine si può spostare la posizione del calorimetro sul banco per mezzo di una vite *o p* e di una manovella *o q*.

La figura (3) indica la disposizione del tubo d'acciaio *a b c d e* con dimensioni più grandi di quelle da me adoperate: la parte *a b* per la quale comunicava col resto dell'apparecchio, era stata slargata internamente per modo che il mercurio non incontrasse resistenza sensibile che un po' al di sotto del punto *b*: le pareti del

(1) Bunsen Pogg. Ann. CXLI pag. 1 e Bibl. Un. de Genève, 1871, T. 40 pag. 25. Vedi anche: A. Schuller e V. Wartha, *Annal. der Physik und Chemie* N. F. II. s. 359.

(2) Berthelot, *Essai de mécanique chimique* T. I. pag. 140 (Parigi 1879).

tubo *b c d e* erano state ridotte le più sottili possibili. Il tubo *a b c d e* era collegato al recipiente *g* per mezzo del tubo *g l k* nella maniera che è indicata nella figura 2. Si poteva impedire l'uscita del mercurio dal tubo capillare, serrando fortemente la estremità del tubo stesso per mezzo dell'asta *l m* che in *m* portava un pezzettino di cuoio: si agiva sopra quest'asta per mezzo di una leva *e f i* mobile intorno ad un asse orizzontale *p*; premendo in *i* o mantenendovi un peso s'impediva lo sgorgo del mercurio. Quando invece si voleva lasciare uscire il mercurio si toglieva il peso in *i* e si girava di 90 gradi la leva *e f p i* nel senso indicato dalla freccia.

Fu necessario ricorrere a questo sistema di chiusura non bastando il solo rubinetto *r*, a fare cessare del tutto lo sgorgo del mercurio, col chiuderlo: invece il mercurio continuava a uscire, sebbene più lentamente, ancora per qualche minuto, mentre col sistema indicato si poteva far cessare immediatamente l'uscita del mercurio.

Il mercurio sgorgato dal tubo capillare di acciaio si veniva a raccogliere in una provetta di ferro nickelato esternamente, sottile il maggiormente possibile, la quale era sostenuta per mezzo di tre fili di seta nell'interno del serbatoio del calorimetro Bunsen e precisamente in quella parte del serbatoio *l m* che penetra dentro il calorimetro *i*: nello spazio fra la provetta e il serbatoio *l m* si versava dell'acqua stillata la quale serviva come nelle esperienze del Bunsen a trasmettere il calore dalla provetta al calorimetro.

La capacità della provetta era tale che avrebbe potuto contenere 300 grammi di mercurio.

Durante l'esperienze la provetta conteneva il tubo capillare d'acciaio *a b c d e* (fig. 3) e per un'altezza quasi uguale il tubo più grande al quale esso era fissato: al principio della esperienza si collocava nella provetta tanto mercurio, in modo che l'estremo del tubo capillare ne toccasse la superficie.

Per preparare una esperienza si riempiva di mercurio ben puro e perfettamente asciutto l'apparecchio *I c d e s g* versandolo nella campana I, e ci si assicurava che nell'apparecchio non era rimasta aria; si riempiva di neve il vaso V e girando la binda si abbassava il sistema finchè il tubo H con la parte più bassa toccando il fondo della provetta di ferro immersa nel serbatoio del calorimetro incominciasse a tendere i fili di seta per i quali esso era sospeso. In tale posizione il cilindro *x y* (fig. 2) serviva a chiudere in alto, per mezzo di cuoî, e a proteggere lateralmente il recipiente del calorimetro: si colmava allora di neve tutto lo spazio dove poteva esser collocata, in maniera che il vaso V e quello G formassero tutto un corpo alla temperatura della neve fondente. Si aspettavano allora alcune ore e bisognando anche un giorno finchè l'indice del calorimetro *k* Bunsen si spostasse il meno possibile.

Allora si osservava di 15 in 15 minuti la posizione dell'indice: continuate per molte ore queste osservazioni, veduto che il cammino dell'indice era piccolissimo e perfettamente regolare, si apriva il rubinetto F, si toglieva il peso e si faceva ruotare la leva *f i* di 90° nel senso della freccia e così il mercurio passava attraverso il tubo capillare *a b c d e*. Avendo determinato precedentemente la quantità di mercurio sgorgato in un'ora si conosceva esattamente il numero dei minuti occorrenti, perchè sgorgassero 100 oppure 200 grammi di mercurio; questo tempo doveva essere

assai grande acciò fosse piccolissima la velocità d'uscita del mercurio, ma non grandissimo acciò non fossero troppo sensibili le correzioni dovute allo spostamento dell'indice del calorimetro durante quel tempo.

Nelle condizioni in cui esperimentava la durata di efflusso era da 15 a 30 primi. Dopo questo tempo chiudevo l'uscita del mercurio girando, in senso contrario della freccia, la leva fi e caricandola di un peso, seguitava a leggere la posizione dell'indice del calorimetro che continuava a retrocedere regolarmente ancora per qualche tempo, passato il quale (15 a 30′) l'indice rimaneva perfettamente immobile, e di lì a poco riprendeva il solito movimento lentissimo e regolare che aveva in principio d'esperienza. Questi lentissimi spostamenti dell'indice del calorimetro furono assai diligentemente indicati dal Bunsen stesso (3); a me fu impossibile evitarli quantunque io adoperassi della neve ben pura della quale avevo fatta provvista in grandi casse di legno, subito dopo caduta. Devo aggiungere che le temperature in questo inverno (nel quale ho fatto le esperienze) mi furono assai favorevoli; la temperatura dell'ambiente dove faceva le esperienze essendo di pochi decimi di grado o al più di un grado superiore a 0.

Coll'apparecchio che io ho brevemente descritto io poteva valutare esattamente con un errore di certo non superiore a un due decimi del millimetro la pressione del mercurio che usciva, errore piccolissimo se si osserva che questa pressione era circa sette metri $\left(\text{ossia inferiore a } \frac{0,3}{7000} = \frac{1}{23333}\right)$.

Il mercurio uscito (circa 150 grammi) poteva pesarsi con grande esattezza, con un errore di certo inferiore a 5 milligrammi ossia con un errore relativo inferiore a $\frac{5}{150000}$.

Infine la quantità di calore svolta in tali condizioni si poteva misurare con un errore che credo inferiore a $\frac{1}{560}$. Difatti lo spostamento totale dell'indice del mercurio era in media 56 millimetri e si potevano con sicurezza misurare i decimi di millimetro per mezzo di un microscopio.

Vero è che alle misure di pressione e di calore erano da farsi alcune correzioni che ora indicherò.

Infatti la pressione misurata a principio della esperienza, non rimaneva rigorosamente invariata durante l'esperienza: il mercurio si abbassava nella campana I mentre il suo livello si sollevava nel serbatoio di ferro contenuto nel calorimetro. Ma si poteva facilmente conoscere la differenza di livello h (espressa in metri) fra il mercurio della campana I e quello del serbatoio di ferro, dopo un numero t di secondi contati dal principio della esperienza. Chiamata s la sezione della campana e σ quella del serbatoio di ferro, misurate in decimetri quadri, ed H la differenza di livello (in metri) al principio della esperienza; α l'efflusso del mercurio in un secondo (espresso in chilogrammi) e Δ il peso specifico del mercurio si aveva:

$$h = \mathrm{H} - \frac{\alpha}{10\,\Delta}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{\sigma}\right]t$$

(3) Bunsen, loco citato.

e se θ indicava la durata della esperienza (in secondi) e P il peso totale del mercurio uscito (in chilogrammi), la misura del lavoro meccanico eseguito era dato da

$$\int_0^{\theta} \left[H - \frac{\alpha}{10\,\Delta} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\sigma} \right) t \right] \alpha\, dt =$$

$$= HP - \frac{P^2}{20\,\Delta} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\sigma} \right).$$

Il lavoro era dunque esattamente determinabile potendosi conoscere con tutta l'esattezza H, P, Δ, s, σ; inoltre il termine correttivo $\frac{P^2}{20\Delta} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{\sigma} \right]$ era nelle mie esperienze assai piccolo ed esso pure esattamente determinabile. (Si aveva $s = 3$ decimetri quadri; $\sigma = 0,07$, decimetri quadri mentre H era circa 7 metri). Per Δ si poteva assumere il peso specifico del mercurio a 0° senza tema di commettere errore sensibile, avendo io sperimentato nell'inverno, con temperature dell'ambiente di 1° al più superiore al 0°.

Altra correzione era da fare per la differenza della pressione atmosferica esistente al livello inferiore e al livello superiore del mercurio: questa correzione pure piccolissima poteva farsi esattamente conoscendo esattamente la differenza di livello. Altra correzione era da fare relativamente alla densità del mercurio che riempiva il tubo verticale *Icfdefg:* correzione anche questa piccolissima, atteso che la temperatura dell'ambiente, come ho già detto, era poco differente da zero (1).

Alle osservazioni calorimetriche occorreva pure apportare qualche correzione, cioè aggiungere alla deviazione dell'indice di mercurio del calorimetro, la media dello spostamento che in ugual tempo subiva l'indice stesso, un po' avanti e un po' dopo l'esperienza. Questa correzione però era assai piccola: non ha mai superato il centesimo dello spostamento dell'indice durante l'esperienza. Devo aggiungere qui che il calorimetro da me adoperato fu scelto fra sei altri costruiti per me dal fu Geissler di Bonn; il tubo capillare era quasi esattamente calibrato: ne determinai la capacità centimetro per centimetro con pesate, esatte fino al decimo di milligrammo, del mercurio che lo riempiva a zero gradi. La graduazione del calorimetro in unità di calore, dedotta dalla sezione del tubo e dal peso specifico del ghiaccio a zero gradi fu confrontata con quella che trovai sperimentalmente col metodo che indica il Bunsen (Memoria citata) adoperato ancora dai sig. Schüller e Wartha. Io non aggiungerò altro relativamente alle misure calorimetriche, perchè non mi sono scostato da quel che dice il Bunsen nella sua classica Memoria ben nota a tutti i fisici. Col metodo sopra indicato ho eseguite 12 esperienze in buone condizioni: il valore quasi concorde dell'equivalente meccanico dedotto da queste esperienze è stato 428,4 chilogrammi: il valore più grande fu 430,2 ed il più piccolo 426,8, le determinazioni essendo fondate su spostamenti dell'indice del calorimetro di circa 56 millimetri, con una pressione di circa 7 metri di mercurio, e con una massa di mercurio uscita il cui peso era 150 grammi circa. Non riporto per intiero i dati relativi a queste determinazioni perchè io qui mi son proposto

(1) Regnault, *Mémoires de l'Académie des sciences* (1847) pag. 329.

solamente di far conoscere il nuovo apparecchio e i pregi che gli vanno uniti. Le poche esperienze da me eseguite mi hanno persuaso che ove si sperimentasse con pressioni maggiori (e di certo nessuna difficoltà insormontabile vi ha a rendere la pressione 5 o 6 volte quella da me adoperata) si potrebbero rendere piccolissimi i valori relativi delle correzioni ai dati dell'esperienza, inoltre si potrebbe rendere assai grande il riscaldamento del mercurio da poterlo misurare direttamente, non più con un metodo tanto squisitamente sensibile come quello del Bunsen, ma anche con buoni calorimetri di incontrastabile precisione scientifica, come ad esempio quello di Berthelot. E questo è ciò che io mi propongo di fare nell'inverno venturo, se ne avrò i mezzi e se queste mie modeste quanto pazienti ricerche preliminari incontreranno l'approvazione di cotesta illustre Accademia (1).

(1) Il rubinetto di acciaio a perfetta tenuta, adoperato in queste esperienze, fu costruito dal sig. L. Giusti meccanico del Gabinetto di fisica della r. università di Bologna, e il resto dell'apparecchio, dal meccanico e dal personale del Gabinetto di fisica di questo istituto tecnico; i tubi di acciaio capillari furon costruiti in Germania e mi furon procurati dal sig. Wallach di Cassel: i calorimetri Bunsen li aveva costruiti il fu dottore H. Geissler.

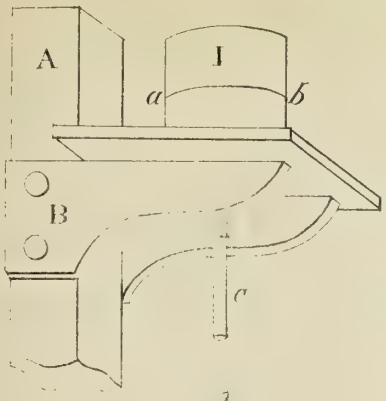
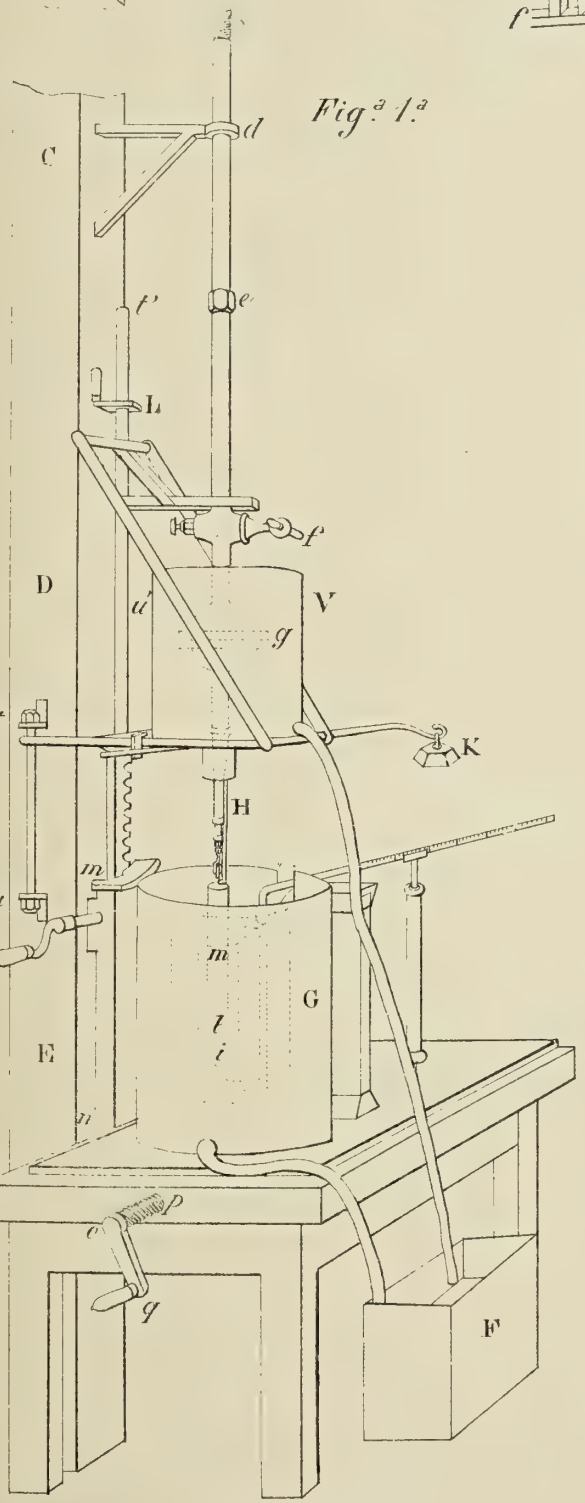


Fig.ª 1.ª



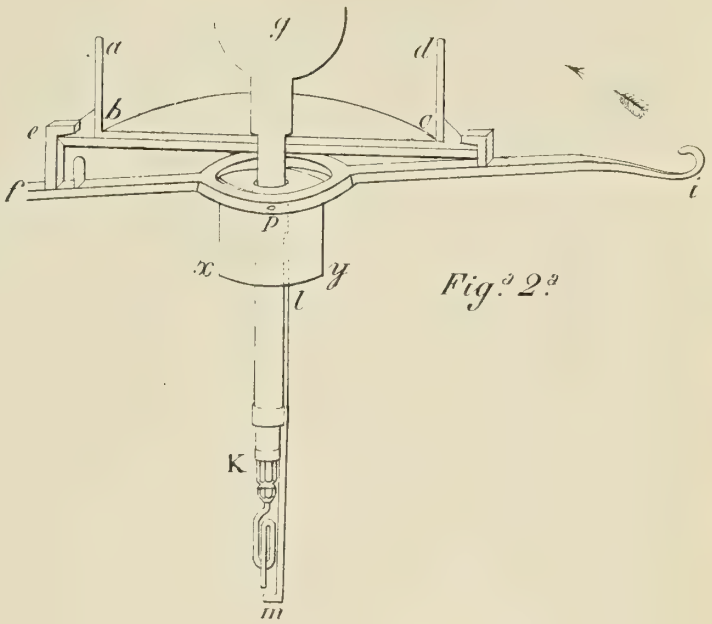


Fig.ª 2.ª

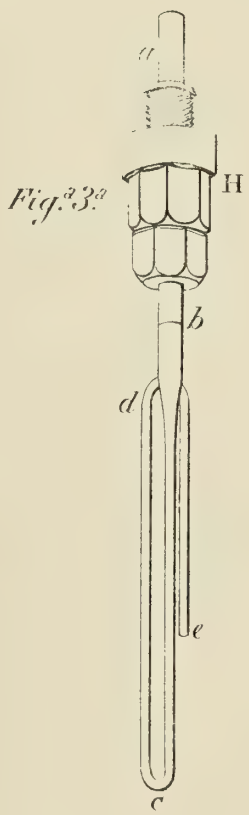


Fig.ª 3.ª

Le leggi delle polarità galvaniche.

Memoria del dott. ADOLFO BARTOLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

In altri precedenti lavori (1) ho descritti nuovi fatti dipendenti dalla polarizzazione degli elettrodi e domandandomene una spiegazione esatta e completa ho trovato che oggi la scienza della elettricità male poteva rispondere, perchè non si conoscono le leggi con le quali si formano le polarità galvaniche. Si può dire anzi che su tal punto è nella scienza una grande lacuna, come deve esserne persuaso chi con qualche attenzione abbia letti i più insigni trattati di elettricità come quelli del Maxwell e del Wiedemann. E quantunque i fenomeni delle polarità galvaniche, dal 1802 fino ad ora siano stati il soggetto di tanti pregevoli studî, pure coi dati che possediamo non solamente non è possibile risolvere, ma nemmeno accostarsi alla soluzione del problema seguente:

« Determinare la forza elettromotrice di polarità prodotta dal passaggio di una determinata corrente, per un dato tempo, con elettrodi dei quali si conosca la natura e la superficie, per un noto elettrolite.

Si avrà la soluzione di questo problema quando siano date quelle dei due seguenti:

1. Determinare la forza elettromotrice di polarità generata dal passaggio di una corrente (la cui intensità $I = f(t)$ funzione del tempo sia nota) per un dato elettrolite con dati elettrodi, dopo un tempo così breve decorso dall'attacco della corrente polarizzante, che in tal tempo si possa trascurare la distruzione della polarità.

2. Determinare la legge con la quale diminuisce col tempo una nota forza elettromotrice di polarità, generata su dati elettrodi in un dato elettrolite, da una data corrente che ha circolato in determinate condizioni.

Il secondo di questi problemi, che fu il soggetto di alcune ricerche del signor Bernstein (2), attinge la sua importanza principalmente da questo, che serve cioè alla

(1) Nuovo Cimento, a. 1878 e 1879.

(2) Bernstein, *Ueber den zeitlichen Verläuf des Polarisations Stromes;* Pogg. Ann. T. 104 p. 177 anno 1875.

soluzione del problema generale: si può subito prevedere che non si potrà ottenere una soluzione semplice e di rigore matematico, in quanto che son troppe e troppo variabili le cause per le quali si dissipa col tempo la polarità: esso formerà il soggetto di un'altra mia Memoria di prossima pubblicazione.

La soluzione del primo di questi problemi è quella che maggiormente importa; si tratta infatti di determinare le leggi vere e proprie, le leggi elementari (in ordine al tempo) delle polarità galvaniche: era da supporre che esse fossero assai semplici considerando la natura di queste polarità. Il Maxwell nel cap. V. della parte II. del suo trattato della elettricità e del magnetismo riassume chiaramente le cognizioni che si hanno oggi sopra questo punto importante della scienza e prevede con molto acume alcun che di quelle leggi, senza indicarne veruna conferma sperimentale, tranne quella di poche esperienze del Varley (1) eseguite con un metodo al quale si possono muovere troppe obbiezioni.

In questa Memoria mi propongo di dare, con molta generalità, la soluzione del primo problema, quale essa risulta da una serie lunga e paziente di diligenti determinazioni, nelle quali ho impiegato oltre due anni.

PARTE PRIMA

Metodo tenuto in queste ricerche.

Essendomi proposto di determinare la forza elettromotrice di polarità prodotta dal passaggio di una corrente elettrica (per un dato elettrolite con dati elettrodi) per un tempo così breve che in tal tempo fosse trascurabile la distruzione della polarità, ho dovuto ricorrere ad apparecchi speciali, nessuno di quelli già esistenti potendo servire completamente allo scopo che mi proponeva.

Nell'apparecchio da me adoperato si possono distinguere due parti:

1. Un interruttore galvanico che serve a far passare per un dato tempuscolo la corrente polarizzatrice.

2. Un apparecchio che serve a misurare la forza elettromotrice di polarità immediatamente dopo il passaggio della corrente polarizzante.

Interruttore. — Mi occorreva un interruttore galvanico col mezzo del quale, per un tempo brevissimo, esattamente determinabile e variabile secondo i bisogni dell'esperienza, si potesse far passare la corrente per un voltametro. Fra i varî interruttori galvanici, alcuni dei quali assai pregevoli, come quelli del Bernstein, dell'Helmholtz, del Cazin, del Blaserna e del Felici, io ho preferito accostarmi alla disposizione di quest'ultimo che mi parve il più esatto e di un uso assai facile, apportandovi però alcune modificazioni che mi parvero necessarie perchè potesse servire completamente allo scopo che io mi proponeva.

I vantaggi che presenta l'interruttore Felici da me adoperato, sono: 1. Permette di far passare la corrente elettrica per un tempo piccolissimo (anche $^1/_{20000}$ di secondo)

(1) Varley, Philos. Mag. Fourth Series, Vol. XLI. pag. 312 (1871). Si veda anche la Memoria del Kohlrausch negli Ann. di Pogg. T. 147 pag. 301 anno 1872.

esattamente determinato; 2. La forza motrice ed il momento d'inerzia del sistema mobile sono così grandi, che le variazioni possibili nelle resistenze d'attrito e che esso incontra non modificano sensibilmente la legge del suo movimento. Così si può mantenere l'apparecchio per mesi intieri in condizioni tali che la durata del passaggio della corrente resti invariabile; 3. Si può riconoscere se veramente la durata del passaggio della corrente polarizzatrice è così piccola, da potersi trascurare la distruzione della polarità in questo tempo.

La tav. I. rappresenta l'apparecchio da me adoperato, che non differisce molto dall'interruttore Felici: perciò ne darò una descrizione brevissima, accennando più che altro a ciò in cui differisce da quello descritto dall'illustre prof. Felici (1).

Un peso T che nelle mie esperienze ha variato da 80 a 162 chilogrammi, sostenuto da un piatto simile a quello che servì al Wertheim nelle sue esperienze sulla tenacità dei metalli, tende fortemente una cinghia di cuoio *l bm*, tagliata da un pezzo che serviva a trasmettere il movimento di una macchina a vapore; la cinghia *l bm* passa per la gola di una puleggia *b* mobile intorno ad un asse orizzontale; la cinghia è fissata all'altro estremo ad un tirante *m* di ferro (nella figura non si vede che una parte del tirante), il quale con un cuscino di acciaio preme sopra il tagliente orizzontale di un coltello d'acciaio: il tagliente del coltello è alla distanza di circa 3 centimetri dall'asse di rotazione del sistema mobile dell'interruttore. Il sistema mobile si compone di varie parti: di una specie di leva AB che chiamerò la leva principale, lunga 60 centimetri, grossa 18 millimetri, costruita in acciaio. La fig. 2 della tav. II. rappresenta questa leva. Agli estremi di questa sono fissati fortemente per mezzo di viti di pressione i pezzi A e B; uno dei quali è rappresentato a parte nella fig. 1 della tav. II. Questi pezzi portano ciascheduno due leve, od aste di acciaio *ab*, *a'b'* perfettamente isolate dalla leva principale, per mezzo di lastre di ebanite: queste leve *ab*, *a'b'* urtando nelle altre M, N (tav. I.) servono a sollevarle successivamente e quindi a interrompere il contatto elettrico nei punti M, N, L. Le stesse leve *ab*, *a'b'* possono girare intorno ad un asse orizzontale *aa'* e sollevarsi un poco, quando dopo la caduta del peso T si ricarica l'apparecchio, lo che si fa traendo la corda *e n p q* (tav. I.) di cui un capo è fissato in alto di una sbarra E F invariabilmente collegata col sistema mobile e perpendicolare alla leva principalmente A B. (Il punto E si trova a circa 3 decimetri dall'asse di rotazione del sistema). Delle molle servono a ricondurre le leve *ab*, *a'b'* nella posizione normale dopo che queste hanno sorpassato le leve M, N. Le leve stesse *ab*, *a'b'* non possono affatto ruotare intorno all'asse *aa'* durante la caduta del peso T.

Il sistema mobile col peso T sollevato si mantiene fisso per mezzo di un cricchetto *c*, che non si vede che punteggiato nella tav. I. fino al momento in cui si vuol far passare la corrente. Allora si solleva il cricchetto, il che si può fare anche a distanza per mezzo di una funicella che passa per la gola di due carrucole fissate in alto; il peso T discende mettendo in moto tutto il sistema mobile. La corda E *n p q* porta un peso *q* che riposa sul suolo mentre l'apparecchio è caricato, e che viene ad essere sollevato per mezzo della corda E *n p q*, dopochè per la discesa del peso T,

(1) Felici, Nuovo Cimento, serie 2ª T. XII. pag. 115.

la leva A B ha già distaccati e sorpassati di parecchi centimetri i contatti M, N, L. Il peso q si regola in modo che il movimento del sistema venga estinto senza scuotimenti nell'apparecchio. Due molle di presa S servono ad arrestare stringendolo fortemente l'estremo più basso F della sbarra E, F, nella sua ultima posizione di salita.

I contatti M, N, L, non differiscono molto da quelli descritti dal prof. Felici; sono formati ciascheduno da due dischi di argento di circa due centimetri di diametro e leggermente sferici (con un raggio di curvatura di circa 7 centimetri), ma l'uno è concavo, mentre l'altro è convesso, o sono stati lavorati l'uno sull'altro in maniera che combacino perfettamente. Le molle che servono a mantenere i contatti M, N, L, sono molto forti, per assicurare bene la bontà dei contatti; nè col farle molto forti era da temere che il sistema mobile perdesse sensibilmente di velocità, dacchè nel mio apparecchio era tanto grande il peso tensore e assai considerevole la sua discesa nei momenti del distacco dei contatti M, N, L.

Parimenti, come nell'interruttore Felici, i pezzi L, M, N, sono portati da carretti scorrevoli su aste verticali solidamente fissate sopra un banco di metallo; ed i carretti possono sollevarsi od abbassarsi di quantità facilmente misurabili fino al ventesimo del millimetro, per mezzo di viti micrometriche e di vernieri.

Come è indicato chiaramente nella figura della tav. I., quando i tre contatti M, N, L sono stabiliti, la corrente della pila trova chiuso il circuito in M; solamente una derivazione passerà nel circuito di cui fa parte il reostata, e questa derivazione sarà tanto più piccola per quanto più grande è la resistenza reostatica, e nel circuito N V W L N, di cui fanno parte una bussola Wiedemam W ed un voltametro, non passerà che una derivazione della derivazione della corrente principale: se i contatti in M e in N son buoni, si capisce come per il circuito della bussola e del voltametro non passerà corrente; del che io aveva sempre cura di assicurarmi.

Dopo lasciato cadere il peso T, il contatto M è il primo ad essere distaccato, quello N vien distaccato immediatamente dopo e quello L per ultimo. Con tale disposizione si evita che il reostata venga percorso continuamente dalla corrente, lo che col riscaldarlo ne varierebbe la resistenza: inoltre la resistenza del reostata giova a rendere infinitamente piccola la corrente derivata che a contatti stabiliti passa pel voltametro.

Il cilindro D, il cui asse coincide con quello di rotazione del sistema mobile, serve per misurare le durate degli intervalli per i quali passa pel circuito del voltametro V e della bussola W; perciò si ricuopre la superficie del cilindro di nero fumo e col mezzo di un diapason scrivente si determina la durata di passaggio della corrente: nella Memoria del prof. Felici è chiaramente indicata la maniera di servirsene (1). Il diapason da me adoperato faceva 512 vibrazioni semplici al secondo. L'interruttore di cui mi son servito continuamente in queste ricerche, per quasi due anni, fu costruito in parte dal sig. M. Pierucci di Pisa, e in parte dal Meccanico di questo Istituto sig. R. Turchini; costò circa L. 1200.

(1) Felici, Nuovo Cimento, serie 2ª T. XIII. pag. 266.

Determinazione della forza elettromotrice di polarità.

Mi occorreva di misurare con esattezza la forza elettromotrice di polarità immediatamente dopo il passaggio della corrente polarizzante. Perciò ho adoperato dapprima l'elettrometro di Thomson modificato dal Brandly, ma dovetti abbandonarlo perchè troppo tempo richiedevano le determinazioni della forza elettromotrice e perchè queste così determinate non andavano esenti da errori. Difatti per rendere l'elettrometro adatto a tali misure occorreva che questo fosse ridotto a tal grado di sensibilità che la forza elettromotrice di un solo elemento Daniell producesse una deviazione impulsiva di un 100 parti della scala; e per giungere a tale sensibilità metteva la lemmiscata mobile in comunicazione elettrica con uno dei poli di una pilina di 400 elementi zinco-acqua-rame perfettamente isolati, mentre l'altro polo della pila era in perfetta comunicazione col suolo: le due coppie di settori venivano messe in contatto elettrico cogli elettrodi del voltametro immediatamente dopo il passaggio della corrente polarizzante. Ma coll'elettrometro ridotto a così grande sensibilità variava rapidamente e senza alcuna legge determinata la posizione dello zero della scala: inoltre la durata di oscillazione era così grande che in tal tempo lo spostamento dello zero non poteva trascurarsi; si aggiunga che dopo fatta una osservazione non era possibile un'altra se non dopo un tempo relativamente assai lungo; mentre mi occorreva che tali osservazioni fossero fatte assai rapidamente in modo che una serie completa, che si componeva di una quarantina almeno di determinazioni, potesse compiersi nella giornata. Per tali cause e per altre ancora rinunciai all'uso dell'elettrometro e ricorsi ad un altro metodo, che bene adoperato riunisce i vantaggi della precisione con quelli della prontezza.

Il principio di questo metodo che è stato adoperato da altri per la determinazione delle forze elettromotrici è il seguente. Se di un circuito fanno parte una bussola reometrica, un reostata e una pila, e se la resistenza interna della pila è trascurabile di fronte a quella del rimanente del circuito, la intensità della corrente, a corrente stabilita, è proporzionale alla forza elettromotrice della pila stessa. Se poi si fa passare la corrente per un tempo piccolissimo di fronte a quello impiegato dall'ago a spostarsi sensibilmente dalla sua posizione di quiete, e se gli angoli corrispondenti alle deviazioni dell'ago sono piccolissimi, allora le deviazioni impulsive di questo son proporzionali alle durate del passaggio della corrente, purchè il telaio della bussola non sia ricoperto di troppo grande numero di strati di filo. È pur chiaro che rendendo brevissime queste durate, la forza elettromotrice della pila ancora che variabile col tempo, rimarrà costante per tutta la durata del passaggio: inoltre la resistenza dell'elettromotore essendo piccolissima rispetto a quella delle altre parti del circuito, le deviazioni saranno indipendenti dalle possibili variazioni di resistenza dell'elettromotore stesso, e saranno proporzionali alla forza elettromotrice che ha l'elettromotore in quel tempuscolo.

Per adoperare questo metodo per la misura delle forze elettromotrici di polarità ho aggiunto al sistema mobile dell'interruttore (tav. I.) un'altra parte VV'PCOZ, che è formata da un grosso dado di legno imbevuto di paraffina, sul quale è fissato invariabilmente un pezzo di ebanite, la cui superficie lavorata al tornio fa parte di una porzione della superficie di un cilindro di circa 40 centimetri di diametro e di cui

l'asse coincide esattamente con l'asse di rotazione del sistema mobile. L'intiero pezzo può collocarsi in varie posizioni col fare agire le viti di correzioni V, V' munite di dadi di fermata, e di cui le testate premono sopra lastre di ferro u, u' incastrate nel dado di legno; un grosso dado Z e quattro viti munite di galletti (che non si vedono nella figura) permettono di fissare solidamente il dado al resto del sistema mobile nella posizione voluta. Sul cilindro di ebanite OP è incastrata solidamente una striscia di argentana rs, parallela all'asse del cilindro, che è stata tornita insieme col cilindro di ebanite. Un'asta verticale CQ di acciaio solidamente fissata sul banco dell'apparecchio porta una robusta molla verticale munita di un coltello di argentana il cui tagliente è orizzontale. Il coltello preme sul cilindro PO, e per impedirne le oscillazioni una vite di pressione t con l'intermezzo di un grosso pezzo di cuoio agisce sulla molla che porta il coltello. Come si vede chiaramente dalla figura, quando per la discesa del peso P viene a ruotare il sistema mobile, il coltello C per un tempo brevissimo tocca la lastra s e vien chiuso così un circuito C s r x G R V y Q C (che chiamerò circuito di polarità) di cui fa parte il voltametro, un reostata e un galvanometro a specchio di straordinaria sensibilità: quando poi il coltello non tocca più la lastra di argentana allora questo circuito si trova perfettamente interrotto.

Il dado che porta il disco di ebanite si colloca in maniera che venga chiuso il circuito di polarità immediatamente dopo che è passata la corrente polarizzante. Il reostata che faceva parte del circuito di polarità era un reostata a solfato di zinco (soluzione densissima) con elettrodi di zinco amalgamato: oppure un filo sottilissimo di rame teso a zig-zag sopra un gran telaio di legno, alto un metro e lungo due; così per evitare induzione nelle varie parti del circuito. Il galvanometro era un eccellente galvanometro Magnus, costruito dal Sauerwald di Berlino, che fu acquistato molti anni or sono dal chiar. prof. E. Villari per questo gabinetto di fisica: i telai del galvanometro erano assai lunghi ma non tanto che non si potesse applicare assai esattamente la legge di Pouillet; il sistema dei due aghi era reso quasi completamente astatico. La sensibilità di questo galvanometro era così grande che la corrente di un elemento Daniell era sufficente a far sparire dal cannocchiale la scala quando nel circuito s'interponeva la resistenza del corpo tenendo con le mani i due capi del circuito.

Per il buon uso di questo metodo per la determinazione delle forze elettromotrici di polarità occorreva che nelle condizioni delle esperienze:

1° La forza elettromotrice di polarità non fosse variata nè per dissipazione di polarità durante il passaggio della corrente polarizzatrice, nè per avere fornito la corrente di polarità che faceva deviare l'ago del galvanometro Magnus;

2° Le deviazioni impulsive del galvanometro Magnus fossero proporzionali a quella forza elettromotrice, e si conoscesse il rapporto fra quelle e fra queste.

Che la prima condizione fosse soddisfatta, si poteva facilmente dimostrare col seguente artifizio. Sulla superficie del cilindro di ebanite O P, pochi millimetri al disotto della stricia v s, era incastrata un'altra striscia metallica esattamente uguale alla precedente. Essendo sensibilmente uniforme il movimento del sistema mobile entro l'intervallo di pochi millimetri, se la prima condizione era soddisfatta si doveva avere la stessa deviazione impulsiva al galvanometro Magnus, sia con la striscia v s sia con questa seconda.

L'esperienza dimostrò la perfetta proporzionalità fra le deviazioni impulsive del galvanometro e la forza elettromotrice qualunque fosse la resistenza dell'elettromotore purchè piccolissima di fronte a quella del resto del circuito: questa esatta proporzionalità si verificò per forze elettromotrici comprese fra $^1/_{100}$ Daniell e 3 Daniell. Per ottenere le debolissime forze elettromotrici per questa verificazione prendeva una derivazione di una corrente che passava per il filo di un reocordo, metodo già usato dal signor Fleeming (1).

Una volta dimostrata la esatta proporzionalità fra le deviazioni impulsive e la forza elettromotrice, se ne determinava giorno per giorno il rapporto, introducendo nel circuito di polarità un elemento Daniell ben preparato e a piccolissima resistenza interna. Questa determinazione si ripeteva a principio e a fine di ciascheduna serie di esperienze.

Il bicchierino a mercurio δ e i fili V α e γ δ servivano per chiudere il circuito α δ γ V dopo ciascheduna esperienza, e si ripeteva l'esperienza solo quando dopo un certo tempo ci si era assicurati, col chiudere un istante il circuito V R G β δ γ V che non rimaneva sugli elettrodi polarità residua sensibile.

Pila. — La pila che doveva fornire la corrente polarizzatrice variò nelle mie esperienze a seconda della natura dell'elettrolite: quando questo era buon conduttore, la pila si componeva da uno a quaranta elementi Daniell. Quando la resistenza dell'elettrolite era considerevole come nel caso dell'acqua stillata o della soluzione di ammoniaca pura, bisognava ricorrere ad una pila di grandissima forza elettromotrice e di cui la resistenza interna fosse considerevole, per evitare la scintilla al distacco del contatto M. Ricorsi ad una grande pila di 400 elementi, dei quali adoperava solamente quel numero che mi era necessario. Questa pila (fig. 5, tav. II.) ha i suoi elementi composti da carbone e zinco amalgamato, della superficie di 40 centimetri quadri ciascheduno: il liquido può esser formato dalla nota soluzione di bicromato potassico nell'acqua con acido solforico quando si vuole ottenere fortissima corrente: nelle mie esperienze sull'ammoniaca riempiva il bicchiere della pila con acqua leggermente salata. La pila si mette in azione pochi minuti avanti l'esperienza, abbassando il castello che porta gli zinchi e i carboni finchè s'immergano nel liquido dei bicchieri.

La pila che ho descritta è posseduta da questo Gabinetto di fisica; fu costruita due anni or sono dal sig. Turchini secondo il disegno del charmo prof. A Roiti. Costò circa L. 1000.

Voltametri— I voltametri da me adoperati li ebbi dal sig. I. Müller successore del dott. H. Geissler a Bonn, e debbo qui attestargli la mia soddisfazione per la precisione con la quale furono costruiti e perchè perfettamente corrisposero allo scopo propostomi. La fig. 3, tav. XI. rappresenta il voltametro che ho usato di preferenza: esso è formato da un tubo di vetro cilindrico, chiuso in fondo e smerigliato internamente verso l'apertura: il tubo si chiude con un tappo di vetro leggermente conico e perfettamente smerigliato: due fili *a b* di platino saldati a fusione sul tappo penetrano nell'interno del tubo: un altro tubo di vetro verticale munito di rubinetto

(1) Philosophical Magazine, tom. I. pag. 142 anno 1876.

r di vetro è saldato al tappo. L'apparecchio poteva conservare il vuoto a provino livellato per dei mesi interi; il vuoto si faceva con una buona macchina pneumatica a mercurio costruita dal Geissler. I due fili a e b portavano degli elettrodi A e B, i quali se di platino eran saldati ai fili a b col cannello a ossidrogeno: se gli elettrodi erano di oro o di altro metallo si saldavano a fusione sopra fili dello stesso metallo i quali fili eran poi messi in buon contatto con quelli a e b.

La costruzione del voltametro permetteva, ove bisognasse, di raccogliere e misurare i gassi i prodotti dall'elettrolisi, oppure d'introdurre nel voltametro un *gaz* qualunque. La fig. 4, tav. XI. indica la disposizione che si dava al voltametro nelle esperienze.

PARTE SECONDA

Leggi delle polarità galvaniche

Descritti i metodi e gli apparecchi impiegati in queste esperienze indicherò brevemente i risultati ai quali son giunto.

I. La forza elettromotrice di polarità generata su dati elettrodi, con un dato elettrolite, è la stessa, quando è la stessa la quantità d'elettricità che ha percorso il circuito polarizzante, purchè la durata della corrente polarizzante sia così breve, che in questo tempo possa trascurarsi la distruzione della polarità.

In altri termini questa legge ci dice che per ottenere una data forza elettromotrice di polarità si può variare come si vuole la forza elettromotrice della pila, la resistenza del circuito polarizzante, come pure la durata del passaggio della corrente polarizzatrice (mantenendo però questa durata inferiore a un certo limite) purchè la quantità di elettricità polarizzante sia la stessa: od anche (ricordando che in queste esperienze la quantità di elettricità era misurata dalla deviazione impulsiva della bussola Wiedemann) purchè rimanga la stessa la deviazione della bussola che fa parte del circuito polarizzante. Questa legge è stata verificata con tutta l'esattezza di cui sono suscettibili tali misure: la si può anzi ritenere verificata con un grado di precisione uguale a quello col quale si verifica la legge di Pouillet. Perciò feci variare la resistenza del circuito (per mezzo del reostata) e la forza elettromotrice entro limiti estesissimi e così pure la durata del passaggio, mantenendo però quest'ultima sempre inferiore a quel dato limite oltre il quale non può più trascurarsi la distruzione della polarità.

La verificazione di questa legge era resa più facile, dacchè sperimentando in condizioni tali che la forza elettromotrice generata sugli elettrodi sia piccolissima di fronte a quella E della pila, e con una durata di passaggio θ piccolissima e inferiore etc. etc. e con una resistenza R del circuito nel quale non sia induzione, la quantità Q di elettricità che passa nel tempo θ è data dalla formula

$$Q = \frac{E}{R}\theta$$

Questa formula non è in fondo che una conseguenza della legge di Ohm e di quella di Pouillet, ma era necessario di verificarla nel caso che un voltametro a elettrodi polarizzabili facesse parte del circuito: le mie esperienze l'hanno verificata completamente. In conseguenza dell'applicabilità di questa formula si potevano facilmente regolare i valori di E, R e θ per modo che Q rimanesse costante: in tal caso la forza elettromotrice di polarità rimaneva esattamente la stessa. Io ho verificata questa legge variando pure la natura e la superficie degli elettrodi purchè inattaccabili, come pure variando gli elettroliti. Gli elettrodi adoperati furono di platino, di oro, di palladio e di grafite: gli elettroliti furono: acqua stillata, soluzioni solforiche a diversa concentrazione, acido solforico concentrato, soluzione di acido solforico, di ammoniaca, di acïdo cloridrico e di acido iodidrico.

La conoscenza di questa legge rese come vedremo, più facile l'investigare le altre.

II. Legge con la quale cresce la forza elettromotrice di polarità col crescere della quantità di elettricità polarizzante.

A tale scopo incominciai col graduare la bussola Wiedemann in modo che dalle deviazioni impulsive di questa si potessero dedurre le quantità di elettricità riferite ad una unità nota. L'interruttore descritto si presta facilmente a tali determinazioni nella maniera che ora indicherò. Si colloca nel circuito polarizzante in luogo del voltametro V un voltametro ad argento di Poggendorff in modo che il crogiolo sia elettrodo negativo: si sceglie una pila costante di forza conveniente, per es. di quattro elementi Daniell, e si regola col reostata la resistenza del circuito. S'incomincia col misurare la deviazione I della bussola Wiedemann quando la corrente passa pel circuito per un tempo brevissimo θ; che si misura esattamente col mezzo della curva sinuosa che un diapason descrive sul cilindro C (tav. I.). Dipoi si fa passare continuamente la corrente per lo stesso circuito, per un tempo sufficiente, per es. 4 o 5 ore, e dal peso dell'argento depositato sul crogiolo si deduce l'intensità i della corrente in unità Jacobi.

La quantità di elettricità che produce la deviazione I sarà

$$\frac{i\,\theta}{60}$$

essendo θ misurato in secondi, quando si prenda per unità di quantità di elettricità quella che passando per un circuito di cui fa parte un voltametro ad acqua ne scompone una massa tale che il volume normale del gaz tonante sviluppato sia un centimetro cubo, ossia quella quantità di elettricità che può scomporre milligrammi 0,5361 di acqua: e la quantità di elettricità che produce la deviazione impulsiva di un millimetro della scala sarà

$$q = \frac{i\,\theta}{60\,.\,\mathrm{I}}$$

Furono fatte oltre venti determinazioni di questo valore q e furono ripetute dopo lunghi intervalli di tempo per assicurarsi che non erano variate le condizioni della bussola.

Riferirò qui una di queste determinazioni per dare un'idea del grado di esattezza che si poteva raggiungere.

Argento deposto in 5 ore milligrammi 47,50

Intensità della corrente in unità Jacobi $i = \frac{47,50}{300} \times 0,1555.$

θ Durata in secondi del passaggio della corrente

$$\theta = \frac{7,8 \text{ vibrazioni semplici}}{512 \text{ vibrazioni semplici}} = 0,01523 \text{ secondi}$$

I deviazione impulsiva della bussola $I = 37,70$ millimetri

$$q = \frac{47,50}{300} \times 0,01523 \times \frac{1}{60} \times 0,1555 \times \frac{1}{37,7} = 0,000,000,166.$$

La media dei valori di q fu $q = 0,000,000,1600$ e il suo valore più grande 169×10^{-9} e il suo valore più piccolo 158×10^{-9}.

Come si vede il valore di q è piccolissimo; per abbreviare la scrittura dei calcoli numerici converrà di prendere per unità di quantità di elettricità, la milionesima parte di quella che può scomporre 0,5361 milligrammi di acqua, ovvero la milionesima parte di quella che decomponendo l'acqua ne rende libero un centimetro cubo di gaz tonante.

Con tale convenzione il valore di q diviene

$$q = 0,1600$$

e di questo valore mi servirò in tutto il rimanente di questa Memoria.

Graduata così la bussola cercai sperimentalmente la legge con la quale dipende la forza elettromotrice di polarità dalla quantità d'elettricità polarizzante. Sperimentai dapprima con un voltametro ad acqua acidulata con l'acido solforico, e con elettrodi di Platino. Questi eran formati da lamine delle quali erano scoperte per superficie esattamente uguali le due faccie che si guardavano: le altre due erano ricoperte da uno strato di vernice isolante formata da caoutchouc fuso insieme a una piccola quantità di cera e di pece. Le superficie stesse erano state pulite con acido nitrico e poscia lavate con acqua stillata.

In questo modo trovai che la forza elettromotrice di polarità P si può esprimere per la quantità q di elettricità che è passata pel circuito polarizzante, per mezzo della formula

$$(1) \qquad P = A\ (1 - 10^{-aq})$$

dove A ed a sono due costanti.

La tavola seguente dimostra come questa formula rappresenti bene i risultati delle esperienze: nella prima colonna D sono indicate le deviazioni della bussola Wiedemann inserita nel circuito polarizzante, nella seconda q sono indicate le quantità di elettricità corrispondenti calcolate con la formola

$$q = 0,1600\ D$$

(I valori di D molto grandi si ottenevano adoperando un altro telaio della bussola, più distante dall'ago che il primo telaio, il quale serviva per la misura della piccolissima quantità d'elettricità).

Nella terza colonna sono i valori della forza elettromotrice di polarità P, trovati con l'esperienza; questi valori sono determinati con una precisione non inferiore

a $1/200$ della forza elettromotrice dell' elemento Daniell, che si prende per unità. Infine nella quarta colonna sono i valori di P calcolati con la formula

$$P = A\,(1 - 10^{-aq})$$

dove

$$A = 2\,,01 \text{ Daniell}$$
$$a = 0\,,00\,833\,125$$

nelle condizioni in cui furon fatte le esperienze di questa serie.

La quinta colonna indica le differenze fra i valori di P trovati con l'esperienza e quelli calcolati con la formula.

TAVOLA I.

Elettrodi di platino di 1000 millimetri quadri di superficie, ciascheduno. Acqua contenente il 20 per 100 di acido solforico puro. Temperatura + 10°. La durata di passaggio della corrente polarizzatrice rimase invariata ed uguale a 0,00041 secondi. La corrente di polarità era presa immediatamente dopo, per un tempo uguale.

D	q	P trovato	P calcolato	Differenze
2,0	0,3200	0,012 1	0,012 30	— 0,00020
3,2	0,5120	0,019 8	0,019 64	+ 0,00016
5,0	0,8000	0,030 5	0,030 61	— 0,00011
10,0	1,6000	0,060 9	0,060 74	+ 0,00016
17,0	2,7200	0,103 0	0,102 18	+ 0,00082
25,0	4,0000	0,146 1	0,148 46	— 0,00236
40,0	6,4000	0,234 3	0,232 24	+ 0,00206
56,0	8,9600	0,319 2	0,317 42	+ 0,00178
72,0	11,5200	0,396 2	0,398 54	— 0,00234
91,5	14,6400	0,493 0	0,492 15	+ 0,00085
130,0	20,8000	0,659 0	0,661 31	— 0,00231
200,0	32,0000	0,922 0	0,922 07	— 0,00007
240,0	38,4000	1,043 0	1,047 77	— 0,00477
300,0	48,0000	1,210 0	1,209 6	+ 0,0004
380,0	60,8000	1,377	1,383 9	— 0,0069
512,0	81,9200	1,568	1,592 5	— 0,0245
560,3	89,6480	1,612	1,650 0	— 0,0380
640,2	102,4320	1,723	1,728 3	— 0,0053
770,0	123,2000	1,816	1,820 9	— 0,0049
890,0	142,4000	1,842	1,879 3	— 0,0373
1331,0	212,9600	1,943	1,976 2	— 0,0332

Come si vede di qui le differenze fra i valori di P trovati con l'esperienza e quelli calcolati con la formula sono ben piccole ed ora in un senso ora in un altro: solamente per valori di P vicini al valor massimo, le differenze si fanno maggiori, e sono per lo più negative: ma il valore relativo delle differenze è ancora assai piccolo. La formula (1) rappresenta dunque assai bene i risultati della esperienza.

Ho eseguito un grandissimo numero di serie di esperienze, variando la natura dell'elettrolite come pure quella degli elettrodi e la grandezza delle loro superficie (essendo sempre uguali le superficie dell'elettrodo positivo e dell'elettrodo negativo). I liquidi adoperati furono acqua, soluzioni solforiche, acido solforico, soluzione di ammoniaca, soluzione di acido cloridrico e bromidrico. Gli elettrodi furono di platino,

di oro, di palladio, di grafite e di carbone da pila Bunsen: in tutti i casi i resultati della esperienza eran ben rappresentati con la formula (1)

$$P = A\,(1 - 10^{-aq})$$

dove le costanti A ed a si determinavano in ciascheduna serie di esperienze.

La grande differenza che esiste fra le sostanze che ho impiegate per elettrodi e per elettroliti dimostra che la formula (1) esprime molto bene la legge che collega P con q.

Possiamo osservare che questa formula ci indica che per valori sufficientemente piccoli di q, la forza elettromotrice di polarità è sensibilmente proporzionale alla quantità di elettricità q che ha generata la polarità. Si ha infatti in tal caso

$$\left[\frac{dP}{dq}\right]_{q=0} = A\,a.\ lognat\ 10$$

Questo resultato relativo alle deboli polarità era stato trovato già da altri fisici e segnatamente dal Varley (1) con un metodo non del tutto esente da errori.

La quantità $\left[\frac{dP}{dq}\right]_{q=0} = A\,a\ lognat\ 10$

ha una speciale, importanza, quando si rifletta che ove fosse trascurabile col tempo la distruzione della polarità, col chiudere il circuito degli elettrodi polarizzati si otterrebbe una corrente di polarità nella quale la quantità di elettricità messa in movimento sarebbe esattamente eguale a quella della corrente polarizzante. La quantità $A\alpha$ *lognat* 10 indica dunque il rapporto fra la differenza di potenziale degli elettrodi e la quantità di elettricità che vien messa in movimento quando se ne chiude il circuito con un arco metallico; si può chiamarla la capacità elettrica del voltametro per le piccole polarità (2).

La formula (1) indica anche come col crescere di q la forza elettromotrice di polarità si avvicini indefinitivamente ad un valore massimo A che può chiamarsi il maximum di polarità, che gli elettrodi possono acquistare nelle condizioni in cui si sperimenta. È questa polarità massima, quella appunto che è stata presa in esame dalla più parte dei fisici che hanno studiate le polarità galvaniche (3).

III. Legge delle superficie.

La costante a della formula $P = A\,(1 - 10^{-aq})$ per uno stesso elettrolite e per elettrodi della stessa natura (ma inattaccabili) dipende dalla superficie degli elettrodi. Supponendo, come era nelle mie esperienze, che l'elettrodo positivo avesse una superficie s uguale a quella dell'elettrodo negativo, il valore di a era in ragione inversa di s. Così sperimentando con elettrodi di platino immersi nell'acqua stillata contenente il 20 per 100 di acido solforico ho ottenuto

$s = 2600$ millimetri	$A = 1{,}95$ Daniell;	$a = 0{,}0032500$
$s = 1000$	$A = 2{,}01$	$a = 0{,}00833125$
$s = 400$	$A = 2{,}00$	$a = 0{,}020875$
$s = 100$	$A = 2{,}00$	$a = 0{,}08375$
$s = 25$	$A = 2{,}06$	$a = 0{,}33750$

(1) C. F. Varley, Philos. Mag. vol. XLI. anno 1871 pag. 312.

(2) Maxwell, *Electricity and Magnetism*, vol I. pag. 322 § 271.

(3) Wiedemann, *Galvanismus*, Bd. I. 664 a pag. 738.

Come si vede, in queste cinque serie di esperienze il maximum di polarità era sensibilmente lo stesso che nelle esperienze del Gaugain, del Raoult e dell'Exner; ed i prodotti *as* sono costanti:

Infatti

$$2600 \times 0{,}003250 = 8{,}450$$
$$1000 \times 0{,}008331 = 8{,}331$$
$$400 \times 0{,}020875 = 8{,}348$$
$$100 \times 0{,}08375 = 8{,}375$$
$$25 \times 0{,}33740 = 8{,}437$$

La misura della superficie, quando questa era piccolissima si aveva esattamente, avendo ricoperto del solito mastice isolante tutta la superficie dello elettrodo, tranne quella determinata area che servir dovea a trasmetter la corrente.

Seguono le tavole per mezzo delle quali ho calcolati i valori di A e di *a* qui sopra indicati. Nella prima colonna sono i valori di *q*, nella seconda quelli di P trovati con l'esperienza e nella terza quelli di P calcolati con la formula $P = A(1 - 10^{-aq})$;

TAVOLA II.

Elettrodi di platino nell'acqua contenente il 20 per 100 di $H_2 SO_4$.

Durata del passaggio della polarizzatrice 0,0004 di secondo. La corrente di polarità era presa immediatamente dopo, per un tempo uguale.

q	P trovata	P calcolata	
4,800	0,067	0,06880	
8,832	0,122	0,12472	S = 2600 millimetri quadri
22,400	0,304	0,30094	A = 1,950 Daniell
32,000	0,416	0,41525	*a* = 0,00325000
80,000	0,860	0,87840	
320,000	1,765	1,77216	
912,640	1.940	1,94789	
1,280	0,120	0,11934	
2,640	0,240	0,23834	S = 400 millimetri quadri
4,800	0,415	0,41206	A = 2,000
8.800	0,676	0,68980	*a* = 0.0208750
19,200	1,200	1,20524	
27,200	1,450	1,45896	
96,000	1,970	1,98018	
0,960	0,340	0,33800	
1,690	0,524	0,53096	S = 100 millimetri quadri
2,400	0,744	0,74098	A = 2,000
4,320	1,135	1,13056	*a* = 0,08375
8,800	1,630	1,63353	
11,200	1,760	1,76932	
18,4000	1,930	1,94245	
32,000	1,980	1,99582	
0,496	0,660	0,65889	
1,152	1,220	1,21847	S = 25 millimetri quadri
1,920	1,590	1,59671	A = 2,060,
4,000	1,960	1,96800	*a* = 0,33750

La legge delle superficie è stata verificata con pari precisione con elettrodi di oro, di platino e con superficie di cera rese conduttrici con la grafite; e coi liquidi acqua, acido solforico, soluzione di ammoniaca, soluzione di acido cloridrico, soluzione di acido bromidrico. Segue da questa legge combinata con le due precedenti, che se P indica la forza elettromotrice di polarità, q la quantità di elettricità polarizzante ed s la superficie di uno degli elettrodi (supposta uguale per tutti e due) esiste la relazione.

$$(2) \qquad P = A\left(1 - 10^{-\frac{\alpha q}{s}}\right)$$

dove A ed α sono due costanti che conservano lo stesso valore quando è lo stesso l'elettrolite e la sostanza che forma gli elettrodi.

La legge delle superficie si può esprimere sott'altra forma, dicendo che per produrre una determinata forza elettromotrice di polarità occorre una quantità di elettricità proporzionale alla superficie degli elettrodi.

Se poi osserviamo che la corrente polarizzante decompone l'elettrolite e depone su ciascheduno elettrodo una massa elettrolitica proporzionale alla quantità di elettricità polarizzante, potremo anche dire che per un dato elettrolite e per elettrodi della stessa natura la forza elettromotrice di polarità è la stessa quando è la stessa la massa del deposito elettrolitico deposta su ciascheduna unità di superficie di uno degli elettrodi, ossia quando è la stessa la *densità* del deposito elettrolitico sopra uno degli elettrodi, su quello negativo per esempio.

IV. Forma degli elettrodi.

Era importante conoscere se la forma o figura degli elettrodi, per una data area di questi, avesse influenza sul valore delle costanti, perchè in tal caso le leggi precedenti non avrebbero più avuto un carattere di generalità e le costanti sarebbero state dipendenti da questa forma o configurazione. Mi sono assicurato che si poteva variare come si voleva il contorno della superficie, purchè l'area degli elettrodi rimanesse la stessa, senza che variassero le costanti della formula. Ho sperimentato con elettrodi circolari, quadrati, rettangolari ecc. ecc. aventi la stessa area ed ho sempre ottenuto per le costanti A, α gli stessi valori.

V. Qualità degli elettrodi.

Ho sperimentato con elettrodi di natura differente, ma inattaccabili dall'elettrolite e dai prodotti dell'elettrolisi: ho trovato che in tutti i casi la formula (2) rappresentava esattamente i resultati della esperienza: inoltre per uno stesso elettrolite le costanti A, α sono indipendenti dalla natura dell'elettrodo.

Ho sperimentato con elettrodi di platino, oro chimicamente puro, palladio, carbone e vetro platinato alla superficie: in tutti i casi la stessa formula rappresentava i vari resultati. Solamente per gli elettrodi di palladio, le polarità trovate sono un po' più piccole di quelle calcolate con la formula, quando le polarità sono forti e vicine al valor massimo, del che si può rendersi ragione ricordando che il palladio forma delle combinazioni coi prodotti della elettrolisi.

Gli elettrodi di carbone li ottenevo ricuoprendo di buona grafite una determinata superficie di cera o di guttaperca, col metodo stesso che si usa per la galvanoplastica. Un buon metodo per ottenere delle superficie di carbone di determinata area è quello d'impastare a caldo 2 parti di buona grafite inglese ridotta in polvere impalpabile, con una parte di una mescolanza fusa di cera e stearina, quale si usa nella galvanoplastica per la riproduzione delle medaglie. Si ottiene così una mescolanza buona conduttrice, che può esser lavorata dopo il raffreddamento, e ridursi ad avere una delle faccie perfettamente piana e quasi speculare; si metallizza questa faccia con altra grafite e si cuopre il buon mastice isolante; il rimanente della superficie non deve essere in contatto elettrico coll'elettrolite.

Se invece si adoperano per elettrodi delle lastre di grafite (1) o di carbone da pile, che sono ambedue un po' porosi e che hanno una superficie un po' scabra anche in tal caso i resultati sono esattamente rappresentati dalla formula.

$$P = A\left(1 - 10^{\frac{-\alpha q}{s}}\right)$$

ma α ha un valore molto più piccolo che per elettrodi di platino, di oro, e di cera metallizzata con grafite. Così pel carbone da pila, immerso nell'acqua acidulata con acido solforico, ho ottenuto

$$A = 2{,}12 \qquad \alpha = 0{,}0437$$

mentre pel platino, come per la cera ricoperta di grafite, ecc. si aveva

$$A = 2{,}00 \qquad \alpha = 8{,}333.$$

È chiaro dunque, nel caso del carbon da pila o della grafite, che questi corpi imbevendosi di liquido prendon parte alla elettrolisi e si ricuoprono dei prodotti elettrolitici anche le parti che si trovano ad una certa profondità dalla superficie. Dalla grandezza del valore di α che è per il carbone da pila circa 200 volte più piccolo che per superficie di cera metallizzata con la grafite, possiamo dedurre con una certa probabilità, che nel carbone da pila la somma delle superficie che si cuoprono dei prodotti dell'elettrolisi è circa 200 volte maggiore della superficie dello stesso elettrodo misurata geometricamente.

Tali resultamenti colla grafite porosa e col carbone da pila mi fecero nascere il desiderio di conoscere se anche colle superficie metalliche si ottenesse qualche cosa di analogo: se, per es., la costante α avesse lo stesso valore per una lastra di platino infinitamente sottile come per una lastra ordinaria. Perciò sperimentai con lastre da specchio platinate nelle quali lo strato di platino era così sottile che la lastra era perfettamente trasparente. I resultati ottenuti con le lastre di vetro platinate erano esattamente rappresentate dalla formula (2), conservando A ed α gli stessi valori, precisamente come nel caso di lastre di platino, e di lastre di oro ecc. (2)

(1) È notevole il fatto che la grafite adoperata come elettrodo positivo, in una soluzione di acido solforico, si disgrega rapidamente, riducendosi in minutissima polvere, che si deposita al fondo del voltametro: mentre non si osserva verun disgregamento quando essa è elettrodo negativo. Col carbone da pile, o col carbon di legna si osserva lo stesso fenomeno, ma molto meno intensamente.

(2) Ringrazio vivamente il chiarmo prof. Emilio Villari dell'Università di Bologna per avermi gentilmente cedute le lastre da specchio platinate, che altrimenti avrei difficilmente potuto procurarmi essendone, credo, cessata la fabbricazione.

Le grandi differenze che esistono fra le proprietà del platino, oro, palladio, carbone, platino in strato estremamente sottile, dimostrano chiaramente che la natura dell'elettrodo (purchè inattaccabile) ed il suo spessore non hanno influenza sulla grandezza della polarità, generata dal passaggio di una determinata quantità di elettricità polarizzante: la maniera d'agire degli elettrodi si avvicina dunque a quella di una semplice superficie conduttrice nel caso dei condensatori elettrici, quando però nè l'elettrolite nè i depositi elettrolitici esercitino sensibile azione chimica perturbatrice sugli elettrodi (1).

VI. Qualità dell'elettrolite.

I liquidi che ho impiegati come elettroliti nel voltametro sono stati acqua, soluzioni solforiche a vario grado di concentrazione, acido solforico concentrato, la soluzione di gaz ammoniaco nell'acqua, la soluzione dell'acido cloridrico, quella di acido bromidrico e quella di acido iodidrico. Questo studio, di un certo interesse di per se stesso, mi ha condotto ad una osservazione assai importante relativa alla capacità elettrica per le deboli polarità.

Acqua e soluzioni di acido solforico.

Per l'acqua e per le soluzioni di acido solforico non troppo concentrate è applicabile formula

$$P = 2{,}00\left[1 - 10^{-8{,}33\frac{q}{s}}\right] \qquad (3)$$

dove P esprime la forza elettromotrice di polarità riferita a quella dell'elemento Daniell, s la superficie in millimetri quadri e q la quantità di elettricità espressa in milionesimi di quella che decomponendo l'acqua rende libero un centimetro cubo di gaz tonante, misurato nelle condizioni normali. Questa formula è stata ottenuta fondandosi sui resultati di più di 2000 osservazioni.

Per le soluzioni solforiche concentrate le costanti A ed α della formula

$$P = A\left[1 - 10^{-\alpha\frac{q}{s}}\right]$$

sono un po' differenti; A cresce un poco col crescere della concentrazione (2), mentre α diminuisce in modo però che il prodotto $A\alpha$ rimane sensibilmente costante.

Per l'acido solforico concentrato, si ha per A il più grande valore e per α li più piccolo: la formula è

$$P = 2{,}50\left[1 - 10^{-6{,}64\frac{q}{s}}\right] \qquad (4)$$

(1) Con elettrodi ossidabili (di rame o di argento), immersi nell'acqua acidulata con acido solforico era molto più debole la forza elettromotrice di polarità, dopo il passaggio di una determinata quantità di elettricità, che non con elettrodi inattaccabili, come di oro, platino carbone, aventi superficie esattamente uguali.

(2) Risultato già da me indicato in una precedente Memoria, *Su le polarità galvaniche* ecc. Nuovo Cimento 1879.

Soluzione di gaz ammoniaco nell'acqua.

La conducibilità di questo liquido quando è purissimo è molto piccola, per cui, per ottenere la polarità, ricorsi alla corrente della pila che ho già descritta (tav. II. fig. 5) della quale era grandissima la forza elettromotrice e grande pure la resistenza interna.

La soluzione adoperata era purissima, densa 0,889; riempitone un apparecchio Hoffmann (della forma ben nota) la soluzione si elettrolizzava con una fortissima pila, e si raccoglieva azoto sull'elettrodo positivo, e idrogeno, con volume triplo, sull'elettrodo negativo. Le polarità con l'ammoniaca furono determinate con elettrodi di platino. I resultati ottenuti sono esattamente rappresentati dalla formula.

$$P = 1{,}97\left[1 - 10^{-8{,}37\frac{q}{s}}\right] \tag{5}$$

Si vede di qui che le costanti A ed α hanno per la soluzione d'ammoniaca lo stesso valore che per le soluzioni solforiche deboli, resultato questo forse non privo d'interesse, nè certamente privo di nuovità.

Soluzioni di acido cloridrico.

Sperimentai con soluzioni concentrate di acido cloridrico purissimo (dense circa 1,194 alla temp. di $+6$). Con l'acido cloridrico il maximum di polarità era $= 1{,}33$ con elettrodi di carbone ed $= 1{,}30$ con elettrodi di platino e di oro. I resultati ottenuti sono rappresentati dalla formula

$$P = 1{,}30\left[1 - 10^{-12{,}90\frac{q}{s}}\right] \tag{6}$$

dove P, q, s indicano le stesse quantità che nelle formule precedenti.

Soluzioni di acido bromidrico.

L'acido fu da me preparato per l'azione dell'acqua sul bromuro di fosforo. La soluzione era perfettamente incolora e densa 1,433: non conteneva bromo libero: fu adoperata subito dopo ottenuta.

Il maximum di polarità, con elettrodi di platino era 0,942 (media di 4 determinazioni). I resultati ottenuti possono esser rappresentati con la formula

$$P = 0{,}942\left(1 - 10^{-17{,}10\frac{q}{s}}\right) \tag{7}$$

Soluzioni di acido iodidrico.

Le soluzioni di questo acido nell'acqua furon da me preparate in due modi; l'una per l'azione dell'acido solfidrico sull'iodio immerso nell'acqua; la soluzione veniva poi concentrata col calore, e raccolto il liquido distillato a $+127°$. L'altra soluzione fu preparata, facendo agire l'acqua sull'ioduro di fosforo.

Le soluzioni concentrate di acido, si scompongono, come è noto, con grandissima facilità: per togliere alla soluzione l'iodio libero aveva cura di riempire il voltametro con la soluzione previamente agitata insieme a un po' di mercurio.

La densità delle soluzioni su cui sperimentai era circa 1,67. Il maximum di polarità sembrò essere 0,578 Daniell (media di 6 determinazioni).

I resultati ottenuti potevano essere rappresentati dalla formula

$$P = 0{,}578\left(1 - 10^{-26{,}40\frac{q}{s}}\right) \qquad (8)$$

la quale da valori assai concordanti con quelli trovati, specialmente quando P è piccola e lontana dal valor massimo.

Gaz disciolti nell'elettrolite.

Una questione di molto interesse nello studio da me intrapreso era quello di conoscere se i gaz poco solubili e specialmente se l'aria disciolta nel liquido elettrolitico producesse variazioni nel valore delle costanti A ed α della formula (2). Tale questione fu già esaminata da altri fisici, e segnatamente dall'Exner (1) pel caso dell'acqua, ma limitatamente, pel solo caso cioè del maximum di polarità

Io per tali ricerche mi son servito con molto vantaggio dei voltametri già descritti, costruiti per me dal Geissler. Ho trovato così che la costante α ha sensibilmente lo stesso valore col liquido perfettamente purgato di aria per mezzo della macchina pneumatica a mercurio del Geissler, e così mantenuto da settimane, come nel liquido saturo di aria. Per la costante A non ho ottenuto che piccolissime variazioni: il suo valore era un po' più piccolo per l'acqua aereata che per l'acqua purgata d'aria, ma di una quantità non facile a determinarsi. Possiamo quindi ritenere che le formule ed i resultamenti a cui son giunto, siano con molta approssimazione applicabili anche al caso che il liquido alla pressione ordinaria, contenga in soluzione dell'aria.

Resultato di queste ricerche sull'influenza della natura dell'elettrolite.

Dalle formule che esprimono P in funzione di q per l'acqua, per le soluzioni solforiche, per l'acido solforico, per l'ammoniaca e per l'acido cloridrico si deduce che il prodotto $A\alpha$ è per questi liquidi sensibilmente costante.

Abbiamo infatti:

Acqua e soluzioni solforiche poco concentrate	$A = 2{,}00$	$\alpha = 8{,}33$	$A\alpha = 16{,}66$
Acido solforico concentrato denso 1,84	$A = 2{,}50$	$\alpha = 6{,}64$	$A\alpha = 16{,}60$
Soluzione ammoniacale densa 0,89	$A = 1{,}97$	$\alpha = 8{,}37$	$A\alpha = 16{,}49$
Soluzione di HCl densa 1,194	$A = 1{,}30$	$\alpha = 12{,}90$	$A\alpha = 16{,}77$
Soluzioni di HBr densa 1,433	$A = 0{,}942$	$\alpha = 17{,}10$	$A\alpha = 16{,}11$
Soluzione di HT densa 1,67	$A = 0{,}578$	$\alpha = 26{,}40$	$A\alpha = 15{,}26$

Ciò significa che per tali elettroliti la capacità elettrica riferita all'unità di superficie degli elettrodi, per le piccolissime forze elettromotrici è indipendente dalla natura dell'elettrolite.

(1) Exner, *Ueber die galvanische Polarisation des Platins in Wasser*, Ann. der. Ch. und der Physik 1878, T. V. pag. 388. Si vegga anche Crova, Annales de Chimie et de Physique 2ª s. T. 68, pag. 436 (anno 1863).

Si può esprimere lo stesso risultato in una maniera differente. Le piccolissime forze elettromotrici di polarità generate dal passaggio di una corrente elettrica per un tempo brevissimo, per un circuito di cui fan parte voltametri con elettrodi di ugual superficie e coi liquidi sopra indicati saranno uguali in ciascheduno dei voltametri.

Questa proposizione è dimostrata dal fatto che il prodotto $A\alpha$ si mantiene costante pei liquidi sopraindicati. Si noti anche che quantunque il maximum di polarità A per l'acido bromidrico e per l'acido iodidrico sia espressa solo approssimativamente dai numeri 0,942 e 0,578 (rispettivamente) pure le formule (7) ed (8) danno valori esatti per le deboli forze elettromotrici di polarità e quindi il valore della capacità elettrica per le debolissime polarità dedotta da queste formule è giusto.

S'intende bene che se l'elettrolite è di tal natura da reagire su i prodotti della elettrolisi i risultati sono assai differenti. Ciò avviene per es. adoperando acido cloridrico contenente cloro libero, ed acqua acidulata con acido nitrico; oppure dell'acido bromidrico o iodidrico da lungo tempo preparati, e che perciò contengono del bromo e dell'iodio liberi. In tal caso i prodotti $A\alpha$ sono assai minori di 16,7: qualche volta anzi non si osservano che polarità estremamente deboli, anche con forti quantità di elettricità polarizzante.

Influenza della temperatura dell'elettrolite.

Era interessante conoscere come la temperatura influisse sulle costanti della formula (2). Per questo ho fatto diverse serie di esperienze col voltametro portato a temperatura diversa ma che rimaneva costante in ciascheduna serie. Il voltametro era perciò immerso in un recipiente (fig. 4, tav. II.) di ottone contenente circa due litri d'olio che si riscaldava con una lampada a gaz: un agitatore simile a quello che si adopera nei calorimetri ed un termometro servivano a mantenere costante ed a misurare la temperatura del bagno. La massa del liquido essendo così grande, era facile regolare la fiamma in modo che la temperatura rimanesse costante per qualche ora.

Ho sperimentato dapprima col voltametro pieno di acido solforico concentrato e con elettrodi di platino di egual superficie. Ho trovato così pel valore delle costanti A ed α della formula

$$P = A\left(1 - 10^{-\alpha\frac{q}{s}}\right)$$

Alla temperatura di + 5° A = 2,50 α = 6,64.
+ 122° A = 1,667 α = 9,77.
+ 200° A = 1,111 α = 15,10
+ 250° A = 1,009 α = 15,90.

Come si vede il maximum di polarità decresce rapidamente col crescere della temperatura, ma il prodotto $A\alpha$ rimane sensibilmente costante. Infatti

Temperatura di + 5° $A\alpha$ = 16,60
+ 122° $A\alpha$ = 16,29
+ 200° $A\alpha$ = 16,78
+ 250° $A\alpha$ = 16,04

Quindi per l'acido solforico concentrato e con elettrodi di platino la capacità elettrica riferita alla unità di superficie degli elettrodi è, per le piccole forze elettromotrici di polarità, indipendente dalla temperatura del liquido; o in altri termini la stessa quantità di elettricità polarizzante (purchè piccolissima) produce su dati elettrodi la stessa forza elettromotrice di polarità, qualunque sia la temperatura del liquido. Così la quantità d'elettricità polarizzante 1 produceva su elettrodi di platino grandi 1000 mm. quadri ciascuno, una polarità = 0,0379 Daniell, qualunqne fosse la temperatura dell'acido solforico.

Analoghi resultati ho ottenuti con l'acqua leggermente acidulata con acido solforico, per temperature comprese fra + 5° e + 60°: anche in tal caso il prodotto $A\alpha$ rimaneva sensibilmente costante mentre A decresceva molto sensibilmente. Ma con questo liquido non volli sorpassare di molto la temperatura di + 60° perchè avvicinandomi di troppo alla temperatura di ebullizione correva rischio che gli elettrodi si coprissero di bollicine di gaz misto a vapore.

VII. Forza elettromotrice di polarità dell'elettrodo positivo e di quello negativo.

In tutte le esperienze precedenti, i due elettrodi del voltametro avevano superficie esattamente uguali e si misurava la forza elettromotrice ossia la differenza di potenziale dei due elettrodi.

Supponiamo ora che uno degli elettrodi polarizzati dal passaggio della corrente, per esempio l'elettrodo A venga messo in comunicazione elettrica con un elettrodo dello stesso metallo ma non polarizzato, immerso nello stesso elettrolite; esisterà fra questi due una differenza di potenziale che chiamerò forza elettromotrice dello elettrodo negativo, oppure dell'elettrodo positivo, secondo che A era elettrodo positivo o negativo. Tale forza elettromotrice era stata fin qui misurata solamente nel caso del maximum di polarità (1), se si eccettuino alcune poche recenti esperienze del sig. Blondot (2). Tale forza elettromotrice si poteva misurare facilmente con gli apparecchi da me descritti: bastava perciò che si disponessero i circuiti in maniera che la corrente polarizzante passasse dapprima per gli elettrodi A e B di uguale superficie e che la corrente di polarità venisse presa immediatamente dopo fra un terzo elettrodo C non polarizzato, e della stessa sostanza, immerso nello stesso liquido. Dopo fatta l'esperienza si aveva cura che l'elettrodo C fosse messo in comunicazione elettrica con un elettrodo D dello stesso metallo e immerso nello stesso liquido. Per la pronta riuscita della esperienza era utile (per ragioni manifeste) che la superficie dell'elettrodo C e di quello D (che potevano esser qualunque) fossero assai grandi.

Si può anche adoperare un altro metodo, assai più semplice per determinare la forza elettromotrice fra un elettrodo polarizzato e un altro che non lo è. Basta perciò che in un voltametro gli elettrodi A e B abbiano superficie molto differente: per es. quello B abbia una superficie due o trecento volte maggiore di quell'altro: in tal caso (come dimostreremo rigorosamente in seguito) se per il passaggio della corrente l'elettrodo A ha acquistata una polarità che non sia troppo vicino al maximum che può acquistare, quello B non si polarizza sensibilmente.

(1) Compara Wiedemann, *Galvanismus*, t. I. pag. 690 e seguenti.

(2) Blondot, Comptes Rendus, t. LXXXIX. pag. 148-151, novembre 1879

Coi due metodi da me indicati si ottengono gli stessi risultamenti.

Tanto col primo come col secondo metodo, quando si voglia paragonare la polarità dello elettrodo positivo con quella dello elettrodo negativo, bisogna, dopo eseguita una serie di esperienze e dopo aspettato un certo tempo (qualche ora) ricominciare la serie, avendo invertita la direzione della corrente polarizzante: così coll'invertire si eliminano gli errori che potrebbero provenire da leggiere differenze di superficie degli elettrodi etc. etc. Ottenuto così un buon numero di serie di esperienze, si confrontano le polarità dell'elettrodo positivo con quelle dell'elettrodo negativo, generate dalla stessa quantità di elettricità polarizzante. Tali esperienze e tali confronti furono fatte per gli elettroliti seguenti: acqua, soluzioni solforiche, ammoniaca nell'acqua, soluzione di acido cloridrico, idem di acido bromidrico, idem di acido iodidrico, con elettrodi di oro, di platino e di carbone. Le soluzioni di acido bromidrico e di acido iodidrico erano state preparate da me ed adoperate subito dopo preparate. Erano ambedue perfettamente trasparenti e *incolore*: la prima era densa 1,433 e la seconda 1,80.

Dal confronto dei resultati ottenuti coi liquidi precedenti ho rilevata la legge seguente:

Quando un elettrolite è decomposto nei suoi elementi dal passaggio di una corrente elettrica, la forza elettromotrice dell'elettrodo positivo è uguale alla forza elettromotrice dello stesso elettrodo ma negativo, generata dal passaggio della stessa quantità di elettricità polarizzante; inoltre essa è la metà di quella che il passaggio della stessa quantità d'elettricità polarizzante produrrebbe passando per due elettrodi identici al precedente e immersi nello stesso liquido.

Questa legge della uguaglianza di polarità dei due elettrodi si verifica con tutta la precisione della quale sono suscettibili tali misure, per l'acqua stillata, per le soluzioni deboli di acido solforico, per l'ammoniaca, per le soluzioni concentrate di acido cloridrico, di acido bromidrico e di acido iodidrico, sopra indicate, avendo cura di sperimentare col liquido ben purgato di aria per mezzo della macchina pneumatica a mercurio. Per l'acqua aereata invece, mi sembrò un po' maggiore, specialmente per le polarità forti, la polarità con l'elettrodo negativo. Parimente con le soluzioni concentrate di acido solforico, vince un poco (specialmente con le forti polarità) quella dell'elettrodo negativo: il rapporto delle due forze elettromotrici non superava però 1,06: si può notare in questo caso dell'acido solforico, che in seguito dell'elettrolisi si ha formazione di prodotti secondarî a spese dell'ossigeno elettrolitico (1).

La legge precedente per essere applicabile suppone che gli elettrodi siano di sostanze inattaccabili dal liquido e dai prodotti dell'elettrolisi, e che il liquido non abbia azione sopra questi prodotti. Con l'acido bromidrico contenente bromo libero, o con l'acido cloridrico contenente cloro libero, le polarità coll'elettrodo positivo erano molto più piccole di quelle ottenute coll'elettrodo negativo: quelche volta anzi le prime erano appena sensibili.

(1) Berthelot, *Essai de mécanique chimique*. T. II. pag. 396. Parigi 1879.

VIII. Elettrodi a superficie differente.

Con un metodo analogo a quello precedente ho potuto dimostrare con tutta la precisione desiderabile che la forza elettromotrice di polarità generata dal passaggio di una determinata quantità di elettricità per un voltametro a elettrodi inattaccabili ma della stessa natura, e di superficie comunque differente, è uguale alla somma delle forze elettromotrici di polarità dell'elettrodo positivo e dell'elettrodo negativo.

Perciò faceva dapprima una serie di esperienze misurando le polarità generate dal passaggio di determinate quantità di elettricità per gli elettrodi A e B, A positivo per es. e B negativo. In una seconda serie faceva passare la corrente fra l'elettrodo A positivo e un terzo elettrodo C, e immediatamente dopo il passaggio della polarizzante determinava la polarità fra l'elettrodo A positivo e l'elettrodo B ora completamente privo di polarità. Infine una terza serie faceva passare la corrente polarizzante fra B negativo e l'elettrodo C, e misurava la polarità fra l'elettrodo B e quello A privo di polarità. Era facile ottenere nelle tre serie le stesse deviazioni impulsive della bussola Wiedemann, ossia ottenere identiche le corrispondenti quantità di elettricità polarizzante: si trovò sempre che la forza elettromotrice di polarità generata dalla stessa quantità q di elettricità polarizzante, con A positivo e con B negativo, era uguale alla somma delle forze elettromotrici di polarità ottenute fra A positivo e B non polarizzato, e fra B negativo con A non polarizzato. Questa legge è stata verificata con elettrodi di platino, oro, carbone e con tutti gli elettroliti già adoperati precedentemente.

Per questa legge e per le precedenti, se chiamiamo s ed s' le superficie (in millimetri quadri) di due elettrodi della stessa sostanza non attaccabile, e se indichiamo con B, B′ e con β e β' delle costanti, la forza elettromotrice P di polarità sviluppata dal passaggio di una quantità q di elettricità polarizzante, sarà

$$(9) \qquad P = \frac{B}{2}\left(1 - 10^{-\beta\frac{q}{s}}\right) + \frac{B'}{2}\left(1 - 10^{-\beta'\frac{q}{s'}}\right).$$

Da questa formula si deduce che se una delle superficie per es. s' è grandissima rispetto all'altra s, allora per tutti i valori di q, pei quali il valore di $\frac{\beta' q}{s'}$ rimane sufficientemente piccolo, si otterrà la polarità del solo elemento s: così si rende ragione di uno dei metodi da me adoperati per misurare la forza elettromotrice dell'elettrodo positivo o negativo, separatamente.

La formula (9) può semplicizzarsi ancora quando l'elettrolite è tale che possa rigorosamente applicarsi la legge dell'uguaglianza di polarità dei due elettrodi aventi ugual superficie.

In tal caso potremo porre

$$B = B' = A$$
$$\beta = \beta' = \alpha$$

ed avremo

$$(10) \qquad P = \frac{A}{2}\left(1 - 10^{-\frac{\alpha q}{s}}\right) + \frac{A}{2}\left(1 - 10^{-\frac{\alpha q}{s'}}\right)$$

dove A ed α hanno i valori già indicati nelle formule (3), (4), (5), (6).

In particolare se $s = s'$ la precedente (10) si trasforma nella (2).

IX. Si vede dunque con quanta semplicità le formule (9) e (10) risolvano completamente il problema propostomi: Determinare, cioè, la forza elettromotrice di polarità generata su dati elettrodi in un dato elettrolite pel passaggio di una determinata corrente elettrica per un tempo ϑ così breve, che in tal tempo si possa trascurare la distruzione di polarità.

Basterà perciò sostituire nelle formule (9) e (10) a q il suo valore

$$q = \int_{t=0}^{t=\vartheta} I dt,$$

dove I è la intensità della corrente polarizzante; espressa in milionesimi dell'unità Jacobi e t il tempo (misurato in minuti primi) decorso dall'attacco della corrente polarizzatrice. (1)

(1) Coi dati che si trovano nella presente Memoria può risolversi il seguente problema:

Sia P la forza elettromotrice di polarità (inferiore però al maximum) di elettrodi inattaccabili, prodotta dal passaggio di una quantità Q di elettricità, per un tempo così breve, che in questo tempo sia trascurabile la distruzione della polarità; immediatamente dopo il passaggio della corrente polarizzante si chiuda il circuito di polarità, di resistenza totale R: *calcolare il tempo t dopo il quale la forza elettromotrice di polarità è divenuta p*, supponendo che in questo tempo t possa trascurarsi la distruzione della polarità.

Fondandosi sulla relazione

$$P = A\left(1 - 10^{-\frac{\alpha}{s}Q}\right)$$

si calcolerà la quantità x di elettricità che dovrà esser passata pel circuito di resistenza R nel tempo t con la formola

$$x = \frac{s}{\alpha} \log. \frac{A - p}{A - P}$$

dove log. indica il logaritmo volgare, e con facili calcoli si troverà

$$t = \frac{R}{A}x + \frac{Rs}{A\alpha} \log \frac{1 - 10^{-\frac{\alpha}{s}Q}}{1 - 10^{-\frac{\alpha}{s}(Q-x)}}$$

Per calcolare t in minuti primi, con questa formula si deve notare che se Q e x sono misurate in milionesimi della quantità di elettricità che decomponendo l'acqua rende libero un centimetro cubo di gas tonante, e se la resistenza R è misurata in unità Siemens, la forza elettromotrice massima di polarità A deve essere misurata non più in unità Daniell ma in unità Siemens, milionesimo di Jacobi.

Si vede da questa formula come rapidamente venga a diminuire la forza elettromotrice di polarità, quando i due elettrodi vengano a far parte di un circuito chiuso di non molto grande resistenza. Si trova così giustificato l'uso che ho fatto del reostata a solfato di zinco a grandissima resistenza, introdotto nel circuito di polarità, acciò nel tempo (quantunque brevissimo) pel quale si teneva chiuso questo circuito, non variasse sensibilmente la forza elettromotrice di polarità che mi proponeva misurare (Vedi parte I^a di questa Memoria).

CONCLUSIONI

Riassumerò brevemente quanto ho esposto nella parte seconda della presente Memoria.

Se la corrente polarizzante ha una durata così breve che in questo tempo sia trascurabile la distruzione della polarità e se la forza elettromotrice si determina in un tempo brevissimo tale che anche in questo tempo sia trascurabile la distruzione della polarità, ho dimostrato che:

1.° La forza elettromotrice di polarità, generata su dati elettrodi, in un dato elettrolite è la stessa quando è la stessa la quantità d'elettricità che ha attraversato il circuito polarizzante.

2.° La forza elettromotrice di polarità P, in un voltametro dove l'elettrodo positivo e quello negativo hanno uguale superficie e sono formati dalla stessa sostanza inattaccabile dal liquido e dai prodotti dell'elettrolisi e dove il liquido non ha azione sensibile sopra questi prodotti (almeno nel tempo brevissimo dell'esperienza) cresce con la quantità q di elettricità polarizzante: e si ha la relazione

$$P = A\left(1 - 10^{-aq}\right)$$

dove A ed a sono due costanti; delle quali A rappresenta il maximum di polarità che può ottenersi nelle condizioni dell'esperienza, ed Aa log nat 10 una quantità che può chiamarsi la capacità elettrica del voltametro per le piccolissime forze elettromotrici di polarità.

3.° Per uno stesso elettrolite e per elettrodi della stessa natura (supposta uguale però la superficie s dei due elettrodi) la costante a è in ragione inversa di s, per cui la formula precedente diviene

$$P = A\left(1 - 10^{-\alpha \frac{q}{s}}\right)$$

dove α è una costante che non dipende più dalla grandezza della superficie dei due elettrodi: inoltre la costante α non dipende dalla forma o configurazione della superficie degli elettrodi.

4.° Le costanti A ed α per uno stesso elettrolite non dipendono dalla natura degli elettrodi purchè inattaccabili, nè dal loro spessore: così sono le stesse per elettrodi di platino, di oro, di carbone, di palladio, di vetro platinato, con uno strato estremamente sottile di questo metallo. S'intende però che debbono escludersi gli elettrodi porosi, come il carbone da pila ecc.

5.° Le costanti A ed α variano con la natura dell'elettrolite, in modo però che il loro prodotto A α e quindi anche la capacità elettrica relativa all'unità di superficie, per le debolissime forze elettromotrici è sensibilmente costante. La costanza del valore di Aα si è osservata, per l'acqua, le soluzioni solforiche, acido solforico concentrato, soluzione ammoniacale, soluzione di acido cloridrico. di acido bromidrico, e di acido iodidrico. Inoltre il valore di Aα (almeno per l'acqua e per l'acido solforico) è sensibilmente lo stesso qualunque sia la temperatura del liquido.

6.° La forza elettromotrice di polarità dell'elettrodo positivo è eguale alla forza elettromotrice dello stesso elettrodo quando è negativo per il passaggio di una stessa quantità d'elettricità polarizzante: avendo convenuto di chiamare forza elettromotrice dell'elettrodo positivo, quella esistente fra questo elettrodo e un altro uguale non polarizzato. Questa uguaglianza si verificò, con elettrodi d'oro, di platino e di carbone e coi liquidi soprannominati ed anche con le soluzioni di acido bromidrico e iodidrico preparate da poco ed ancora indecomposte.

7.° Adoperando nel voltametro elettrodi a superficie differente ho trovato che la forza elettromotrice di polarità è uguale alla somma delle forze elettromotrici dell'elettrodo positivo e di quello negativo, definite come sopra.

8.° Per mezzo delle leggi precedenti si poteva risolvere il problema propostomi; calcolare cioè la forza elettromotrice P di polarità generata dal passaggio di una quantità q di elettricità per un voltametro a elettrodi non attaccabili, di superficie s ed s' rispettivamente, immersi in un dato elettrolite:

La soluzione era data dalla formula

$$P = \frac{B}{2}\left(1 - 10^{\frac{-\beta q}{s}}\right) + \frac{B'}{2}\left(1 - 10^{\frac{-\beta' q}{s'}}\right)$$

dove B, B', β, β' sono quattro costanti che dipendono solamente della natura dell'elettrolite e che si possono facilmente calcolare. Quando poi l'elettrolite era tale che si potesse applicare la proposizione, 6ª la formula precedente diventava più semplice, cioè:

$$P = \frac{A}{2}\left(1 - 10^{-\frac{\alpha q}{s}}\right) + \frac{A}{2}\left(1 - 10^{-\frac{\alpha q}{s'}}\right)$$

dove i valori di A e di α dipendono solamente dalla natura del liquido, e sono

per l'acqua		A = 2,00	α = 8,33
per l'acido solforico denso	1,84	A = 2,50	α = 6,64
per l'ammoniaca densa	0,89	A = 1,97	α = 8,37
per l'acido cloridrico denso	1,194	A = 1,30	α = 12,90
per l'acido bromidrico sol. densa	1,43	A = 0,94	α = 17,10

quando le superficie s e s' si misurino in millimetri quadri, e la quantità q in milionesimi di quella che può decomporre 0,5361 milligrammi di acqua (1).

(1) Debbo ringraziare il mio assistente dottor Guido Alessandri che mi ha assistito con molto zelo e con molta intelligenza in queste lunghe e penose ricerche.

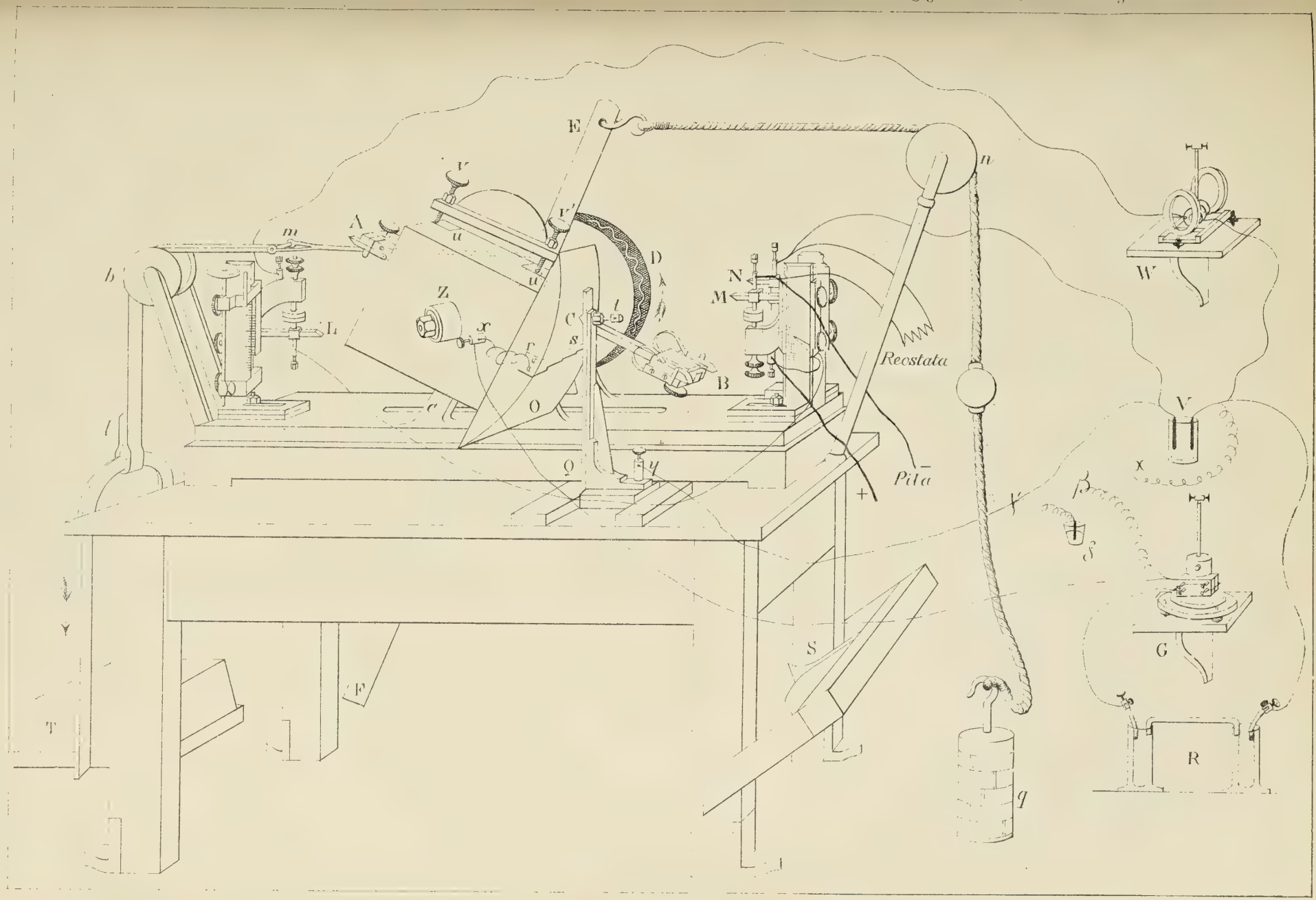

E
n
V
V'
A
m
u
u
D
b
Z
x
C
t
N
M
L
r
s
B
Reostata
c
O
Q
q
Pila
+
W
V
x
β
S
G
R
q
S
F
T
Y

Fig.ª 1.ª

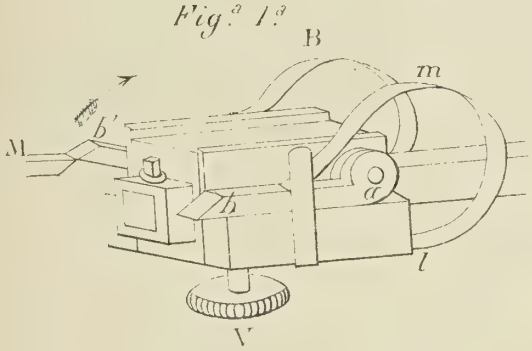


Fig.ª 5.ª

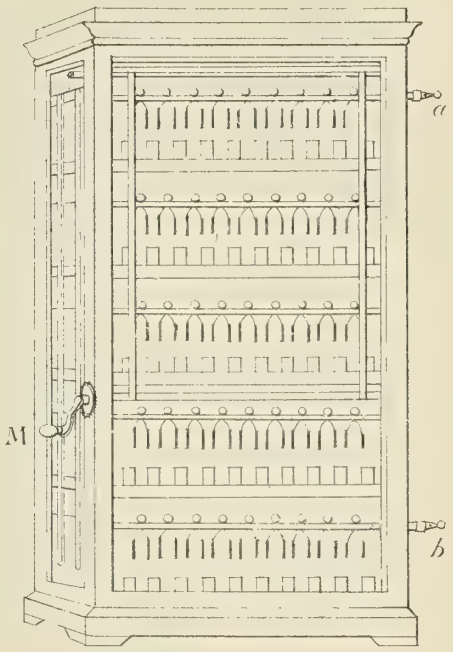
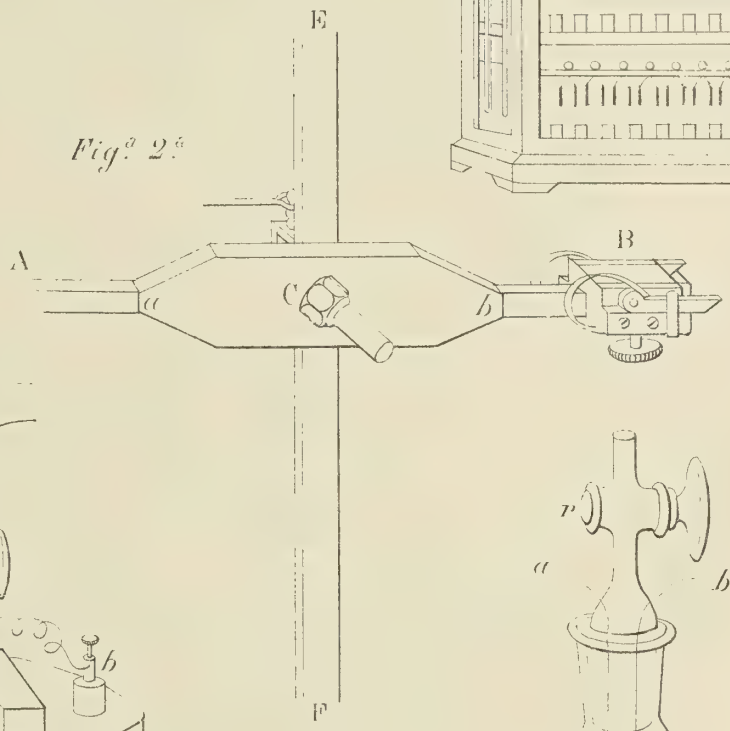


Fig.ª 2.ª



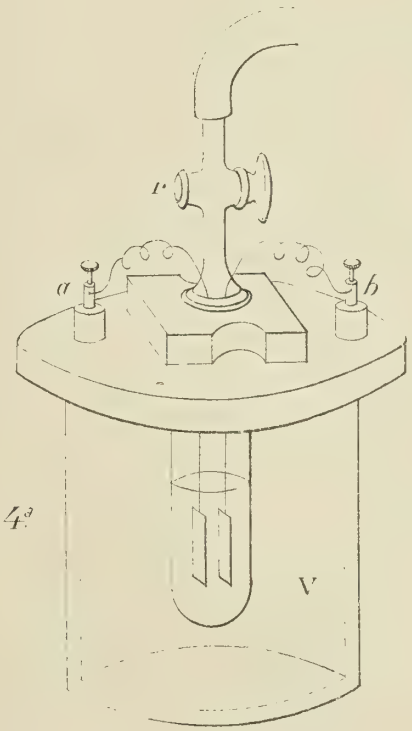


Fig.ª 4.ª

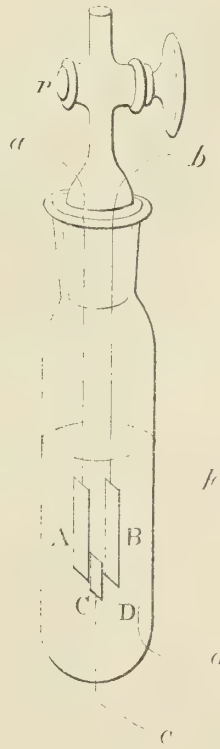


Fig.ª 3.ª

Catalogo delle declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle comprese fra i paralleli 20° e 64° nord dedotto da osservazioni fatte nel R. Osservatorio del Campidoglio.

Memoria del Socio LORENZO RESPIGHI

letta nella seduta del 6 giugno 1880.

Le notevoli differenze, che si riscontrano nelle declinazioni medie assegnate dai più autorevoli cataloghi alle varie stelle, e spesso eziandio a quelle che furono più regolarmente e frequentemente osservate, mostrano senza dubbio la grande difficoltà di ottenere il valore esatto di questi importanti dati astronomici, malgrado la incontestata abilità e diligenza degli osservatori, la provata bontà e perfezione degli strumenti usati, e malgrado i ragionati ed ingegnosi metodi ed artifizî diretti ad eliminare, o compensare le influenze delle varie condizioni o cause che possono più o meno sensibilmente alterare i risultati delle osservazioni.

Se col moltiplicare le osservazioni sopra le singole stelle, e col variare le condizioni nelle quali esse vengono fatte, possiamo sperare un probabile e convenientemente approssimato compenso degli errori dipendenti da cause fortuite od accidentali, per eliminare poi o compensare gli errori sistematici e costanti, dipendenti dalla inesattezza delle divisioni dei circoli, dalla flessione dei cannocchiali, dal diverso modo di collimare le stelle e di leggere gli archi secondo i varî osservatori, dalla diversità delle condizioni climatologiche ecc., siamo costretti a basarci sopra dati difficilmente esatti, e sopra leggi ed ipotesi verosimili, ma non certe: sicchè la desiderata eliminazione o compensazione di quegli errori non può generalmente riuscire che incerta ed incompleta.

In causa di ciò può ritenersi che ogni catalogo, anche buono, deve risentire più o meno di questa imperfezione, e che perciò gli elementi o i dati da esso presentati devono allontanarsi dal loro vero valore di quantità più o meno piccole, ma ordinariamente non trascurabili: le quali potranno assumere per le varie parti e pei varî elementi del catalogo stesso un andamento quasi continuo o sistematico, dipendente dal modo di combinazione dei varî errori e dalla maggiore o minore influenza da essi esercitata nei risultati finali: ed è appunto da queste differenze o scostamenti dei valori dati dei varî cataloghi per le coordinate delle stelle, dal valore reale di queste, che vengono costituiti i così detti errori sistematici dei cataloghi stessi.

Gli andamenti e le grandezze di questi errori sistematici dei cataloghi non possono essere direttamente determinati, essendo ignoti i veri termini di confronto; ma la loro esistenza è manifestamente dimostrata dalle divergenze che si riscontrano nel confronto di un catalogo coll'altro; poichè ordinariamente si trovano fra le coordinate delle stelle differenze più o meno sensibili, la cui grandezza apparisce più o meno

manifestamente collegata coi valori delle coordinate stesse, in modo da potersi quasi considerare come una funzione delle medesime.

In questo modo possono determinarsi gli errori sistematici relativi fra i varî cataloghi, ma i loro valori assoluti non potrebbero dedursi altro che dal confronto di ogni catalogo con un catalogo normale, nel quale si potessero ritenere completamente compensati gli errori sistematici dei singoli cataloghi. La formazione di questo catalogo normale, se non esatto, almeno abbastanza approssimativo, potrebbe sperarsi allora soltanto che si possedessero numerosi e buoni cataloghi, aventi in comune un numero sufficiente di stelle, le cui posizioni fossero in ognuno di essi assicurate contro gli errori accidentali da un conveniente numero di osservazioni; poichè in questo caso gli errori sistematici dei varî cataloghi presi nel loro insieme, assumerebbero in certo modo il carattere di errori accidentali, colla probabilità di ottenerne la compensazione nei risultati medî da essi cataloghi dedotti.

Quantunque si posseggano attualmente numerosi cataloghi ed assai pregevoli, sia per gli strumenti e pei metodi usati nelle osservazioni, sia per la incontestabile abilità e diligenza degli osservatori, pure quando per ispeciali e delicate ricerche si vuole intraprendere la compilazione di un catalogo normale, dal quale siano possibilmente eliminate le influenze degli errori sistematici sulle posizioni delle stelle, ordinariamente non si trovano dati sufficienti allo scopo, per la ragione che le stelle non sono comuni altro che a pochi cataloghi, o perchè in una parte di questi le posizioni delle stelle sono dedotte da un numero troppo scarso di osservazioni.

In questi casi la compilazione d'un catalogo normale riesce sempre imperfetta, o perchè basata sopra un piccol numero di dati, o perchè si è costretti di ricorrere ad ipotesi o criterî più o meno arbitrarî per proporzionare i pesi, coi quali i varî cataloghi debbano concorrere nel calcolo dei valori medî ricercati, coll'intendimento di ottenere la massima probabilità nelle compensazioni degli errori accidentali e sistematici inerenti a ciascun catalogo.

Fatte poche eccezioni, la compilazione dei cataloghi è ordinariamente fatta sopra un materiale di osservazione accumulato in un lungo intervallo di tempo, senza norme fisse basate sopra un sistema prestabilito: e per conseguenza i risultati ottenuti presentano spesso una grande eterogeneità, sia per la troppa disparità del numero delle osservazioni fatte sopra le singole stelle, sia per la non abbastanza regolare distribuzione delle medesime, sia per la varietà delle condizioni e del metodo di osservazione; cosicchè escludendo quelle stelle, le cui coordinate non offrono alcuna guarentia pel compenso degli errori accidentali, perchè basate sopra poche osservazioni, si trova che anche nei grandi cataloghi il numero delle posizioni meritevoli di grande fiducia è spesso assai limitato.

Questa deficienza ed imperfezione di dati, che frequentemente si incontrano nella discussione delle più importanti e delicate questioni astronomiche, doveva naturalmente manifestarsi anche nella gigantesca impresa della misura dei gradi del Meridiano centrale di Europa, specialmente in riguardo alle declinazioni delle stelle, per le quali dovevansi determinare le latitudini delle stazioni astronomiche, sparse sulla vasta rete geodetica attraversata dal Meridiano stesso.

Quando la Commissione Internazionale per la misura dei gradi volle compilare

un catalogo di stelle, le cui declinazioni potessero ritenersi meritevoli della fiducia ed esattezza richiesta per questa delicata operazione, si trovò, che mentre il numero di queste stelle era troppo scarso per la determinazione delle latitudini nelle varie stazioni e coi varî metodi, o processi indicati per controllare o verificare l'esattezza dei valori ottenuti, si trovò, dico, che anche nelle declinazioni di queste stelle esistevano fra i varî cataloghi differenze abbastanza sensibili da far ritenere non del tutto sicuri ed esatti i risultati ricavabili dalla combinazione dei dati dei cataloghi stessi.

Nella determinazione delle latitudini per raggiungere la desiderata esattezza è sempre necessario un numero notevole di stelle di declinazione molto approssimata; e ciò non tanto per rendere probabile nei risultati medî il compenso degli errori od incertezze delle declinazioni stesse, quanto per potere in ogni stazione scegliere e combinare i varî gruppi di stelle in modo, da rendere probabile anche il compenso o l'eliminazione degli errori costanti o sistematici, la cui influenza può riescire assai sensibile, specialmente nelle osservazioni fatte in Osservatorî provvisorî e con istrumenti portatili. E per parte mia confesso di non comprendere come si possa sperare che le latitudini, così determinate e con un piccol numero di declinazioni, possano gareggiare in esattezza colle latitudini ottenute per gli Osservatorî astronomici, sopra molte delle quali, nonostante le moltiplicate serie di osservazioni, il notevole numero dei dati su cui sono basate, e non ostante la diversità dei metodi con cui vennero dedotte e confrontate, esistono tuttora incertezze od errori probabili abbastanza sensibili.

Alla compilazione di un catalogo normale, essendo perciò insufficiente il materiale di osservazione già raccolto, si rendeva necessario di accumulare nuove osservazioni fatte secondo il metodo più opportuno all' indicato scopo, ed esteso ad un conveniente numero di stelle; e mentre parecchi Osservatorî della parte settentrionale d'Europa si assumevano questo gravoso ed importante incarico, era a desiderarsi che anche Osservatorî situati in paralleli più lontani dal polo, o più meridionali, prendessero parte a questa operazione, sia per aumentare il numero dei dati per la determinazione delle declinazioni definitive o normali, sia per ottenere termini di confronto per la ricerca di possibili influenze delle condizioni climatologiche sulle distanze zenitali delle stelle.

Trovandosi a questo riguardo l'Osservatorio del Campidoglio in condizioni assai favorevoli per la sua ubicazione, e possedendo esso un Circolo meridiano di Ertel, nel quale la modestia delle proporzioni è compensata dalla sua provata bontà e perfezione, tanto nella parte ottica che nella parte meccanica, dalla facilità e sicurezza del suo maneggio e dalla conveniente stabilità della sua collocazione, io mi decisi di prender parte a questo importante e delicato lavoro per quanto me lo permettevano gli scarsi mezzi dell'Osservatorio stesso; ai quali si sarebbe cercato di supplire nel miglior modo possibile colla buona volontà, e con tutti gli espedienti che si sarebbero trovati confacenti allo scopo.

Intraprendendo questo lavoro principalmente allo scopo di fornire dati utili per la determinazione della latitudine nelle varie zone od archi del Meridiano centrale europeo, io mi proposi non solamente di fare la verifica delle declinazioni delle stelle già raccomandate a questo proposito, ma di estendere eziandio tale verifica ad un numero molto maggiore di stelle per ogni zona di declinazione, in modo

da fornire un numero sufficiente di dati per la determinazione della latitudine in qualunque parallelo e con tutti i varî metodi ora in uso: e in relazione a ciò mi proposi di verificare le declinazioni di tutte le stelle dell'emisfero nord dalla 1ª fino alla 6ª grandezza inclusive, basando tale verifica sopra un numero conveniente di osservazioni sopra ogni stella.

Trattandosi però di un lavoro troppo gigantesco per i modestissimi mezzi del nostro Osservatorio, e che nel suo insieme avrebbe richiesto parecchi anni di osservazione e di calcoli, io stimai opportuno di dividere il lavoro in due distinte parti, e cioè la prima per la verifica delle declinazioni delle stelle comprese dai paralleli $+20°$ e $+64°$, riservando per la seconda parte la verifica delle declinazioni delle stelle della rimanente parte dell'emisfero nord.

Il metodo che mi proposi di seguire in questa operazione venne già minutamente descritto nella mia Memoria: *Declinazioni medie pel* 1875,0 *di* 285 *stelle dalla* 1ª *alla* 6ª *grandezza* ecc. ecc., pubblicata nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei volume II, serie 3ª 1878; per cui mi limiterò nella presente Memoria a richiamare le principali norme e condizioni in esso stabilite, mentre mi occuperò invece di esporre lo stato in cui trovasi attualmente questo lavoro, e di presentare i risultati finora ottenuti.

Scelta delle stelle. — La scelta delle stelle da osservarsi venne fatta col *British Association Catalogue*, prendendo dal medesimo tutte le stelle alle quali erano assegnate le grandezze 1ª, 2ª... fino alla 6ª, il cui numero era di 2500 circa, potendosi ritenere in esse compresa la maggior parte delle stelle osservabili anche cogli strumenti di mediocre portata usati nelle operazioni geodetiche: e perciò per stelle di 6ª grandezza si debbono intendere quelle adottate come tali del suddetto catalogo, quantunque non poche di esse siano state più tardi portate da Argelander ed Heis alla 6ª ½: sicchè in realtà fra le stelle da noi osservate una parte deve ritenersi di questa ultima grandezza. Per rendere la scelta delle stelle più completa ed esatta sarebbe stato necessario di consultare altri cataloghi, ma ciò avrebbe richiesto un certo tempo, che io stimai di utilizzare piuttosto nelle osservazioni, malgrado il pericolo di escludere dal nostro Catalogo alcune stelle che avrebbero dovuto esservi comprese.

Numero delle osservazioni. — Avuto riguardo alle buone condizioni del nostro clima e principalmente all'ordinaria stabilità e tranquillità della nostra atmosfera, per cui rare volte le immagini delle stelle si presentano diffuse ed oscillanti, e verificata la grande stabilità degli orizzonti a mercurio durante le ore di osservazione, si è ritenuto di assicurare entro ristretti limiti la compensazione degli errori accidentali nella misura delle distanze zenitali stabilendo, che per le stelle vicine al zenit, non osservabili per riflessione, il numero delle osservazioni sopra ogni stella non fosse minore di 16, mentre per le stelle osservabili anche per riflessione, il numero delle osservazioni dovesse essere non minore di 20, e cioè 10 dirette e 10 riflesse; e con tali numeri si è verificato che l'errore probabile del medio per ogni stella riesciva ordinariamente minore di un decimo di secondo.

Riguardo alle stelle osservabili per riflessione si stabilì come norma generale, che le osservazioni dirette e riflesse si dovessero fare alternativamente in sere o passaggi differenti, per poter collimare la stella in prossimità al meridiano e con

quella calma ed attenzione che difficilmente può ottenersi nell'osservazione diretta e riflessa fatte nello stesso passaggio, specialmente per le stelle non molto lontane dall'equatore.

Quantunque da 4° ad 8° gradi di distanza zenitale nelle osservazioni per riflessione si avesse l'obbiettivo del cannocchiale non interamente libero, ma in notevole parte eclissato o coperto, specialmente in vicinanza ai 4°, pure io mi decisi di estendere le osservazioni stesse sino a questo limite, dopo di avere verificato che le immagini si mantenevano sufficientemente splendenti, senza subire deformazioni tali da alterare sensibilmente la loro distanza zenitale. E questa decisione fu presa in vista dei grandi vantaggi, che si ottengono colla combinazione delle osservazioni dirette e riflesse in riguardo alla compensazione degli errori istrumentali sistematici o costanti, ed anche perchè nel caso, che l'indicata circostanza avesse potuto produrre un errore sensibile nelle distanze zenitali, la sua influenza sulla declinazione delle stelle doveva essere compensata da un eguale errore nel valore della latitudine istrumentale. Spingendo l'osservazione per riflessione sino a 4° dal zenit, delle 2500 stelle circa, che dovevano comporre il nostro catalogo, se ne avevano soltanto 300 circa non osservabili per riflessione.

Strumento e metodo di osservazione. — Lo strumento usato nelle osservazioni è un eccellente Circolo meridiano di Ertel, dono fatto all' Osservatorio dal Sommo Pontefice Pio IX; esso venne montato nel 1853 nelle più favorevoli condizioni sotto la direzione del mio predecessore prof. Don Ignazio Calandrelli di ch. mem. il quale ne diede una particolareggiata descrizione nella sua Memoria: *Descrizione scientifica del Circolo meridiano collocato nel nuovo P. Osservatorio della Romana Università*, Roma, tipografia delle Belle Arti 1855. Questa pubblicazione mi dispensa dal dare minuti ragguagli su questo strumento; e perciò mi limito a qualche cenno sulle parti più importanti ed essenziali del medesimo.

Cannocchiale. — L'obbiettivo del cannocchiale è di $0^m,094$ di apertura libera, colla distanza focale di $1^m,1322$. Fra gli oculari di cui è fornito il cannocchiale si è prescelto quello che dà l'ingrandimento 120, il quale offre la maggiore chiarezza e precisione, sia nelle osservazioni delle stelle che nella determinazione del nadir.

Il micrometro ha sette fili fissi paralleli al meridiano, due fili equatoriali fissi distanti fra loro 13″, il filo mobile in ascensione retta e finalmente il filo mobile in declinazione; ma tanto nelle collimazioni delle stelle, quanto nella determinazione del nadir si è sempre usato uno dei due fili equatoriali, escludendo poi del tutto l'uso del filo mobile in declinazione, per evitare il pericolo di possibili irregolarità nella vite micrometrica e per rendere più spedite le osservazioni; mentre il vantaggio di poter fare col filo mobile più collimazioni nello stesso passaggio poteva ritenersi ben compensato dalla maggiore attenzione e sicurezza che può ottenersi nella sola collimazione fatta col filo fisso.

I perni del cannocchiale, lavorati con grande esattezza, riposano su cuscinetti metallici, sui quali però l'attrito è reso assai tenue da appositi contrappesi, il cui punto d'appoggio corrisponde sui pilieri dell' apparato di rovesciamento, fissato sotto il cannocchiale in modo da potersi effettuare l' inversione dello strumento in meno di 30^s e con tutta la desiderabile sicurezza. Il cuscinetto orientale, fissato con robuste

viti al pilastro, può prestarsi ai piccoli movimenti orizzontali per la correzione dell'errore di azimut, mentre il cuscinetto occidentale può prestarsi ai piccoli movimenti verticali, necessari per la correzione dell'errore di livello. La rotazione dello strumento è dolcissima e regolare, non ostante il notevole peso di questo e l'attrito o pressione delle molle destinate ad impedire in esso gli spostamenti orizzontali.

Flessione del cannocchiale. — Quantunque l'obbiettivo e il micrometro siano collegati fra loro con robusti tronchi di cono di ottone, fissati sopra un cubo metallico formante parte dell'asse di rotazione, pure in causa dell'eccedenza del peso dell'apparato micrometrico su quello dell' obbiettivo, il cannocchiale è soggetto a sensibile flessione, verificata, sia coll'osservazione di stelle, sia coll'uso di collimatori, sia finalmente coll'invertire nel tubo la posizione del micrometro con quella dell'obbiettivo ; e la costante della flessione determinata coi varî metodi può ritenersi prossimamente eguale a $+0'',94$, dico approssimativamente, per la grande difficoltà di ottenere l' esatto valore di questo elemento. Il segno $+$ indica che la flessione nel nostro cannocchiale e coll'indicato micrometro aumenta le letture degli archi.

Circoli graduati. — All'estremità dell'asse di rotazione sono fissati due circoli di eguali dimensioni, portanti su lembo d'argento la divisione di $2'$ in $2'$ d'una circonferenza avente per diametro $0^m,628$; e queste divisioni sono veramente sorprendenti per la loro regolarità e sottigliezza, ben inteso però che questa dichiarazione non esclude nelle divisioni stesse l'esistenza di quei piccoli errori accidentali e sistematici, che più o meno si riscontrano in tutti i circoli graduati, che vengono forniti anche dalle più accreditate fabbriche. Nelle osservazioni avrebbero potuto usarsi alternativamente i due circoli, per controllarne e in parte compensarne gli errori; ma per questo scopo sarebbe stato necessario che l' uso. alternato dei due circoli fosse fatto in modo che ogni stella venisse osservata prossimamente lo stesso numero di volte con ognuno di essi, condizione quasi impossibile a verificarsi pel grande numero delle stelle da osservarsi, e per la massima stabilita di distribuire le osservazioni di ogni stella possibilmente in varie stagioni dell'anno, per eliminare o compensare le possibili influenze di errori sistematici o costanti, dipendenti dalle condizioni atmosferiche. Perciò si è creduto di usare sempre lo stesso circolo, e precisamente quello che trovasi dalla parte dell'obbiettivo del collimatore dell'asse di rotazione del cannocchiale, essendosi per apposite ricerche riconosciuti nella sua divisione meno sensibili gli errori accidentali e sistematici.

Per il compenso degli errori sistematici della divisione di questo circolo sarebbe stato utile di fare alternativamente le osservazioni col circolo all'est ed all'ovest; ma oltre alla difficoltà, opposta alla conveniente applicazione di questo processo dal troppo grande numero delle stelle e dalla voluta condizione di fare le osservazioni per ogni stella nelle varie stagioni, se ne incontrava un'altra non meno grave, quella cioè di dovere trasportare da un pilastro all'altro l'unico apparato microscopico di cui è fornito lo strumento; il che richiedeva troppo lavoro e perditempo, senza escludere il pericolo di apportare alle osservazioni altri errori non trascurabili : sicchè fu stabilito che le osservazioni si facessero tutte col circolo all'est, riservandosi poi di ricorrere ad altro mezzo per la correzione o compensazione di quegli errori.

Microscopî. — Le letture del circolo si fanno per mezzo di quattro microscopî

distanti fra loro di 90°, fissati sopra un circolo od anello metallico strettamente collegato col pilastro di marmo. Le viti micrometriche danno direttamente il secondo e per istima il decimo di secondo; il reticolo per la collimazione della divisione è costituito di due fili di tela di ragno a croce od X, sistema opportunissimo per la divisione del nostro circolo, essendo i tratti o divisioni assai sottili e ben definiti; l'ingrandimento dei microscopî è di circa 30 volte.

Al porta-microscopî sono applicati due sensibilissimi livelli per rilevare gli spostamenti angolari cui può andar soggetto, ma essendosi verificato con apposite ricerche e confronti che le indicazioni di questi livelli, principalmente in causa delle variazioni di temperatura, non soddisfanno convenientemente allo scopo cui sono destinati, il loro uso venne del tutto abbandonato, ricorrendo invece per la determinazione del zenit o nadir istrumentale al metodo più diretto e sicuro della riflessione dei fili sull'orizzonte a mercurio, operazione che ripetevasi in ogni sera due, tre ed anche più volte, secondo la durata delle osservazioni e secondo lo stato termometrico dominante nella camera meridiana.

I valori in arco delle rivoluzioni delle viti dei microscopî vennero verificati varie volte durante il periodo di osservazione, ma siccome le differenze furono sempre trovate assai piccole e trascurabili, per la condizione stabilita di leggere gli archi per ogni stella all'una od all'altra delle divisioni più vicine allo zero determinato col nadir in ogni microscopio, per cui la corsa della vite stessa era limitata a due rivoluzioni, o a due divisioni successive; e venne perciò usato per la riduzione degli archi letti ai microscopî il valore medio delle rivoluzioni delle quattro viti

$$r'' = 59'',248$$

quale risultava dalle varie serie di osservazioni.

La ragione principale, per la quale venne stabilito di leggere gli archi per ogni stella, o sopra la stessa divisione, o sulle due divisioni che comprendevano lo zero dei microscopî, fu quella di rendere più spedite e regolari le osservazioni, evitando il perditempo di fare in ogni osservazione la lettura sopra più divisioni, per es. sopra tre divisioni, od il pericolo che si sarebbe incontrato di probabili irregolarità o sproporzioni nel numero delle osservazioni, che si sarebbero fatte per ogni stella sopra le varie divisioni, usate alternativamente nelle varie sere; inconveniente facilissimo a prevedersi in vista del grande numero delle stelle da osservarsi in ogni sera.

Errori accidentali delle divisioni del circolo. — Adottando però tale metodo di osservazione non si poteva sperare alcun compenso degli errori accidentali del medio degli archi letti ai quattro microscopî sulla stessa divisione; ma si stabilì di rimediare a questo inconveniente col determinare direttamente questi errori accidentali e le relative correzioni; operazione lunga e laboriosa, ma che avrebbe potuto eseguirsi a tempo opportuno e colla dovuta calma e precisione.

Gli errori accidentali della divisione del nostro circolo sono abbastanza piccoli, per poter ritenere che nel medio delle letture, fatte ai quattro microscopî sopra un gruppo di tre o al più cinque divisioni, essi vengano molto approssimativamente compensati; e in relazione a ciò fu stabilito di valutare l'errore accidentale per ogni divisione, o piuttosto di ogni lettura fatta ai 4 microscopî, colla differenza fra l'arco

dato dal medio dei quattro microscopî puntati su quella divisione, e il medio degli archi letti sopra il gruppo di tre o di cinque divisioni comprendenti come media la divisione in discorso.

Determinando questi errori accidentali con un gruppo di cinque divisioni, quantunque si potesse ritenere più probabile la compensazione degli errori accidentali delle singole divisioni, e quindi più esatto l'errore trovato per ogni lettura, pure nel timore di qualche influenza dovuta a possibili irregolarità delle viti nella lunga corsa di cinque divisioni, si stimò più ragionevole di dedurre l'errore accidentale della divisione dal medio dei risultati avuti dal gruppo di tre divisioni e dal gruppo di cinque; od in altri termini l'errore della divisione doveva dedursi dal medio della lettura fatta sulle cinque divisioni, dando però un peso doppio alla lettura fatta sulle tre divisioni di mezzo.

Questa operazione, che diventava assai lunga e laboriosa per il grande numero delle divisioni da esaminarsi, che era di 2700, quante cioè ne corrispondono ad un quarto di circolo, e per la necessità di fare per ogni divisione almeno tre letture, era però assolutamente necessaria; ed essa venne da me intrapresa nel marzo 1877 e compita nel seguente aprile per l'arco dei 44° in cui cadevano le osservazioni fatte per la 1ª parte del nostro catalogo: mentre l'esame delle rimanenti divisioni dell'intero quadrante verrà eseguito non appena saranno ultimate le osservazioni per la seconda parte del catalogo stesso.

Errori sistematici della graduazione del circolo. — Quantunque la graduazione o divisione del nostro circolo sia molto accurata e pregevole, pure essa non è esente da quelle piccole irregolarità che dipendono dalle imperfezioni dai meccanismi usati nelle divisioni del circolo, o della differenza delle condizioni nelle quali vennero tracciate le divisioni nelle diverse parti del circolo stesso; irregolarità che più o meno esistono in tutti i circoli graduati, e per le quali gli archi letti nelle varie parti del circolo, partendo da un dato punto come origine, vanno oscillando o in più o in meno, e con una specie di regolarità o periodicità, attorno ai veri valori degli angoli da loro misurati o descritti.

Queste differenze fra gli archi letti ed i veri angoli loro corrispondenti sono state determinate nel nostro circolo con molta accuratezza di 10° in 10°, eliminando l'influenza degli errori accidentali delle singole divisioni facendo la lettura degli archi sopra un gruppo di tre divisioni; e si è trovato che tali differenze od errori sistematici, quantunque siano abbastanza piccoli, non sono però trascurabili. Ma di questi errori e del metodo usato per le relative correzioni si tratterà in modo speciale in uno dei seguenti articoli.

Determinazione del punto zenitale. — La posizione della verticale o del punto zenitale sul circolo fu interamente appoggiata sulla determinazione del nadir, fatta colla coincidenza del filo equatoriale colla sua immagine riflessa dall'orizzonte a mercurio, escludendosi del tutto il metodo delle osservazioni dirette e riflesse delle stelle nello stesso passaggio.

In alcuni Osservatorî il punto zenitale vien dedotto dalla combinazione del nadir, determinato colla riflessione del filo equatoriale, con quello ottenuto dalle osservazioni dirette e riflesse di stelle al sud ed al nord; ma questo metodo mi sembra

alquanto arbitrario e non del tutto sicuro, perchè all'errore costante o quasi costante, cui è soggetto il punto zenitale determinato colla riflessione dei fili, si sostituisce un errore variabile, dipendente principalmente dagli errori accidentali delle osservazioni delle stelle e dagli errori delle varie divisioni del circolo.

Nel nostro strumento la determinazione del nadir raggiunge tale esattezza, che la differenza di ogni osservazione col medio delle quattro osservazioni successive, dalle quali viene dedotto il nadir stesso, è sempre ristretta in pochi centesimi di secondo, fatta eccezione alle sere di vento impetuoso, fortunatamente rare nel nostro clima, nelle quali si ha cura di aumentare il numero delle osservazioni per rendere probabile la compensazione dei più sensibili errori a cui sono soggette.

Quantunque la nostra sala meridiana sia costruita in modo da poterne rendere la temperatura uniforme e convenientemente equilibrata colla temperatura esterna, pure nella circostanza di notevoli variazioni termometriche nella durata delle osservazioni si trova, che il punto zenitale od il nadir è soggetto a sensibili spostamenti, i quali però vengono determinati direttamente con osservazioni del nadir stesso, ripetute ad opportuni intervalli di tempo e più frequentemente che nelle sere di temperatura normale. Di modo che per le nostre osservazioni il punto zenitale può ritenersi come un sicurissimo termine di confronto fra le osservazioni dirette o riflesse fatte nelle varie sere.

Naturalmente il punto zenitale così determinato è soggetto ad un errore costante, all'errore cioè della divisione del circolo a cui esso è riferito, ma questo errore mentre può facilmente determinarsi anche per mezzo delle osservazioni, esso poi viene per ogni stella totalmente compensato nel medio risultato delle osservazioni dirette e riflesse.

Osservatori e loro errori personali relativi. — Essendomi proposto di eseguire il nostro lavoro, almeno per la parte di osservazione, nel più breve tempo possibile, fu convenuto di ripartire le osservazioni fra me e gli assistenti dott. Alfonso Di Legge e dott. Francesco Giacomelli, per ottenere in ogni sera il massimo numero di osservazioni possibile, approffittando di tutte le ore favorevoli a queste osservazioni nel nostro clima, le quali ordinariamente sono comprese da un'ora e mezzo dopo il tramonto del sole fino alle 2^h antimeridiane, alla quale ora cessa ordinariamente, in causa dello stato igrometrico dell'atmosfera, la necessaria tranquillità e regolarità nell'immagine delle stelle: mentre poi in queste ore nel nostro Osservatorio si ha il vantaggio della quiete e tranquillità necessaria per le osservazioni riflesse, le quali gareggiano in bontà colle osservazioni dirette.

Questo riparto delle osservazioni fra i tre osservatori rendeva però necessaria la ricerca dei loro errori personali relativi, sia in riguardo alla collimazione delle stelle, sia in riguardo alla lettura degli archi, senza di che non avrebbe potuto darsi ai risultati delle osservazioni la voluta uniformità ed omogeneità.

Da varie serie di osservazioni di confronto, fatte prima e durante l'esecuzione del lavoro tanto nella collimazione delle stelle e del nadir, quanto nella lettura degli archi, le differenze fra i tre osservatori riuscirono assai piccole, e di carattere piuttosto accidentale che sistematico, in modo da non potersi ridurre tali differenze a quantità costanti di segno e di grandezza. In relazione a ciò fu stabilito di considerare

questi errori come trascurabili, cercando però di rimuovere qualunque dubbio a questo riguardo sull' esattezza delle nostre osservazioni, distribuendo possibilmente in eguali proporzioni fra i tre osservatori la totalità delle osservazioni da farsi sopra ogni stella.

Osservazioni fatte per la prima parte del catalogo. — Secondo le norme superiormente indicate le osservazioni delle stelle comprese dai paralleli di declinazione + 20° e + 64° vennero sistematicamente intraprese verso la metà del marzo 1875 e regolarmente continuate fino alla fine del marzo 1877, alla quale epoca poteva ritenersi compiuto il lavoro di osservazione, non rimanendo che poche osservazioni da farsi sopra alcune stelle per completare il loro numero.

Nonostante la cura e diligenza usata per ottenere sopra ogni stella il numero delle osservazioni stabilite, per alcune di esse però si è trovato questo numero in difetto, quando nella discussione delle osservazioni se ne sono trovate alcune non utilizzabili, o perchè fatte in condizioni atmosferiche troppo anormali, o per dubbio di equivoci nella lettura degli archi o di spostamenti inavvertiti dello strumento. Per alcune stelle poi il numero è riescito troppo scarso, perchè facenti parti di gruppi troppo numerosi, o perchè passanti al meridiano quasi simultaneamente con molte altre stelle.

Il numero totale delle osservazioni utili, fatte sulle 1463 stelle componenti questa prima parte del catalogo, delle quali 308 più vicine al zenit non furono osservate per riflessione, è di 29,648, e cioè 17,782 osservazioni dirette e 11,866 riflesse. Queste osservazioni sono ripartite in circa 600 giorni d' osservazione, nei quali il nadir venne complessivamente osservato non meno di 5000 volte. Se questa enorme massa di osservazioni raccolta in poco più di due anni prova la non comune attività degli osservatori, conferma d'altra parte la bontà del nostro clima per queste osservazioni astronomiche; mentre poi non è a tacersi, che a ciò ha molto contribuito la comodità e facilità di maneggio del nostro circolo meridiano e la bontà della sua costruzione, per la quale durante l'intero periodo di osservazione non si presentò il bisogno di nessuna riparazione, e non si ebbe a lamentare il minimo inconveniente contro la regolarità delle osservazioni.

Riduzione delle osservazioni. — Compiute le osservazioni rimaneva il gravissimo lavoro delle loro riduzioni per ricavare i dati necessarî alla determinazione delle declinazioni medie delle stelle. La riduzione delle distanze zenitali apparenti erasi già in gran parte eseguita durante le osservazioni, ma restavano a determinarsi le correzioni per gli errori istrumentali e le riduzioni delle distanze zenitali apparenti alle distanze zenitali medie pel 1875,0.

Prescindendo dagli errori istrumentali, il calcolo delle distanze zenitali apparenti si riduceva ad una operazione semplicissima, avendosi già pronto il punto zenitale ossia l'arco corrispondente al zenit, o potendosi questo con facile interpolazione dedurre per ogni stella dai punti zenitali ottenuti in ogni sera a noti intervalli durante le osservazioni; cosichè dalla differenza fra il medio degli archi letti ai quattro microscopî e l' arco corrispondente al zenit bastava aggiugnere la correzione pel valore medio delle rivoluzioni delle vite dei microscopî e la rifrazione, la quale veniva calcolata colle tavole della *Connaissance des Temps*, ritenuta abbastanza esatta per le nostre distanze zenitali che non superavano i 22°. Avuto riguardo al

grande numero delle osservazioni si troverà però che anche questa semplice operazione deve avere richiesto molto tempo e lavoro.

Ad ottenere però il vero valore delle distanze zenitali apparenti era indispensabile, o di trovare le correzioni degli errori istrumentali, o di ricorrere a qualche artificio per ottenerne il compenso nella determinazione della declinazione.

Essendosi direttamente determinati gli errori accidentali delle divisioni del circolo, erano già note le correzioni da applicarsi agli archi letti per gli errori della divisione o delle divisioni usate per ogni stella, tanto nelle osservazioni dirette che nelle riflesse: ma rimanevano a trovarsi le correzioni per l'errore del zenit, per la flessione e per gli errori sistematici del circolo.

Quantunque pel nostro strumento si conoscessero già con sufficiente approssimazione i dati necessarî per dedurre queste correzioni, pure si è creduto conveniente di farne la verifica per mezzo di opportune combinazioni dei risultati stessi delle osservazioni. Che anzi, avendosi motivo di sospettare, che oltre agli indicati errori istrumentali le nostre osservazioni potessero essere soggette ad altri errori, dipendenti da una possibile differenza nel modo di collimare le stelle dirette e riflesse, e le stelle dal nord al sud, ed all' errore proveniente dalla deformazione o spostamento del centro dell' immagine delle stelle osservate in vicinanza al zenit coll'obbiettivo del cannocchiale parzialmente ecclissato, così si è cercato un modo di riduzione delle osservazioni tale, da rendere probabile la compensazione complessiva di tutti gli errori.

Dovendosi dedurre la declinazione delle stelle dalla differenza della latitudine del luogo di osservazione colla distanza zenitale media ricavata dalle osservazioni, è evidente che questa differenza si potrebbe ritenere come esatta, anche quando la distanza zenitale fosse soggetta agli errori istrumentali, o ad altri errori costanti o sistematici delle osservazioni, ogni qualvolta invece di prendere il valore esatto od assoluto della latitudine, si prendesse una latitudine apparente affetta dagli stessi errori della distanza zenitale della stella.

Questa latitudine apparente, che chiameremo *latitudine istrumentale,* evidentemente è quella che si otterrebbe colla osservazione di stelle di nota declinazione vicine al paralello della stella di cui cercasi la declinazione, facendosi sopra ognuna di esse un conveniente numero di osservazioni pel compenso degli errori accidentali, e scegliendo un numero di stelle abbastanza grande per ottenere il probabile compenso delle incertezze od errori possibili nelle loro singole declinazioni. E qualora questa operazione potesse eseguirsi in molti paralleli, distribuiti uniformemente sulla zona in declinazione alla quale vuolsi estendere il catalogo, evidentemente si otterrebbero i dati necessarî per costruire la tavola delle latitudini istrumentali corrispondenti alle varie stelle, e colle quali potrebbe dedursi la loro declinazione indipendente da tutti gli errori costanti a cui può essere soggetta la loro distanza zenitale.

Fra le stelle del nostro catalogo se ne aveva un considerevole numero di quelle le cui declinazioni potevano ritenersi già molto approssimativamente determinate, e che si presentavano abbastanza uniformemente distribuite fra i varî paralleli; dimodochè divisa in zone di 2° in 2° la totale zona da $+ 20°$ a $+ 64°$, si aveva per ognuna di esse un gruppo di stelle abbastanza grande per ricavarne la latitudine

istrumentale pel parallelo medio, se non esatta, almeno convenientemente approssimata. Ma per rendere più probabile la compensazione dei piccoli errori da cui potevano essere affette le declinazioni di queste stelle, e principalmente per rendere meno sensibile l' influenza degli errori sistematici, era necessario o di ricavare queste declinazioni dalla combinazione di varî cataloghi, o di prendere per ogni stella la declinazione data da un solo catalogo, ma in modo che in ogni gruppo queste declinazioni riescissero uniformemente distribuite fra un certo numero di cataloghi.

Col primo metodo però il numero delle stelle sarebbe riescito troppo scarso per la difficoltà, o piuttosto l' impossibilità di trovare molte stelle comuni ad un numero conveniente di cataloghi meritevoli di fiducia: col secondo metodo invece si poteva accumulare con buoni cataloghi un maggior numero di stelle, ma difficilmente si poteva ottenere che ogni catalogo figurasse in ogni gruppo con un dato numero delle sue declinazioni, e si incorreva quindi nel pericolo di rendere nelle latitudini istrumentali troppo preponderanti le influenze dei singoli cataloghi.

Malgrado questo pericolo venne però adottato il secondo metodo, come quello che forniva un maggior numero di stelle, e perchè col mezzo degli errori istrumentali, già approssimativamente noti, si potevano stabilire dei criterî per giudicare sul grado di fiducia meritato dai valori trovati per le latitudini istrumentali o sul grado di approssimazione da esse ragionevolmente sperabile.

Appena ultimate le osservazioni per la compilazione della prima parte del nostro catalogo venne intrapresa la ricerca di queste latitudini istrumentali, per mezzo di 285 stelle fondamentali, delle quali 40 furono prese dal *Nautical Almanac* di Londra, 53 dalla *Connaissance des Temps*, 82 dal Catalogo *I Pulkowaer Hauptsterne*, 81 dal Catalogo II *Zusatz-Sterne* colle correzioni riportate nel *Mittlere und scheinbare Oerter für* 1876 *von* 539 *Sternen* ecc., e finalmente 29 dal Catalogo dell'Associazione Geodetica Internazionale. E vennero scelte queste stelle, perchè si poteva ritenere la loro declinazione, data nei cataloghi suddetti, abbastanza approssimativa pel nostro scopo, e perchè si avevano già calcolate per queste stelle le declinazioni apparenti. Nella mia citata Memoria: *Declinazioni medie pel* 1875,0 *di* 285 *stelle dalla* 1ª *alla* 6ª *grandezza* ecc. pubblicando i valori così ottenuti per le latitudini istrumentali, esposi minutamente i criterî e gli argomenti, pei quali poteva ritenersi dimostrata la grande approssimazione di queste quantità e la grande fiducia da esse meritata, senza escludere però il dubbio che esse potessero essere ancora soggette a qualche piccola influenza degli errori sistematici dei cataloghi usati, e specialmente di quelli dei due cataloghi di Pulkova, che concorrevano nella determinazione delle latitudini istrumentali con un numero di stelle troppo grande in confronto di quelle somministrate dagli altri cataloghi.

A confermare la verità del giudizio da me espresso in riguardo alla fiducia meritata dalle nostre latitudini istrumentali riescì opportunissima la pubblicazione fatta dalla Società Astronomica di Germania del pregevolissimo catalogo, *Fundamental-Catalog für die Zonen-Beobachtungen am Nördlichen Himmel*, nel quale fra le 539 stelle, le cui posizioni furono ricavate dall' illustre prof. Auwers dalla più ragionata combinazione dei più accreditati cataloghi, fra i quali quello di Greenwich 1872 e quello di Pulkova 1871 non ancora pubblicati, si trovavano quasi

tutte le stelle usate per la determinazione delle nostre latitudini istrumentali, per mezzo delle quali eransi dedotte le declinazioni medie pel 1875,0 delle stesse stelle, quali furono pubblicate nella mia citata Memoria.

Il confronto delle nostre declinazioni, dedotte per mezzo di quelle costanti dalle nostre sole osservazioni, colle declinazioni del *Fundamental-Catalog*, che si potevano considerare come i migliori risultati sperabili dalla combinazione del più importante materiale di osservazione fino a quell' epoca raccolto e conosciuto, si poteva evidentemente ritenere come il più sicuro mezzo per verificare il grado di fiducia meritato dal nostro Catalogo; e perciò non appena ebbi ricevuto il *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft* ecc. 13 Jahrgang Drittes Heft, in cui erano date le correzioni trovate da Auwers per i precedenti Cataloghi I. *Pulkowaer Hauptsterne* e II. *Zusat-sterne*, mi interessai tosto di dedurne le declinazioni per le 271 stelle comuni al catalogo delle 285 stelle già da me pubblicato; e ciò allo scopo di fare l'immediato confronto fra le declinazioni di Auwers e le nostre.

Da questo confronto si dedusse che in complesso le nostre declinazioni si trovavano con quelle di Auwers nel più soddisfacente accordo; poichè l'errore o differenza probabile per un confronto si riduceva a $\pm 0''{,}28$, mentre classificando le differenze in ordine alla grandezza, il loro numero o frequenza si accordava benissimo con quello calcolato secondo la teoria degli errori accidentali. Ordinando però le stelle secondo la grandezza delle loro declinazioni e secondo le loro ascensioni rette, si trovava che le differenze fra i due cataloghi nell'uno e nell'altro modo di classificazione, anzichè presentare un andamento irregolare od accidentale, presentavano invece un andamento periodico o sistematico, comprovante nelle nostre declinazioni rispetto a quelle di Auwers una differenza od errore sistematico, dipendente tanto dalla declinazione quanto dalla ascensione retta, ed oscillante fra estremi di qualche decimo di secondo in più o in meno.

Quantunque non si potesse escludere che una parte di questi errori sistematici potesse appartenere anche al *Fundamental-Catalog* di Auwers, pure si rendeva manifesto che una parte di essi, e probabilmente la maggior parte, era dovuto al nostro catalogo, in causa della preponderante influenza degli errori sistematici di alcuni dei cataloghi dai noi usati nella determinazione delle latitudini istrumentali; ciò che d'altronde io aveva già fatto presentire nella mia citata Memoria, specialmente in riguardo ai due cataloghi di Pulkova, dai quali erasi preso un numero preponderante di stelle, le declinazioni delle quali risultavano anche dalle nostre osservazioni troppo piccole.

Da ciò risultava la necessità di rendere le nostre latitudini istrumentali più approssimate, cercando di diminuire l' influenza degli errori sistematici dei due cataloghi di Pulkova: ma siccome la compilazione del catalogo delle 1463 stelle era in allora già molto avanzata, così ho creduto opportuno di compierla usando le latitudini già determinate, riservandomi però di apportare alle declinazioni così ottenute quel sistema di correzioni che sarebbesi riconosciuto più ragionevole e probabile, dopo di avere potuto esaminare il completo lavoro del prof. Auwers, col quale avrei potuto formarmi un concetto più adequato e sicuro in riguardo al materiale di osservazione sul quale egli aveva basato il suo catalogo.

Soltanto nel novembre 1879, quando il nostro catalogo sarebbe già stato pronto per essere pubblicato, mi giunse il desiderato *Fundamental-Catalog* e l'unita Memoria del prof. Auwers, nella quale sono riportati i materiali da lui presi nei varî cataloghi; esposti minutamente i confronti e i profondi studî da lui fatti sui medesimi, e descritto l'ingegnoso metodo da lui seguito per ricavare dal complesso di quei dati per le 539 stelle fondamentali le posizioni medie più meritevoli di fiducia.

Quantunque il gigantesco lavoro del prof. Auwers sia superiore a qualunque encomio per la maestria ed accuratezza colla quale egli ha cercato di render comparabili le posizioni date dai varî cataloghi per le 539 stelle, e per ottenere il più probabile compenso degli errori accidentali e sistematici presumibili nelle posizioni stesse, in modo da potersi ritenere le coordinate da lui dedotte per queste stelle come le più approssimate e le più precise, che potevano ricavarsi dalla combinazione dei materiali posti a sua disposizione, pure avuto riguardo alla inevitabile eterogeneità di questo materiale, per la grande diversità del numero delle osservazioni date per ogni stella nei singoli cataloghi, e per la diversità del numero dei cataloghi contenenti la stessa stella, mentre è a ritenersi sensibilmente diverso il grado di fiducia meritato dalle posizioni assegnate alle varie stelle, non mi sembra poi del tutto escluso il dubbio che specialmente le declinazioni possano essere in qualche modo influenzate dagli errori sistematici dei cataloghi da cui furono dedotte.

Questa insufficienza dei dati, e quindi la possibilità di residui errori sistematici è certamente più temibile nelle declinazioni delle 203 stelle del Catalogo II. *Zusatz-sterne* di Pulkova, le quali furono in gran parte dedotte da un numero piccolo di cataloghi, in media 3, 4, mentre non poche di esse furono dedotte da soli due ed alcune da uno solo.

Riconosciuta la necessità di arrecare alle nostre latitudini istrumentali un sistema di correzioni atte ad eliminare, o meglio compensare gli errori delle declinazioni prese dai cinque cataloghi da noi prescelti, il *Fundamental-Catalog* di Auwers poteva essere a questo scopo utilizzato in due diversi modi, e cioè, o col basare interamente le latitudini stesse sulle declinazioni date dal medesimo per le 272 stelle comuni al nostro catalogo, oppure col prendere dal *Fundamental-Catalog* una parte di queste declinazioni in modo da togliere, od almeno scemare la preponderante influenza dei due cataloghi di Pulkova, e specialmente quella del II. *Zusatz-sterne*, le cui declinazioni tanto dalle nostre osservazioni, quanto dai risultati ottenuti da Auwers, si erano dimostrate sistematicamente e sensibilmente basse.

Il prof. Auwers in una sua gentilissima lettera, direttami il 6 dicembre 1879, dopo di avermi esposto i risultati ottenuti dal confronto delle declinazioni del *Fundamental-Catalog* con quelle da me pubblicate nella Memoria, *Declinazioni medie* 1875,0 *di* 285 *stelle*...., per 271 stelle comuni ai due cataloghi; dopo di avermi espressa la sua soddisfazione pel conveniente accordo fra i due sistemi di declinazioni, e dopo di avermi indicato i loro errori o differenze sistematiche, tanto in declinazione quanto in ascensione retta, chiudeva la sua lettera consigliandomi a non mutare, in riguardo alle ulteriori riduzioni, in nulla affatto il metodo finora da me seguito, qualora il mio lavoro fosse limitato alla zona da $\pm 22°$ di distanza zenitale; suggerendomi però, nel caso che dovesse estendersi a $\pm 44°$ come io ne aveva espresso

l'intenzione, a calcolare nuovamente le latitudini istrumentali, servendomi esclusivamente delle declinazioni del *Fundamental-Catalog*, per ottenere maggiore precisione e più omogeneità fra le due parti del nostro catalogo.

Quantunque io fossi convinto che nel calcolo delle nostre latitudini istrumentali, usando esclusivamente le declinazioni del *Fundamental-Catalog*, i risultati sarebbero stati più approssimativi di quelli già ottenuti, considerando però che con tale metodo il nostro catalogo veniva interamente appoggiato sopra un altro catalogo pregevolissimo, ma probabilmente non del tutto esente da influenze di errori sistematici, così mi decisi a seguire in parte soltanto il suggerimento del prof. Auwers, calcolando cioè le latitudini istrumentali colle declinazioni precedentemente prese dai Cataloghi, *Nautical Almanac*, *Connaissance des Temps*, I. *Pulkowaer Hauptsterne* e quello dell'Associazione Geodetica, sostituendo però alle declinazioni del Catalogo II. *Zusatz-sterne* le declinazioni del *Fundamental-Catalog* di Auwers, per le quali poteva ritenersi rimossa la preponderante influenza degli errori sistematici di quel catalogo.

Con questo processo il nostro catalogo si manteneva indipendente in quanto al modo di compilazione da quello di Auwers, e in gran parte indipendente dal medesimo anche in riguardo ai dati fondamentali su cui era appoggiato; cosicchè essi avrebbero potuto prestarsi ad un reciproco controllo e verifica. Che anzi a rendere le nostre latitudini istrumentali, e quindi il nostro catalogo quasi totalmente indipendente dagli errori delle declinazioni delle stelle fondamentali, ho creduto opportuno di cercare le correzioni da applicarsi alle medesime per soddisfare a certe relazioni, stabilite dalla teoria fra i risultati delle osservazioni e gli errori istrumentali.

Latitudini istrumentali. *Prima approssimazione.* — Quantunque nella mia citata Memoria siano state pubblicate le latitudini apparenti ottenute dalle 285 stelle fondamentali, quali risultavano dalle nostre osservazioni, tanto dirette quanto riflesse, e siano state pubblicate anche le latitudini istrumentali da esse dedotte per le varie distanze zenitali, pure ritengo necessario di pubblicare nuovamente questi dati, per i cambiamenti in essi avvenuti per la sostituzione del *Fundamental-Catalog* di Auwers al Catalogo II. *Zusatz-sterne*, e per alcune correzioni arrecate alle latitudini ottenute da alcune stelle, nelle quali era occorso qualche equivoco nelle riduzioni, e finalmente per l'aggiunta di una stella, la 716 Groombridge, della quale furono completate le osservazioni dopo la pubblicazione della Memoria suddetta.

Le 286 stelle sono ripartite fra i cinque cataloghi, da cui furono prese le loro declinazioni, nel seguente modo:

N. A. Nautical Almanac di Londra	stelle n. 40
C. T. Connaissance des Temps	» 53
A. G. I. Pulkowaer Hauptsterne	» 83
F. C. Fundamental-Catalog di Auwers	» 81
G. M. Catalogo dell'Associazione Geodetica	» 29

I valori ottenuti per la latitudine dalle singole stelle, tanto dalle osservazioni dirette che dalle riflesse, sono contenute nel seguente specchio I, il quale porta per ogni stella il nome del rispettivo catalogo e le declinazioni medie pel 1875,0 dalle quali sono state dedotte le latitudini stesse.

Latitudini apparenti.

SPECCHIO I.

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni riflesse
	+			
β Ariete . . .	20° 11′ 45″,59	N.A.	34″,41	32″,75
110 Ercole . . .	20 25 40,53	A.G.	34,58	32,65
γ′ Leone . . .	20 28 22,62	N.A.	34,69	33,45
ε Ariete. . . .	20 50 20,60	C.T.	34,81	34,16
η Cancro . . .	20 51 50.68	N.A.	34,44	33,01
ζ Toro	21 3 50,45	A.G.	34,63	33,09
δ Leone. . . .	21 12 29,27	N.A.	34,58	33,64
ι Toro	21 24 33,38	F.C.	34,90	33,96
ν Ariete. . . .	21 25 10.63	F.C.	35,36	34,3
20 Chioma. . .	21 35 18,01	F.C.	34,53	32,91
109 Ercole . . .	11 42 51,06	A.G.	34,08	33,18
β Ercole . . .	21 45 48.50	C.T.	35,09	33,60
δ Gemelli. . .	22 12 37,19	N.A.	34,23	33,29
η Gemelli. . .	22 32 27,10	C.T.	35,95	34,15
μ Gemelli. . .	22 34 31,20	N.A.	34,18	33,46
τ Toro	22 42 54,32	F.C.	34,39	33,35
υ Pegaso . . .	22 42 58,60	C.T.	34,52	33.41
α Ariete. . . .	22 52 12,87	N.A.	34,55	33,32
λ Pegaso . . .	22 54 30,23	G.M.	35,06	34,15
τ Pegaso . . .	23 3 22,61	F.C.	34 32	33,24
23 Chioma. . .	23 19 4.20	C.T.	34,58	33,21
ζ Andromeda.	23 35 12,37	A.G.	34,44	32,93
27 Toro	23 40 9,23	A.G.	34,51	33,21
η Toro	23 43 0.16	N.A.	34,20	33,58
17 Toro	23 43 6,05	A.G.	34,10	33,21
41 Leone . . .	23 50 31,62	A.G.	34,60	33.76
μ Pegaso . . .	23 56 30,70	A.G.	34,35	33,25
ζ Leone . . .	24 2 22,20	A.G.	34,91	34,07
24 Volpetta . .	24 17 13.37	F.C.	34,30	32,97
ε Leone. . . .	24 20 54,95	N.A.	34,83	33,87
κ Gemelli. . .	24 41 45,22	A.G.	35,44	34,19
ι Pegaso . . .	24 44 7.00	A.G.	34,77	33,75
δ Ercole. . . .	24 59 16.90	C.T.	34,61	33,92
κ Pegaso . . .	24 4 16,68	A.G.	35,55	34,58
ε Gemelli. . .	25 15 9.57	A.G.	34,71	33,87
16 Pegaso . . .	25 20 15,56	N.A.	34,26	33,59
d Boote. . . .	25 41 4.76	F.C.	34,54	33,82

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni riflesse
	+			
μ Leone. . . .	20° 35′ 40″,40	C.T.	34″,84	33″,81
υ Pesci	26 36 23.18	A.G.	34,74	33,82
γ Corona . . .	26 41 34,12	A.G.	34,81	33,54
41 Ariete . . .	26 44 37,30	C.T.	33,46	32,58
α Corona . . .	27 8 11,86	N.A.	35,24	34,27
35 Ariete . . .	27 10 25,69	F.C.	33,90	33,46
ε Corona . . .	27 14 28,16	A.G.	35,32	34,67
β Pegaso . . .	27 24 18,80	C.T.	35,32	34,11
ψ Boote. . . .	27 26 9,95	N.A.	34,81	33,46
32 Volpetta . .	27 34 59,27	N.A.	34,00	33,34
ε Boote. . . .	27 36 7,93	N.A.	34,10	33,28
β Cigno. . . .	27 41 54,50	C.T.	34,96	33,97
μ Ercole . . .	27 47 42,04	N.A.	35,05	34,19
11 Boote. . . .	27 59 28,27	F.C.	34,88	34,20
ι Gemelli. . .	28 2 40,10	A.G.	34,36	33,93
χ Gemelli. . .	28 8 34,02	N.A.	34,50	33,95
β Gemelli. . .	28 19 34,09	N.A.	34,39	33,42
α Andromeda.	28 24 0,76	N.A.	34,66	34,03
β Toro	28 29 57,83	N.A.	33,70	32,80
β Chioma. . .	28 30 44,80	C.T.	34,45	37,76
ε Andromeda.	28 37 57,84	A.G.	34,90	33,89
o Ercole . . .	28 44 47,60	A.G.	34,75	33,72
α Triangolo .	28 58 8,11	A.G.	34,62	34,01
ι Cancro . . .	29 12 54,71	A.G.	34,12	33,67
ξ Ercole . . .	29 15 43,87	A.G.	34,41	33,25
τ Pesci	29 35 31,29	A.G.	34,51	33,66
β Corona . . .	29 32 15,16	A.G.	34,62	33,77
η Pegaso . . .	29 34 4.80	C.T.	34,90	33,90
ζ Cigno. . . .	29 42 54,04	N.A.	33,95	33,22
δ Andromeda.	30 10 35,26	A.G.	34,71	33,91
72 Pegaso . . .	30 38 7,47	F.C.	34,05	33.03
η Corona . . .	30 44 25,10	C.T.	34,54	33,65
ρ Boote. . . .	30 55 15,87	N.A.	34,60	33,92
57 Cancro . . .	31 3 4,26	F.C.	34,95	34,32
ε Ercole . . .	31 6 42,80	C.T.	34,76	34,04
42 Leone. . . .	31 20 24,43	F.C.	35,18	34,41
ζ Perseo . . .	31 30 37,80	C.T.	34,80	34,02
θ Corona . . .	31 46 55,06	A.G.	33,35	32,39

SPECCHIO I.

Latitudini apparenti.

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni riflesse	STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni riflesse
	+					+			
ζ Ercole . . .	31° 49′ 50″,00	N.A.	34″,80	34″,43	τ Cigno . . .	37° 30′ 46″,40	C.T.	34″,68	34″,70
o Perseo. . . .	31 53 25,77	A.G.	34,38	33,98	μ Boote . . .	37 48 59,26	A.G.	34,09	33.89
					μ Andromeda	37 49 14,92	A.G.	33,35	33,13
ρ Gemelli. . .	32 1 51,27	F.C.	34,31	33,81	17H Cani da c.	37 49 24,06	F.C.	34,34	33,86
α^2 Gemelli. . .	32 9 37,77	N.A.	34,66	34,12					
ξ Orsa magg.	32 13 55,80	C.T.	35,96	34,78	θ Lira	37 54 43,39	F.C.	34,25	
γ Lira	32 31 10,20	C.T.	34,28	33,58	61^2 Cigno . . .	38 7 59,30	C.T.	34,00	
π^1 Pegaso . . .	32 33 45,40	A.G.	35,30	34,15	61^1 Cigno . . .	38 8 8,36	N.A.	33,88	
π^2 Pegaso . . .	32 33 55,73	A.G.	34,70	33,56	μ Auriga. . .	38 20 2,23	G.M.	34,17	
w Ercole . . .	32 37 47,80	C.T.	34,87	34,07	ρ Perseo . . .	38 21 15,44	A.G.	34,09	
ι Auriga . . .	32 57 56,99	N.A.	33,87	33,25	10 Lucertola .	38 24 0,34	F.C.	34,32	
π Andromeda.	33 1 51,63	A.G.	34,26	33,77	1450 Groombr. .	38 26 35,23	A.G.	33,98	
β Lira	33 13 7,28	N.A.	34,29	33,50	α Lira	38 40 5,95	N.A.	33,74	
γ Triangolo .	33 16 4,22	F.C.	34,49	33,78	γ Boote . . .	38 51 20,66	A.G.	33,43	
ε Cigno. . . .	33 30 10,90	C.T.	34,45	34,02	σ Cigno . . .	38 52 17,50	C.T.	34,28	
π Gemelli. . .	33 43 13,23	F.C.	34,65	34,08	3097 B.A.C. . . .	38 57 0,50	C.T.	33,17	
ν Orsa magg.	33 46 33,55	A.G.	34,22	33,36	α Cani da c. .	38 59 38,06	N.A.	34,11	
δ Boote . . .	33 46 56,30	C.T.	35,38	34,55	ν Auriga. . .	39 6 35,07	A.G.	35,67	
					η Ercole . . .	39 9 39,76	A.G.	34,86	
θ Gemelli . .	34 6 34,40	C.T.	34,61	33,87	17 Cani da c. .	39 9 49,19	F.C.	34,72	
σ^1 Corona. . .	34 10 34,20	C.T.	34,56	33,81	5ε Lira med.	39 28 58,57	A.G.	34,33	
54 Perseo . . .	34 15 45,59	F.C.	34,44	33,26	51 Auriga . .	39 29 54,28	A.G.	34,60	
β Triangolo .	34 23 41,94	G.M.	34,57	33,59	63 Auriga . .	39 31 19,55	F.C.	34,37	
46 Leon min. .	34 53 18,47	A.G.	35,11	34,38	4ε Lira prec. .	39 32 25,11	A.G.	34,21	
α Lince. . . .	34 55 11,00	C.T.	34,19	33,89	ε Perseo. . .	39 38 47,02	A.G.	33,53	
β Andromeda.	34 57 26,80	C.T.	34,53	34,12	6 Cani da c. .	39 42 43,88	F.C.	34,18	
ξ Perseo . . .	35 25 46,20	F.C.	33,11	32,92	74 Cigno . . .	39 51 9,07	F.C.	33,91	
					γ Cigno . . .	39 51 27,30	C.T.	34,14	
ι Lira	35 54 19,03	F.C.	34,16	34,12					
λ Cigno. . . .	36 1 55,69	F.C.	34,29	33,84	λ Auriga . .	39 59 7,70	C.T.	34,27	
25 Cani da c. .	36 55 53,00	C.T.	34,45	34,07	ν Andromeda	40 23 51,90	C.T.	34,23	
10 Leon min. .	36 57 4,44	F.C.	34,88	34,24	β Perseo. . .	40 28 20,70	C.T.	34,40	
π Ercole . . .	36 57 4,90	C.T.	34,37	34,31	2415 Groombr. .	40 40 49,40	F.C.	34,60	
ζ Corona . . .	37 2 32,92	A.G.	34,49	33,91	ν Cigno . . .	40 41 12,09	A.G.	34,11	
15 Cigno. . . .	37 3 12,11	F.C.	34,02	33,31	φ Boote . . .	40 45 40,07	C.T.	33,80	
θ Auriga . . .	37 12 4,10	C.T.	33,53	33,50	β Boote . . .	40 53 4,50	C.T.	34,26	
θ Ercole . . .	37 16 5,61	A.G.	34,78	34,48	ζ Ariete . . .	40 53 27,21	A.G.	33,72	
38 Lince. . . .	37 19 49,20	A.G.	34,07	34,37	η Auriga. . .	41 3 46,87	G.M.	33,25	
31 Leon. min .	37 20 49,00	F.C.	33,88	34,00	64 Auriga . .	41 6 10,40	F.C.	34,11	

Latitudini apparenti.

SPECCHIO I.

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	riflesse
	+			
13 Lucertola.	41° 9′ 48″,64	F.C.	33″,63	
20 Cani da c..	41 13 52,16	F.C.	34,44	
ν^1 Boote. . .	41 15 37,02	A.G.	34,68	
ν^2 Boote . . .	41 19 28,58	A.G.	34,23	
2 Cani da c.	41 21 22,46	F.C.	34,47	
19 Leon min. .	41 38 59,00	A.G.	33,62	
o Andromeda	41 39 16,42	G.M.	34,07	
γ Andromeda	41 43 43,37	A.G.	34,08	
8 Cani da c.	42 2 12,98	F.C.	33,86	
2533 Groombr. .	42 7 3,90	F.C.	35,28	
μ Orsa magg.	42 7 38,40	G.M.	34,40	
ν Perseo . . .	42 10 52,80	A.G.	33,57	
10 Orsa magg.	42 16 33,51	A.G.	33,81	
ι Andromeda	42 34 34,80	C.T.	34.01	
σ Ercole . . .	42 41 45,13	G.M.	34,14	
ξ Cigno . . .	43 25 47,14	A.G.	33,89	
λ Orsa magg.	43 32 14,36	A.G.	33,61	
31 Lince . . .	43 35 13,61	F.C.	34,27	
ε Auriga . .	43 38 9,23	G.M.	33,69	
χ Andromeda	43 38 31,48	A.G.	33,82	
ψ^5 Auriga . .	43 41 57,52	F.C.	33,57	
36 Lince . . .	43 43 53,54	F.C.	34,28	
13R Lira. . . .	43 46 56,45	F.C.	33,56	
58 Orsa magg.	43 51 33,24	F.C.	33,85	
δ Cigno. . .	44 49 35.90	C.T.	34,40	
α Cigno . . .	44 50 4,04	N.A.	33,75	
β Auriga. . .	44 55 55,80	C.T.	34,34	
33 Boote . . .	44 56 41,30	F.C.	33,59	
ψ Orsa magg.	45 10 34,40	C.T.	33,90	
φ Ercole . . .	45 15 48,65	A.G.	33,73	
22 Andromeda	45 22 35,15	F.C.	33,74	
λ Andromeda	45 46 50.62	A.G.	32,73	
α Auriga . .	45 52 5,22	N.A.	33,08	
g Cigno . . .	45 59 23,58	F.C.	33,95	33″,19
ι . Ercole . . .	46 4 24,48	A.G.	33,60	33,06
o Cigno. . .	46 21 47,11	G.M.	33,84	33,35

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	riflesse
	+			
τ Ercole . . .	46° 36′ 42″,41	A.G.	33″,49	33″,19
λ Boote. . . .	46 39 47,27	G.M.	34,49	33,80
c Perseo . . .	47 22 34.52	A.G.	33,55	32,82
δ Perseo . .	47 23 8,30	C.T.	33,66	33,00
σ Perseo . .	47 33 42,06	F.C.	34,16	33,61
o Cassiopea .	47 35 59,71	G.M.	34,45	34,12
$\varkappa$ Orsa magg.	47 38 55,72	A.G.	33,08	32,50
26 Lince . . .	47 53 10,69	F.C.	33,89	33,34
υ Perseo . . .	47 59 38,67	G.M.	33,69	32,67
$\varkappa$ Ercole . . .	48 21 56,75	F.C.	34,40	33,25
χ Orsa magg.	48 28 20,85	G.M.	34,54	33,56
ι Orsa magg.	48 31 50,54	N.A.	33,32	32,64
θ Perseo . .	48 41 52,80	A.G.	33,27	32,26
π^2 Cigno . . .	48 43 54,31	F.C.	34,26	33,55
ι Perseo . .	49 8 2,51	A.G.	35,05	34,36
ψ^1 Auriga . .	49 20 56.05	F.C.	34,38	33,35
α Perseo . .	49 24 51,03	N.A.	33,57	32,51
α Lucertola .	49 38 25,00	G.M.	33,86	32,73
o Auriga . .	49 46 7,49	F.C.	33,72	32,85
θ Cigno . . .	49 55 56,61	G.M.	33,59	33,10
η Orsa magg.	49 56 15,40	N.A.	33,32	33,05
φ Perseo . . .	50 3 28,30	C.T.	33,40	32,63
1757 Groombr. .	50 9 29,51	F.C.	34,57	33,55
6 Perseo . . .	50 29 1,54	F.C.	33,82	33,39
ι^2 Cigno . . .	51 27 51,04	G.M.	33,84	33,47
γ Dragone .	51 30 14,91	N.A.	32,91	32,38
β Lucertola .	51 36 11,75	G.M.	33.81	33,45
27 Lince . . .	51 51 52,92	F.C.	33,53	33,35
ι Boote . . .	51 56 39,41	A.G.	32,78	32.49
ψ Cigno . . .	52 6 27,84	G.M.	33.50	33,16
θ Orsa magg.	52 14 43,57	N.A.	33,39	32,70
τ Perseo . . .	52 14 56,99	G.M.	33,81	33,05
β Dragone .	52 23 40,11	N.A.	33,42	32,89
θ Boote . . .	52 25 45,30	G.M.	33,58	33,11
γ Perseo . . .	53 0 53,64	A.G.	33,40	32,63
$\varkappa$ Cigno . . .	53 8 18,60	G.M.	33,87	33,54

SPECCHIO I.

Latitudini apparenti.

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53′+ Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Latitudine 41° 53,+ Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse
	+					+			
1460 Groombr. .	53° 8′ 51″,28	F.C.	33″,56	33″,21	15 Lince. . . .	58° 35′ 0″,42	G.M.	33″,00	33″,24
ζ Cassiopea. .	53 12 31,04	G.M.	33,00	32,45	b Dragone. . .	58 43 43,31	F.C.	32,68	32,83
1 Giraffa seg.	53 38 11,44	F.C.	33.19	32,98	θ Dragone . .	58 53 58.33	G.M.	32,09	32,34
					24 Lince. . . .	58 59 59,97	F.C.	33,02	33,57
δ Auriga. . .	54 16 19,14	G.M.	33,19	32,79	2 Lince. . . .	59 3 10,45	F.C.	33,20	33,60
μ Cassiopea .	54 18 23,30	C.T.	33,83	33,51	74 Orsa magg.	59 5 36,48	G.M.	32,64	32,83
γ Orsa magg.	54 23 22,46	N.A.	32,58	32,32	o Drag. seg.	59 14 9,32	A.G.	33,12	32,80
1501 Groombr. .	54 46 28,97	F.C.	32,99	32,77	ι Dragone . .	59 24 17,10	C.T.	33,36	33,57
2296 Groombr. .	55 6 12,89	F.C.	33,16	33,22	3415 Groombr. .	59 28 22,75	F.C.	32,84	32,58
ν Drag. seg.	55 15 30,64	A.G.	32,68	32,39	2H Giraffa. . .	59 30 8,71	A.G.	33,98	33,58
ν Drag. prec.	55 16 12,38	A.G.	32,40	32,51	δ Cassiopea .	59 35 5,00	C.T.	33,28	33,03
η Perseo . . .	55 22 29,99	A.G.	33,47	33,31	υ Orsa magg.	59 37 31,00	G.M.	33,14	33,48
2343 Groombr. .	55 29 24,21	F.C.	34,21	33,56	2164 Groombr. .	59 48 9,40	F.C.	32,90	33,16
19 Lince seg.	55 30 50,85	F.C.	33,47	33,17					
τ Orsa magg.	55 34 42,70	C.T.	33,15	32,54	γ Cassiopea .	60 2 21,80	C.T.	33,23	33,50
α Cassiopea .	55 51 5,11	N.A.	33,22	32,64	β Giraffa . . .	60 15 23,00	C.T.	32,97	33,58
					69H Orsa magg.	60 35 30,74	F.C.	33,39	34,06
33 Cigno . . .	56 11 8,51	G.M.	32,70	32,59	53 Giraffa. . .	60 39 48,40	F.C.	33,19	33,38
3077 Braedley . .	56 28 42,26	F.C.	33,72	33,28	9H Giraffa. . .	60 44 24,43	F.C.	33,50	33,77
4 Giraffa. . .	56 31 55,96	F.C.	33,12	32,73	2125 Groombr. .	60 46 37,05	F.C.	32,69	33,00
36 Orsa magg.	56 37 14,17	G.M.	32,96	32,58	o Orsa magg.	61 7 59,70	A.G.	32,43	32,47
ε Orsa magg.	56 38 18,30	C.T.	32,33	32,15	η Cefeo . . .	61 21 13,09	A.G.	33,14	33,21
ρ Cassiopea .	56 48 13,68	F.C.	33,47	33,06	8 Lince . . ,	61 35 15,94	F.C.	33,08	33,46
ξ Dragone. .	56 53 34,12	A.G.	33,77	33,59	4 Cassiopea .	61 35 47,86	F.C.	32,97	33,17
13H Cefeo. . . .	56 55 27,27	F.C.	33,15	32,99	η Dragone. .	61 47 52,00	C.T.	33,40	33,59
2377 Groombr. .	57 0 20,97	F.C.	33,29	33,27	α Cefeo . . .	62 3 22,08	N.A.	32,24	32,66
β Orsa magg.	57 3 6,50	C.T.	33,34	33,41	20 Cefeo. . . .	62 10 34,66	F.C.	33,80	34,00
6H Cefeo . . .	57 7 53,87	F.C.	33,34	33,27	χ Cassiopea .	62 14 29,96	A.G.	32,98	33,50
η Cassiopea .	57 9 7,43	A.G.	33,25	33,14	α Orsa magg.	62 25 30,55	N.A.	32,61	32,85
ζ Cefeo. . . .	57 35 7,90	C.T.	32,63	32,70	θ Cefeo. . . .	62 34 27,70	A.G.	32,78	32,82
37 Orsa magg.	57 43 32,46	F.C.	33,40	33,79	716 Groombr. .	62 48 32,22	F.C.	32,97	33,13
δ Orsa magg.	57 43 38,30	G.M.	34,00	33,87	30 Cefeo . . .	62 56 5,76	F.C.	33,32	33,74
δ Cefeo . . .	57 46 32,08	A.G.	32,04	32,15	17 Giraffa. . .	62 57 33,48	F.C.	33,29	33,50
					ε Cassiopea .	63 3 11,54	G.M.	32,67	32,98
β Cassiopea .	58 27 36,40	C.T.	33,11	33,04	82 Bradley . .	63 33 59,16	F.C.	33,23	33,63

Esaminando queste specchio si rileva manifestamente l'esistenza di errori sistematici nelle distanze zenitali delle stelle, in causa dei quali il valore della latitudine, tanto per le osservazioni dirette quanto per le riflesse, varia sensibilmente da un gruppo di stelle all'altro; in modo che esso può quasi considerarsi come una funzione della distanza zenitale o delle declinazioni delle stelle dalle quali venne dedotto.

Questa dipendenza del valore della latitudine dalla distanza zenitale delle stelle, osservate col nostro strumento, è resa più manifesta nel seguente specchio II. nel quale sono date le latitudini medie apparenti, dedotte dallo specchio I. da ogni gruppo di stelle, o per le varie distanze zenitali di 2° in 2°, da 0° a 22° sud e nord, coll' indicazione del numero delle stelle componenti ogni gruppo e col numero totale delle osservazioni dirette e riflesse.

Latitudini istrumentali alle varie distanze zenitali.

Prima approssimazione.

Specchio II.

Distanza zenitale Sud	Numero delle Stelle	Num. delle Osservaz.		Latitudine 41° 53′ +		
				Osservazioni		medio
		dirette	riflesse	dirette	riflesse	
da 0° a 2°	18	343	—	34″,11		
2 a 4	23	399	—	34,17		
4 a 6	15	183	155	34,23	33″,98	34″,10
6 a 8	8	93	85	34,39	33,73	34,06
8 a 10	15	188	154	34,65	33,89	34,27
10 a 12	11	117	113	34,56	33,83	34,19
12 a 14	16	182	181	34,18	33,70	34,09
14 a 16	13	144	139	34,66	33,73	34,19
16 a 18	11	121	126	34,75	33,81	34,28
18 a 20	14	179	187	34,48	33.45	33,97
20 a 22	12	142	125	34,68	33,39	34,03
Somme e med.	156	2091	1265	34,47	33,73	34,13

Distanza zenitale Nord	Numero delle Stelle	Num. delle Osservaz.		Latitudine 41° 53′ +		
				Osservazioni		medio
		dirette	riflesse	dirette	riflesse	
da 0° a 2°	16	335		33″,99		
2 a 4	9	164		33,69		
4 a 6	11	116	101	33,83	33″,27	33″,55
6 a 8	11	150	113	34,00	33,07	33,53
8 a 10	9	105	91	33,64	33,15	33,39
10 a 12	11	123	117	33,41	32,93	33,17
12 a 14	12	131	133	33,20	32,90	33,05
14 a 16	16	171	159	33,22	33,03	33,13
16 a 18	14	159	146	33,03	33,12	33,08
18 a 20	11	130	114	33,09	33,38	33,24
20 a 22	10	108	103	32,99	33,28	33,14
Somme e med.	130	1692	1066	33,45	33,13	33,25

Quantunque i successivi valori della latitudine, presi separatamente dalle osservazioni dirette e riflesse partendo dal zenit, tanto verso il sud che verso il nord, presentino una certa regolarità di andamento, per la quale risultano manifestissime le influenze degli errori sistematici dello strumento, e la loro notevole prevalenza sugli errori dovuti alle declinazioni delle stelle nei varî gruppi, i quali errori si possono ragionevolmente ritenere nel loro complesso come accidentali, pure esaminando attentamente questi valori della latitudine si riscontrano nel loro andamento certe irregolarità, le quali sarebbero appunto da attribuirsi a cause accidentali, quali sarebbero le incomplete compensazioni degli errori delle declinazioni delle stelle

nei varî gruppi. E questo difetto potrebbe risultare, o dal troppo limitato numero di stelle, specialmente per alcuni gruppi, o dalla preponderante influenza degli errori sistematici di alcuni cataloghi sui valori ottenuti per la latitudine nei gruppi stessi.

Latitudini istrumentali. *Seconda approssimazione* — Per rendere meno sensibile l' influenza di questi errori, o per rendere più approssimata e probabile la loro compensazione si può far concorrere alla determinazione del valore di ogni latitudine istrumentale un maggior numero di stelle, deducendo la latitudine stessa del medio dei risultati ottenuti da due gruppi successivi, assegnando poi questa latitudine al parallelo od alla distanza zenitale media degli stessi due gruppi; cosicchè prendendo per esempio il medio delle due latitudini date dallo specchio II. per le distanze zenitali 9° e 10° si avrebbe la latitudine istrumentale a 10°, e così dal medio della latitudine a 11° e 13° si avrebbe quella a 12° ecc. ecc. Ma siccome questo modo di combinazione non può essere applicato alle distanze zenitali estreme, tanto nelle osservazioni dirette come nelle riflesse, così per questi casi i valori della latitudine devono dedursi per interpolazione, o conservare quelli dello specchio II.

Adottando questo modo di combinare i risultati delle osservazioni, o i dati dello specchio II., per ottenere un sistema di valori più approssimativi per le latitudini istrumentali, si è formato il seguente specchio III. nel quale si possono ritenere meglio compensati gli errori delle declinazioni delle stelle, per l'aumentato numero delle medesime e per la loro più regolare distribuzione fra i varî cataloghi.

Latitudini istrumentali alle varie distanze zenitali.

SPECCHIO III. *Seconda approssimazione*

Distanza zenitale Sud	Numero delle Stelle	Latitudine 41° 53′ +			Distanza zenitale Nord	Numero delle Stelle	Latitudine 41° 53′ +		
		Osservazioni		medio			Osservazioni		medio
		dirette	riflesse				dirette	riflesse	
0°	34	34″,05			0°	34	34″,05		
2	41	34,14			2	25	33,84		
4	38	34,20			4	20	33,76		
5	15	34,23	33″,98	34″,10	5	17	33,83	33″,27	33″,55
6	23	34,31	33,86	34,08	6	22	33,92	33,17	33,54
8	23	34,52	33,81	34,16	8	20	33,82	33,11	33,47
10	26	34,60	33,86	34,23	10	20	33,53	33,04	33,29
12	27	34,52	33,77	34,15	12	23	33,31	32,92	33,12
14	29	84,57	33,72	34,15	14	28	33,21	32,97	33,09
16	24	34,71	33,77	34,24	16	30	33,12	33,07	33,10
18	25	34,62	33,63	34,13	18	25	33,06	33,25	33,16
20	26	34,58	33,42	34,00	20	21	33,04	33,33	33,19
21	12	34,68	33,39	34,03	21	10	32,99	33,28	33,14
Medio		34,44	33,72	34,13	Medio		33,50	33,14	33,26

L'andamento delle latitudini istrumentali si presenta in questo specchio molto più regolare che nello specchio II., ma non è escluso il sospetto che le latitudini stesse possono ancora risentire una qualche influenza dagli errori delle declinazioni delle stelle, mentre poi potrebbe nascere il dubbio di qualche alterazione arrecata agli errori istrumentali, col dedurre la latitudine per ogni parallelo dal medio dei risultati ottenuti per un arco di 4°, quantunque si possano ragionevolmente ritenere queste alterazioni come assai piccole, perchè entro questi limiti, tanto le variazioni della flessione, quanto quella degli errori sistematici della graduazione del circolo sono quasi proporzionali alle variazioni dell'arco.

La conveniente approssimazione di queste latitudini istrumentali, interamente basate sui risultati dalle nostre osservazioni e sulla probabilità della compensazione degli errori delle declinazioni delle stelle fondamentali, viene confermata dal notevole accordo che si trova fra gli errori istrumentali già molto approssimativamente noti, e quelli che si ottengono combinando i valori delle latitudini istrumentali stesse nel modo da me esposto nella mia citata Memoria: *Declinazioni medie pel* 1875,0 *di* 285 *stelle* ecc. Sicchè usando queste latitudini nella determinazione delle declinazioni delle stelle componenti l'intero catalogo, si potrebbero ritenere in esse già molto approssimativamente compensati tutti gli errori sistematici che influiscono sulle osservazioni delle distanze zenitali. Però nella supposizione che nei valori di queste costanti esista ancora qualche incertezza, in causa della incompleta compensazione degli errori delle declinazioni delle stelle fondamentali, ho creduto opportuno di togliere queste incertezze, applicando alle latitudini trovate il sistema di correzioni necessarie per soddisfare a certe condizioni, che debbono verificarsi fra i veri valori delle latitudini istrumentali e delle quantità note; fra le quali il valore della latitudine assoluta del luogo di osservazione.

Latitudine assoluta del Circolo meridiano. — Prendendo dallo specchio III. i quattro valori ottenuti per la latitudine dalle osservazioni dirette e riflesse di due gruppi di stelle simmetrici rispetto al zenit, il loro medio deve essere indipendente; 1° dall'errore del nadir o del zenit, perchè compensato dalle osservazioni dirette colle riflesse: 2° dalla flessione perchè compensata dalle osservazioni al sud con quelle del nord: 3° dagli errori sistematici del circolo, perchè compensati dalle osservazioni dirette al sud colle riflesse al nord, e dalle osservazioni dirette al nord colle riflesse al sud: di guisa che ritenendo compensati gli errori accidentali delle osservazioni e delle divisioni del circolo, e compensati gli errori delle declinazioni delle stelle, il medio di questi quattro valori della latitudine dovrebbe riescire costante per ogni coppia di gruppi simmetrici, e rappresentare quindi il vero valore della latitudine, che chiameremo *Latitudine assoluta*.

Nei dati dello specchio III. si possono considerare come compensati, almeno con molta approssimazione, gli errori accidentali delle osservazioni pel numero abbastanza grande di osservazioni fatte sopra ogni stella, e così pure compensati gli errori accidentali delle divisioni del circolo, perchè sono state applicate le correzioni per ogni divisione, e perchè il numero delle divisioni usate per ogni latitudine istrumentale è tanto grande da rendere probabilissimo il compenso dei loro singoli errori; perciò, se i medî ottenuti per ogni coppia di gruppi non riusciranno costanti, le loro

differenze col valore assoluto della latitudine si potranno considerare come effetti degli errori delle declinazioni delle stelle non totalmente compensati.

Ciò posto, chiamate φ_s e φ'_s le latitudini per le osservazioni dirette e riflesse date dallo specchio III. per un gruppo di stelle al sud, o per una certa distanza zenitale al sud, e chiamate φ_n e φ'_n le analoghe latitudini date pel gruppo al nord simmetrico al primo, ossia per la stessa distanza zenitale al nord, e chiamato φ il valore assoluto della latitudine, nell' ipotesi che anche gli errori delle declinazioni delle stelle siano compensati, dovrebbe aversi per ogni coppia di gruppi:

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s + \varphi_n + \varphi'_n}{4} = \text{costante} = \text{latitudine assoluta} = \varphi$$

Ma calcolando coi dati dello specchio III. questa quantità o questo medio per le varie coppie di gruppi, o per le varie distanze zenitali, si trovano invece i seguenti valori:

Distanza zenitale	$\frac{\varphi_s + \varphi'_s + \varphi_n + \varphi_n}{4}$	Differenze col medio
5°	41° 53′ 33″,83	+ 0″,13
6	33,81	+ 0,11
8	33,81	+ 0,11
10	33,76	+ 0,07
12	33,64	— 0,04
14	33,62	— 0,07
16	33,67	— 0,02
18	33,65	— 0,04
20	33,60	— 0,10
21	33,59	— 0,11
	Medio 41° 53′ 33″,70	

Eccettuando i valori dei primi tre gruppi, negli altri sette le differenze sono abbastanza piccole, per poter ritenere molto approssimativamente verificata la premessa condizione, e quindi confermata entro limiti abbastanza ristretti la compensazione degli errori delle declinazioni delle stelle.

Riguardo alle prime tre coppie di gruppi le differenze sono troppo sensibili e sistematiche per poterle considerare come dovute agli errori delle declinazioni delle stelle; e nasce quindi il sospetto che esse siano da attribuirsi ad un' altra causa di errore, alla quale siano specialmente ed esclusivamente soggette le osservazioni da cui furono dedotte le latitudini per questi gruppi.

Per questi gruppi abbiamo in realtà una circostanza speciale nelle osservazioni per riflessione, e che io ho già indicata, e cioè quella della formazione delle immagini delle stelle dai raggi riflessi sopra una parte soltanto dell'obbiettivo del cannocchiale, mentre l'altra è coperta od ecclissata dal tubo; dimodochè nell' immagine riflessa possono risultare delle deformazioni più o meno sensibili, e tali da presentare il centro, o la massa luminosa più condensata, non esattamente coincidente con quella che si ottiene ad obbiettivo interamente libero.

Questa circostanza può evidentemente influire sulla distanza zenitale apparente delle stelle, ed anche nei migliori cannocchiali, quando questi spostamenti del centro di figura vengono ridotti, come nel caso nostro, a qualche decimo di secondo. A primo aspetto sembrerebbe però che tale errore dovesse compensarsi nel medio delle latitudini ottenute al sud ed al nord; e ciò realmente si verificherebbe, quando tali spostamenti fossero nelle due posizioni del cannocchiale rigorosamente simmetrici rispetto alla verticale od al nadir; ma qualora si consideri che le immagini delle stelle sono prodotte nei due casi contemplati da due diversi segmenti dell'obbiettivo, non è certo inverosimile l'ammettere che gli spostamenti possano riescire diversi di grandezza ed anche di segni opposti.

È questa senza dubbio la causa che rende il valore della latitudine assoluta per le prime tre coppie di gruppi troppo elevato, e cioè di circa un decimo di secondo maggiore del valore ottenuto dalle altre coppie; e ciò viene dimostrato ad evidenza col combinare le quattro latitudini, ottenute per le dieci coppie di gruppi, in modo da far emergere il valore della flessione; poichè confrontando i valori, così ricavati dalle osservazioni, con quelli calcolati colla distanza zenitale e colla costante della flessione, mentre si trova pei sette ultimi gruppi un accordo molto soddisfacente, pei primi tre invece la flessione osservata risulta assurda, ossia di segno opposto al valore calcolato; e le loro differenze risultano tali da produrre sulla quantità $\frac{1}{4}(\varphi_s + \varphi'_s + \varphi_n + \varphi'_n)$, e quindi sul valore della latitudine assoluta l'errore approssimativo di $+0''10$; e ciò indipendentemente dagli errori delle declinazioni delle stelle.

Non credo necessario di occuparmi della determinazione degli errori spettanti alle singole quantità φ'_s e φ'_n per ognuno dei tre gruppi, perchè essi, essendo comuni alle latitudini istrumentali ed alle distanze zenitali osservate, vengono compensati od eliminati nei valori dedotti per le declinazioni delle stelle. Soltanto nella determinazione della latitudine assoluta è necessario di tener conto dell'influenza di questi errori, e perciò volendo utilizzare a questo scopo i valori di $\frac{1}{4}(\varphi_s + \varphi'_s + \varphi_n + \varphi'_n)$ ottenuti per le tre prime coppie di gruppi, bisognerà renderli indipendenti da questa influenza; ciò che si può ottenere, almeno con sufficiente approssimazione, applicando ai medesimi la correzione $-0''10$.

Volendo far concorrere alla determinazione della latitudine assoluta anche le latitudini apparenti od istrumentali ottenute per i gruppi di stelle non osservate per riflessione, e corrispondenti alle distanze zenitali medie 0°, $\pm 2°$ e $\pm 4°$, basta correggere il valore trovato a 0°, e i medî trovati per le due coppie a $\pm 2°$ ed a $\pm 4°$, dell'errore del nadir, potendosi ritenere in essi compensata la flessione e gli errori sistematici delle divisioni del circolo. L'errore accidentale delle divisioni usate pel nadir può ritenersi di $+0'',26$, medio dei valori quasi identici per esso ottenuti dall'accurato esame della graduazione del circolo e dai risultati delle osservazioni; e perciò la correzione da applicarsi alle indicate quantità sarà $-0'',26$. Colla correzione di $-0'',26$ applicata al medio delle latitudini istrumentali date dallo specchio III. per le distanze zenitali 0°, 2° e 4°, e colla correzione di $-0'',10$ pei medî delle

latitudini istrumentali a 5°, 6° ed 8°, i valori assegnati alla latitudine assoluta da ogni coppia di gruppi sono i seguenti:

Tavola A.

Distanza zenitale	Latitudine	Differenze del medio
0°	41° 53′ 33″,79	+ 0″,10
2	33,73	+ 0,04
4	33,72	+ 0,03
5	33,73	+ 0,04
6	33,71	+ 0,02
8	33,71	+ 0,02
10	33,76	+ 0,07
12	33,64	— 0,05
14	33,62	— 0,07
16	33.67	— 0,02
18	33,65	— 0,04
20	33,60	— 0,09
21	33,59	— 0,10

Medio 41° 53′ 33″,69

L'accordo fra questi valori è molto soddisfacente; e quantunque si presenti nelle differenze col medio un andamento quasi sistematico, pel quale i valori della latitudine vanno crescendo col diminuire dalla distanza zenitale, pure questo aumento è compreso in limiti così ristretti, e presenta tali irregolarità da poter essere considerato come un risultato quasi accidentale, e probabilmente dovuto alla influenza degli errori delle declinazioni non del tutto compensati nelle singole coppie di gruppi.

Se però questa completa compensazione di errori non può ritenersi verificata in ogni coppia di gruppi, può per altro ritenersi totalmente raggiunta nel medio generale delle tredici coppie, il quale potrà considerarsi come rappresentante il vero valore della nostra Latitudine assoluta, la quale risulterebbe

$$\varphi = 41° 53' 33'',69$$

Questo valore di φ è maggiore di circa 0″,14 di quello ricavato dalle stesse osservazioni nella mia Memoria: *Declinazioni medie pel* 1875,0 *di* 285 *stelle* ecc. ma tale aumento deve attribuirsi alla sostituzione delle declinazioni del *Fundamental-Catalog* di Auwers a quelle del Catalogo provvisorio II. *Zusatz-sterne di Pulkova.*

Latitudini istrumentali definitive. — Quantunque nei valori trovati per la latitudine dalle varie coppie di gruppi le differenze col medio generale, ossia col valore più attendibile della latitudine assoluta, siano molto piccole, e quindi si abbia ragione di ritenere con molta approssimazione compensati gli errori delle declinazioni delle stelle, pure bisogna avvertire che quella compensazione non risguarda le singole latitudini istrumentali al sud ed al nord, ma il loro medio per ogni coppia di gruppi; per cui non è escluso il dubbio, che almeno per alcune latitudini istrumentali l'influenza degli errori delle declinazioni possa oltrepassare gli indicati limiti, e che perciò le correzioni da esse richieste possano essere abbastanza sensibili.

In questo ragionevole dubbio ho creduto necessario di ricercare direttamente le correzioni da farsi alle latitudini istrumentali per le stelle al sud e per quelle al nord per ogni coppia di gruppi, affine di renderle possibilmente indipendenti dalla influenza degli errori delle declinazioni delle stelle; basandomi in parte sui risultati delle osservazioni e in parte sopra dati istrumentali noti.

Chiamata x la correzione da applicarsi alle latitudini φ_s e φ'_s delle osservazioni dirette e riflesse al sud, e con y la correzione per le latitudini corrispondenti φ_n e φ'_n al nord per ognuna delle coppie dei gruppi dello specchio III, si può dalla tavola A, nella probabile ipotesi che la differenza fra le latitudini ottenute per le varie distanze zenitali e la latitudine assoluta siano dovute agli errori delle declinazioni delle stelle, si può, dico, ricavare per ogni coppia di gruppi, o per ogni distanza zenitale un' equazione fra le incognite x ed y e delle quantità note, dovendosi verificare la relazione

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s + 2x + \varphi_n + \varphi'_n + 2y}{4} = \varphi = 41°\,53'\,33'',69$$

dalla quale si ha

$$(a) \qquad x + y = 2\left(\varphi - \frac{1}{4}\left\{\varphi_s + \varphi'_s + \varphi_n + \varphi'_n\right\}\right).$$

Col valore noto di φ e coi dati della tavola A si potrà quindi avere per ogni coppia di gruppi la somma delle correzioni x ed y.

Un' altra equazione fra le quantità x ed y può ricavarsi dalla relazione che dovrebbe esistere fra le quattro latitudini istrumentali di ogni coppia di gruppi e gli errori sistematici della graduazione del circolo, qualora fossero compensati gli errori delle declinazioni delle stelle. Infatti chiamato E l'errore sistematico dell'arco letto per le osservazioni dirette al sud, ed E′ quello dell' arco letto per le osservazioni riflesse al sud, avvertendo che l' errore E′ nelle osservazioni riflesse va preso col segno contrario, nell' ipotesi che siano compensati gli errori delle declinazioni delle stelle dovrebbe aversi:

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s - \mathrm{E} + \mathrm{E}'}{2} = \varphi = \text{latitudine assoluta}$$

perchè nel medio di φ_s e φ'_s è compensata la flessione e l' errore del nadir.

E siccome per la simmetria del gruppo nord col gruppo sud abbiamo nelle osservazioni riflesse lo stesso errore E delle osservazioni dirette al sud, e nelle dirette al nord lo stesso errore E′ delle osservazioni riflesse al sud, ma agenti con segno contrario sui valori delle corrispondenti latitudini, così dovrebbe aversi:

$$\frac{\varphi_n + \varphi'_n + \mathrm{E} - \mathrm{E}'}{2} = \varphi$$

e sottraendo questa equazione dalla prima si ha

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s}{2} - \frac{\varphi_n + \varphi'_n}{2} - (\mathrm{E} - \mathrm{E}') = 0,$$

da cui

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s}{2} - \frac{\varphi_n + \varphi'_n}{2} = \mathrm{E} - \mathrm{E}'.$$

Perciò, se le quattro latitudini istrumentali sono influenzate dagli errori delle declinazioni delle stelle, le correzioni x ed y da applicarsi alle medesime dovranno soddisfare alla condizione

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s + 2x}{2} - \frac{\varphi_n + \varphi'_n + 2y}{2} = E - E',$$

dalla quale si ha

$$(b) \qquad x - y = E - E' - \frac{1}{2}\left\{ \varphi_s + \varphi'_s - \varphi_n - \varphi'_n \right\}.$$

Nel nostro circolo meridiano possono ritenersi con sufficiente approssimazione determinati gli errori sistematici E ed E′ e quindi le differenze E — E′ pei varî archi corrispondenti alle latitudini istrumentali, o per le varie distanze zenitali dello specchio III; e perciò colle equazioni (*a*) e (*b*) possono determinarsi per ogni coppia di gruppi le correzioni x ed y, escluse però le prime tre coppie di gruppi, per le quali mancano le osservazioni riflesse; ma anche per queste possono determinarsi le correzioni x ed y per mezzo di opportune equazioni di condizione. Riguardo alla latitudine istrumentale del primo gruppo a 0° le equazioni per determinare x ed y sono evidentemente:

$$x + y = \varphi - \frac{\varphi_s + \varphi_n}{2}$$

$$x - y = 0 .$$

Per le altre due coppie di gruppi abbiamo l'equazione

$$(c) \qquad x + y = \varphi - \frac{\varphi_s + \varphi_n}{2},$$

che può essere combinata coll' altra

$$(d) \qquad x - y = \varphi - \frac{\varphi_s + \varphi_n}{2} - 2k \operatorname{sen} z - (E - E'),$$

nella quale i valori di $\varphi_s + \varphi_n$ sono dati dalla tavola A per ogni coppia di gruppi, mentre la flessione $2k \operatorname{sen} z$ può calcolarsi per ognuna di queste col noto valore della distanza zenitale z, e il valore di E — E′ può dedursi dalla tavola degli errori sistematici della graduazione del circolo.

Colle precedenti equazioni e coi dati della tavola A, e colla latitudine assoluta $\varphi = 41° 53', 33'', 69$, e coi seguenti valori di E — E′

Distanza zenitale	E — E′	Distanza zenitale	E — E′
0°	+ 0″,00	12°	+ 0″,94
2	0,12	14	1,10
4	0,24	16	1,19
5	0,32	18	1,23
6	0,38	20	1,19
8	0,53	21	1,16
10	0,72		

sono state calcolate per ogni coppia di gruppi le correzioni x ed y, da applicarsi alle latitudini istrumentali dello specchio III. per renderle possibilmente indipendenti dagli errori delle declinazioni delle stelle, e si sono ottenuti i seguenti risultati:

Tavola B.

Correzioni.

Distanza zenitale Sud	x	Distanza zenitale Nord	y
0°	— 0″,10	0°	— 0″,10
2	— 0,11	2	+ 0,01
4	— 0,14	4	+ 0,02
5	— 0,16	5	+ 0,09
6	— 0,10	6	+ 0,06
8	— 0,11	2	+ 0,05
10	— 0,08	10	+ 0,04
16	0,00	12	+ 0,09
14	+ 0,09	14	+ 0,05
16	+ 0,04	16	— 0,01
18	+ 0,18	18	— 0,08
20	+ 0,28	20	— 0,10
21	+ 0,24	21	— 0,03

L'andamento presentato da queste correzioni non è certamente così irregolare ed accidentale, quale poteva aspettarsi dalla probabile irregolarità della influenza degli errori delle declinazioni usate nei varî gruppi; sicchè potrebbe sospettarsi che le latitudini istrumentali dello specchio III. siano soggette a qualche altro errore sistematico oltre quelli già contemplati; ed a questo riguardo potrebbero sospettarsi le influenze del diverso modo di collimare le stelle riflesse e dirette, e le stelle al sud ed al nord, e così qualche influenza dei piccoli errori personali non interamente compensati, ed anche una qualche incertezza nella tavola usata per le rifrazioni ecc. Ma quando le anomalie dei risultati sono confinate in limiti così ristretti quali li abbiamo nel caso nostro, la loro spiegazione riesce assai difficile, e molto incerti e pericolosi i tentativi per eliminarle.

Nel caso nostro non è poi escluso che l' andamento quasi sistematico delle correzioni x ed y risulti, almeno in parte, dalla preponderante influenza degli errori sistematici di alcuni dei cataloghi usati, e non credo fuori di proposito l'avvertire a questo riguardo, che le maggiori correzioni positive predominano nei gruppi dove è più scarso il numero delle declinazioni prese dal *Fundamental-Catalog* di Auwers e cioè per le stelle del Catalogo II. *Zusatz-sterne*; mentre le maggiori correzioni negative predominano nei gruppi, dove il numero di quelle declinazioni è maggiore; il che farebbe sospettare, almeno in riguardo alle nostre osservazioni, che i valori di queste declinazioni siano in generale troppo elevati.

Per questi motivi mi sono deciso ad applicare le correzioni della tavola B alle latitudini istrumentali dello specchio III, basando sui risultati così ottenuti la

tavola delle latitudini istrumentali definitive da usarsi pel nostro Catalogo, la quale è contenuta nel seguente specchio IV, che dà la latitudine corrispondente alle varie distanze zenitali, od alle varie declinazioni di grado in grado.

Specchio IV. Latitudini istrumentali definitive

Declinazione	Distanze zenitali	Latitudine 41° 53′ +			Declinazione	Distanze zenitali	Latitudine 41° 53′ +		
		Osservazioni		medio			Osservazioni		medio
		dirette	riflesse				dirette	riflesse	
+	+				+	—			
41° 53′ 34″	0°	33.95			41° 53′ 34″	0°	33,95		
40 »	1	34,02			42 »	1	33,88		
39 »	2	34,04			43 »	2	33,84		
38 »	3	34,06			44 »	3	33,81		
37 »	4	34,06	33,88	33,97	45 »	4	33,86	33,48	33,67
36 »	5	34,07	33,8 2	33,95	46 »	5	33,92	33,36	33,64
35 »	6	34,21	33,76	33,99	47 »	6	33,98	33,23	33,60
34 »	7	34,31	33,73	34,02	48 »	7	33,93	33,20	33,56
33 »	8	34,41	33,70	34,05	49 »	8	33,87	33,16	33,52
32 »	9	34,42	33,69	34,06	50 »	9	33,74	33,15	33,44
31 »	10	34,43	33,68	34,06	51 »	10	33,61	33,14	33,38
30 »	11	34,48	33,73	34,10	52 »	11	33,52	33,07	33,30
29 »	12	34,53	33,78	34,16	53 »	12	33,41	33,01	33,21
28 »	13	34,60	33,80	34,20	54 »	13	33,35	33,02	38,18
27 »	14	34,66	33,81	34,24	55 »	14	33,29	33,02	33,15
26 »	15	34,71	33,82	34,27	56 »	15	33 20	33,04	33,12
25 »	16	34,76	33,83	34,29	57 »	16	33,11	33,06	33,09
24 »	17	34,78	33,82	34,30	58 »	17	33,05	33,11	33,08
23 »	18	34,80	33,81	34,30	59 »	18	33,98	33,17	33,08
22 »	19	34,82	33,75	34,29	60 »	19	32,96	33,20	33,08
21 »	20	34,84	33,69	34,26	61 »	20	32,95	33,24	33,10
20 »	21	34,86	33,60	34,23	62 »	21	32,98	33,26	33,12
19 53′ 34″	22	34,88	33,50	34,19	63 53′ 34″	22	33,04	33,28	33,16

Sui dati di questo specchio dovendosi basare la determinazione delle declinazioni medie, non credo superfluo di confermare la loro esattezza o soddisfacente approssimazione con altri due argomenti o prove, ricavate dalle relazioni che debbono esistere fra le latitudini istrumentali, l'errore del nadir e la flessione.

Prendendo per una qualunqne coppia di gruppi il medio delle latitudini delle osservazioni dirette al sud ed al nord, ossia $\frac{1}{2}(\varphi_s + \varphi_n)$, e sottraendovi il medio delle latitudini delle osservazioni riflesse, ossia $\frac{1}{2}(\varphi'_s + \varphi'_n)$, la loro differenza dovrebbe

dare il doppio dell' errore N del nadir, potendosi ritenere in questa differenza compensati gli errori sistematici del circolo e la flessione: per cui dovrebbe aversi per ogni gruppo:

$$\frac{\varphi_s + \varphi_n - \varphi'_s - \varphi'_n}{4} = \text{costante} = N .$$

Ciò posto, se collo specchio IV calcoliamo i valori di questa espressione per tutte le coppie di gruppi contenuti nello specchio III, si ha:

Distanza zenitale	$\frac{\varphi_s + \varphi_n - \varphi'_s - \varphi'_n}{4}$	Differenza col medio
5°	+ 0″,20	— 0″,06
6	0,29	+ 0,03
8	0,35	+ 0,09
10	0,32	+ 0,06
12	0,28	+ 0,02
14	0,24	— 0,02
16	0,25	— 0,01
18	0,20	— 0,05
20	0,22	— 0,03
21	0,25	— 0,01
	Medio + 0″,26	

L' accordo fra questi valori può ritenersi come molto soddisfacente, avuto riguardo alle moltiplici cause di errore che noi abbiamo supposto del tutto compensate; e questo accordo è tanto più rimarchevole, perchè il medio di queste quantità + 0″,26 è quasi identico al valore + 0″,25, ottenuto per l'errore accidentale del medio delle 4 divisioni usate nella determinazione del nadir, per mezzo di una numerosa ed accurata serie di confronti e misure prese sulla graduazione del circolo.

Da ultimo prendendo per ogni coppia di gruppi il medio delle latitudini delle osservazioni dirette al sud e delle riflesse al nord, ossia $\frac{1}{2}(\varphi_s + \varphi'_n)$, e sottraendovi il medio delle altre due latitudini, ossia $\frac{1}{2}(\varphi'_s + \varphi_n)$, la differenza dovrebbe dare il doppio della flessione, ossia $2k \operatorname{sen} z$, essendo in questa differenza compensati gli errori sistematici della graduazione del circolo e l'errore del nadir; per cui dovrebbe aversi per ogni coppia di gruppi

$$\frac{\varphi_s - \varphi'_s - \varphi_n + \varphi'_n}{4} = k \operatorname{sen} z .$$

Facendo ora $k = + 0″,90$, valore approssimativo della costante della flessione, e calcolando per le indicate coppie di gruppi le quantità k sen z, e l'espressione $\frac{1}{4}(\varphi_s - \varphi'_s - \varphi_n + \varphi'_n)$ coi dati corrispondenti dello specchio IV, si ottiene:

Distanza zenitale	$\frac{\varphi_s - \varphi' - \varphi_n + \varphi'_n}{4}$	k sen z	Differenza
5°	— 0″,08	+ 0″,08	— 0″,16
6	— 0,07	+ 0,09	— 0,16
8	0,00	+ 0,12	— 0,12
10	+ 0,07	+ 0,16	— 0,09
12	+ 0,09	+ 0,19	— 0,10
14	+ 0,15	+ 0,22	— 0,07
16	+ 0,22	+ 0,25	+ 0,03
18	+ 0,29	+ 0,28	+ 0,01
20	+ 0,36	+ 0,31	+ 0,05
21	+ 0,38	+ 0,32	+ 0,06

Escludendo i valori ottenuti per le prime tre coppie di gruppi, pei quali sappiamo che le latitudini istrumentali delle osservazioni riflesse al sud ed al nord sono soggette ad un errore sistematico speciale, dovuto alle deformazioni delle immagini delle stelle pel parziale eclissamento dell' obbiettivo del cannocchiale, per le altre coppie di gruppi le differenze fra il valore della flessione osservato e il valore calcolato sono abbastanza piccole per poter ritenere verificata con conveniente approssimazione anche quest' ultima condizione, e quindi confermata anche per questa via la fiducia meritata dalle latitudini istrumentali da noi ottenute.

Le latitudini istrumentali definitive dello specchio IV presentano il vantaggio di essere indipendenti dalle declinazioni delle stelle fondamentali, dalle quali è stato dedotto lo specchio III, e la loro esattezza dipende principalmente dal valore adottato per la latitudine assoluta e per gli errori sistematici della graduazione del circolo: mentre le latitudini istrumentali dello specchio III sono indipendenti da queste costanti, ma la loro esattezza dipende dalle declinazioni delle stelle fondamentali.

Quantunque per le ragioni superiormente addotte io abbia preferito di basare il nostro Catalogo sulle latitudini dello specchio IV, pure non può negarsi che anche quelle dello specchio III non meritassero molta fiducia; e poste a base del Catalogo avrebbero procurato il vantaggio di poter essere anche in seguito facilmente rettificate, quando si fossero posseduti valori più esatti per quelle declinazioni; e per mezzo di queste rettifiche avrebbe potuto formarsi direttamente la tavola delle correzioni pel Catalogo stesso.

Pel caso possibile che qualcuno non convenga con me sulla preferenza data alle latitudini dello specchio IV, credo opportuno di dare la Tavola delle differenze di queste con quelle dello specchio III; per mezzo della quale facilmente si potrebbero trasportare le declinazioni del Catalogo dal sistema da noi adottato all'altro.

Differenze fra le declinazioni del Catalogo
e quelle che si sarebbero avute colle latitudini istrumentali dello specchio III.

Declinazione	Differenze	Declinazione	Differenze
+ 20° 53′,34″	+ 0′,16″	43° 53′,34″	0″,00
21 »	+ 0,26	45 »	+ 0,10
23 »	+ 0,17	46 »	+ 0,09
25 »	+ 0,05	48 »	+ 0,06
27 »	+ 0,09	50 »	+ 0,05
29 »	+ 0,01	52 »	+ 0,09
31 »	— 0,17	54 »	+ 0,09
33 »	— 0,11	56 »	+ 0,06
35 »	— 0,09	58 »	— 0,01
36 »	— 0,15	60 »	— 0,08
37 »	— 0,14	61 »	— 0,09
39 »	— 0,10	62 »	— 0,02
41 »	— 0,10		

Si noti che le differenze, date da questo specchio per le declinazioni corrispondenti alle stelle osservate direttemente e per riflessione, sono prese dal medio delle due latitudini istrumentali delle osservazioni dirette e riflesse: essendosi stabilito di prendere come valore definitivo della declinazione il medio dei risultati ottenuti dalle osservazioni dirette e dalle riflesse.

Declinazioni medie pel 1875,0 delle 1463 stelle. — Stabiliti i valori definitivi delle latitudini istrumentali per le varie distanze zenitali, o per le varie declinazioni, la declinazione media delle singole stelle poteva dedursi dalle osservazioni in due diversi modi: e cioè, o riducendo le distanze zenitali apparenti alla distanza zenitale media pel 1875,0 e sottraendo questa dalla latitudine istrumentale ricavata dallo specchio IV per quella distanza zenitale; oppure prendendo per ogni stella una declinazione media approssimata e la variazione annua ad essa corrispondente; calcolare con questi elementi per ogni osservazione la riduzione della declinazione media all'apparente, e sommare questa colla distanza zenitale osservata; con che si sarebbe ottenuta la latitudine, soggetta però all'errore della declinazione provvisoria, agli errori istrumentali ed agli errori accidentali delle osservazioni.

Ma prendendo il medio dei risultati di tutte le osservazioni fatte sopra quella stella, e ritenendo in esso compensati gli errori accidentali, sottraendo questo medio valore, ottenuto per la latitudine, dalla latitudine istrumentale ricavata dallo specchio IV, la loro differenza avrebbe dato l'errore della declinazione provvisoria, e quindi la correzione da applicarsi alla medesima per ottenere la declinazione media ricercata.

Quantunque il secondo processo richiedesse maggiore lavoro, specialmente per ridurre le declinazioni provvisorie delle stelle e le loro variazioni annue all'epoca 1875,0, pure io ho creduto opportuno di adottarlo, sia perchè noi avevamo già pronte le latitudini apparenti ottenute dalle 286 stelle fondamentali, sia perchè il lavoro riesciva

più uniforme e meno soggetto a possibili errori od equivoci nel calcolo delle distanze zenitali medie.

Ciò stabilito, vennero prese come declinazioni provvisorie delle 1463 stelle, escluse le 286 stelle fondamentali, quelle date dal B. A. C. e furono ridotte al 1875,0, usando i moti annui dati dallo stesso Catalogo, l' incertezza dei quali poteva avere poca influenza sui risultati del nostro Catalogo per la brevità del periodo in cui furono fatte le osservazioni; mentre per le 286 stelle fondamentali vennero adottate le declinazioni medie date dai rispettivi cataloghi da cui furono prese e sulle quali sono basate le latitudini apparenti contenute nello specchio I.

Per mezzo di queste declinazioni medie approssimate e colla relativa variazione annua si è calcolata per ogni osservazione la declinazione apparente delle stelle, usando le costanti a', b', c', d', e le costanti besselliane A, B, C e D date dal *Nautical Almanac* di Londra, e con questa declinazione apparente e colla distanza zenitale apparente data dall'osservazione veniva dedotto il valore della latitudine, e quindi preso il medio dei risultati ottenuti da tutte le osservazioni o dirette o riflesse fatte sopra ogni stella. Questo lavoro ha naturalmente richiesto molto tempo e fatica pel grande numero delle osservazioni e per la loro dispersione nel periodo di osservazione, in causa della quale non potevasi trarre vantaggio dalla interpolazione pel calcolo delle declinazioni apparenti.

Nel medio valore, così ottenuto per la latitudine dalle osservazioni fatte sopra ogni stella, se potevasi ritenere convenientemente compensata l' influenza degli errori accidentali delle osservazioni, vi rimaneva però l'errore accidentale delle divisioni del circolo su cui erano state lette le distanze zenitali, vi rimanevano gli errori istrumentali sistematici o costanti, e l' errore della declinazione provvisoria della stella. Per la correzione degli errori accidentali delle divisioni del circolo si avevano i dati necessari, ottenuti dall'esame o verifica fatta sulle singole divisioni alla fine delle osservazioni, e della quale si è già trattato nell'articolo relativo agli errori istrumentali; per cui applicata questa correzione al valore trovato per la latitudine, non restavano in essa che gli errori sistematici e costanti dello stromento e l'errore della declinazione provvisoria della stella. Finalmente prendendo la differenza fra la latitudine, così corretta, e la latitudine istrumentale, data dallo specchio IV per la distanza zenitale o per la declinazione della stella, siccome potevano ritenersi in essa compensati tutti gli errori istrumentali, questa differenza dava l'errore della declinazione provvisoria, la quale corretta di questo errore rappresentava la declinazione della stella pel Catalogo.

Per le stelle osservate anche per riflessione questa operazione è stata eseguita separatamente sui risultati delle osservazioni dirette e delle riflesse; e si sono perciò ottenuti due distinti valori per la declinazione, uno dei quali può servire di controllo all'altro, e nel cui medio può ritenersi meglio assicurato il compenso degli errori accidentali e sistematici.

Catalogo delle declinazioni medie pel 1875,0 delle 1463 stelle. — L'epoca 1875,0, alla quale è stato riferito il nostro Catalogo, è anteriore alle osservazioni, ma soltanto per poche stelle essa si allontana dall' epoca media delle osservazioni di due anni, mentre per tutte le altre questo allontanamento oscilla attorno ad una durata di circa un anno e mezzo; per cui le incertezze delle variazioni annue

da noi usate non possono notevolmente influire sui valori delle declinazioni medie: mentre poi l'inserzione nel catalogo di queste variazioni annue potrà all'occasione servire per calcolare tale influenza, specialmente per le stelle per le quali il moto annuo sia dimostrato sensibilmente più piccolo o più grande di quello da noi adottato.

La 1ª colonna del Catalogo contiene il numero progressivo delle stelle da noi osservate, disposte in ordine alla loro ascensione retta media.

La 2ª colonna contiene il nome o l'indicazione della stella per mezzo delle lettere loro assegnate in ogni costellazione, o per mezzo del numero assegnato da Flamsteed o dal Catalogo di Groombrigde, o finalmente col semplice nome della costellazione in cui trovasi la stella.

La 3ª colonna dà la grandezza della stella secondo Argelander per tutte quelle stelle che si trovano nell'*Uranometria Nova*, secondo Heis per quelle contenute nel suo *Atlas Coelestis Novus* e non comuni coll'*Uronometria Nova*, mentre per le rimanenti stelle si sono conservate le grandezze assegnate dal B. A. C.

La 4ª colonna dà l'ascensione retta media approssimata pel 1875,0

La 5ª dà la declinazione media 1875,0 ricavata dalle osservazioni dirette.

La 6ª dà la declinazione media 1875,0 ricavata dalle osservazioni riflesse.

La 7ª dà il medio delle declinazioni ottenute dalle osservazioni dirette e riflesse, che viene considerato come il valore definitivo della declinazione della stella.

Le colonne 8ª e 9ª danno il numero delle osservazioni dirette e riflesse fatte sopra ogni stella, e la 10ª indica l'epoca media delle osservazioni stesse.

L'11ª colonna contiene la variazione annua in declinazione, risultante dalla precessione e dal moto proprio annuo della stella, il quale, escluse le stelle fondamentali, fu preso dal B. A. C; mentre per le stelle fondamentali la variazione annua si è presa dai cataloghi, dai quali furono prese le declinazioni provvisorie.

La 12ª colonna dà la differenza fra la declinazione del nostro Catalogo e quelle del Catalogo di Greenwich 1872 per le stelle comuni ai due cataloghi.

La 13ª colonna contiene le differenze fra le declinazioni del nostro Catalogo e le declinazioni provvisorie dedotte dal B. A. C. per tutte le stelle, eccettuate le 286 fondamentali.

Finalmente nella 14ª colonna sono dati i numeri delle stelle secondo il B. A. C.

Ho creduto opportuno di dare nel Catalogo le differenze fra le nostre declinazioni e quelle del Catalogo di Greenwich 1872, perchè dal confronto delle declinazioni delle 666 stelle comuni ai due cataloghi avrebbe potuto dedursi l'errore sistematico relativo dei cataloghi stessi. Ho creduto poi non inutile di presentare nel nostro Catalogo anche le differenze delle nostre declinazioni con quelle ricavate dal B. A. C., perchè risultando esse principalmente dalle incertezze dei moti propri delle stelle, avrebbero potuto indicare quelle stelle, per le quali è più necessaria la verifica del moto proprio; mentre poi queste differenze avrebbero potuto servire anche per la rettifica dei risultati ottenuti in quelle questioni o ricerche astronomiche, nelle quali vennero eventualmente usate le declinazioni del B. A. C.

Confronto del nostro Catalogo col Fundamental-Catalog di Auwers e col Catalogo di Greenwich 1872. — Quantunque io speri che il nostro Catalogo sarà favorevolmente accolto dagli Astronomi, e si meriterà la loro fiducia per la ragionevolezza

del sistema di osservazione su cui fu basato, per il notevole numero delle osservazioni fatte sulle singole stelle, e per la cura e diligenza da noi usate nel raccogliere e discutere il materiale di osservazione, pure non credo inutile di arrecare qualche prova positiva, o di fatto, sul valore del catalogo stesso, desumendola dal confronto del medesimo col *Fundamental-Catalog* di Auwers, che certamente costituisce a questo riguardo l'autorità più competente e più decisiva.

Le stelle comuni ai due cataloghi per verità non sono che 272, e tutte comprese nelle 286 stelle fondamentali da noi usate per la ricerca delle latitudini istrumentali; ma classificando queste stelle, tanto in ordine alla declinazione, quanto all'ascensione retta, distribuendole cioè in gruppi di 2° in 2° di declinazione e di 1^h in 1^h in A.R., se ne ottiene per ogni gruppo un numero sufficiente per potere ricavare in modo approssimativo gli errori relativi in declinazione fra i due cataloghi, tanto in riguardo al valore della declinazione che in riguardo all'ora siderale del passaggio delle stelle al meridiano.

Siccome poi le declinazioni di tutte le 1463 stelle del nostro Catalogo si possono ritenere dello stesso peso od egualmente approssimate, perchè osservate collo stesso strumento, dagli stessi osservatori, col medesimo metodo e lo stesso numero di volte, e ridotte collo stesso sistema e colle stesse costanti, così questi errori sistematici potrebbero con molta probabilità ritenersi proprî di tutto l'intero catalogo, e quindi sufficienti a mostrare il grado di fiducia meritato dalle nostre declinazioni.

A confermare però in modo più positivo questa conseguenza, ho creduto opportuno di estendere il confronto anche alle declinazioni del Catalogo di Greenwich 1872, il quale contiene 216 delle nostre 286 stelle fondamentali; mentre di queste ve ne hanno poi 204 comuni col *Fundamental-Catalog* d'Auwers; di modo che si potevano avere con sufficiente approssimazione gli errori sistematici relativi fra i tre cataloghi. Siccome poi il nostro Catalogo ha comuni con quello di Greenwich 666 stelle, comprese le 216 fondamentali, così determinando per tutte le 666 stelle gli errori relativi, se si fossero trovati in conveniente accordo con quelli ottenuti dalle sole stelle fondamentali, si sarebbe potuto in via di probabilità dedurre, che anche per le stelle non fondamentali gli errori sistematici del nostro Catalogo sono prossimamente eguali a quelli trovati per le stelle fondamentali.

Il seguente specchio V. contiene le differenze fra le declinazioni del nostro Catalogo C (Campidoglio) e quelle del *Fundamental-Catalog* di Auwers F, e così le differenze fra le declinazioni del nostro Catalogo C con quelle del Catalogo G di Greenwich 1872 per tutte le stelle comuni ai cataloghi stessi, disposte come nello specchio I. in ordine alla loro declinazione crescente, e distribuite in gruppi di 2° in 2°; coll'aggiunta del valore approssimato della declinazione di ciascuna stella. Le declinazioni del Catalogo di Greenwich 1872 sono state ridotte all'epoca 1875,0 degli altri due cataloghi, usando la precessione e il moto annuo delle stelle dato dallo stesso Catalogo di Greenwich.

Differenze di declinazione fra i Cataloghi: *Campidoglio*, *Fundamental-Catalog*, *Greenwich* 1872.

Specchio V.

STELLA	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G	STELLA	δ appross	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G	STELLA	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G
	+				+				+		
β Boote. .	20° 12′	+ 0″,46	+ 0″,01	μ Leone. .	26° 35′	— 0″,12	— 0″,53	θ Corona .	31° 47′	+ 0″,62	
110 Ercole .	20 26	+ 0,19	. . .	υ Pesci . .	26 36	+ 0,44	+ 0,79	ζ Ercole .	31 50	+ 0,04	— 0″,70
γ¹ Leone .	20 28	. . .	— 0,14	γ Corona .	26 42	+ 0,28	— 0,05	ο Perseo .	31 53	+ 0,46	— 0,19
ε Ariete .	20 50	. . .	— 0,86	41 Ariete .	26 45	+ 0,77	+ 0,70				
η Cancro .	20 52	+ 0,02	— 0,64	α Corona .	27 8	— 0,18	— 0,93	ρ Gemelli.	32 2	— 0,02	— 0,54
ζ Toro . .	21 4	+ 0,04	— 0,34	35 Ariete .	27 10	+ 0,60	+ 0,54	α² Gemelli.	32 10	+ 0,12	— 0,81
δ Leone .	21 12	— 0,23	— 0,49	ε Corona .	27 14	— 0,23	— 1,15	ξ Orsa mag.	32 14	— 1,01	— 2,04
ι Toro . .	21 25	— 0,19	— 0,43	β Pegaso .	27 24	+ 0,30	— 0,37	γ Lira . .	32 31	+ 0,89	+ 0,46
ν Ariete. .	21 25	— 0,60	— 1,26	ψ Boote. .	27 26	+ 0,30	— 0,74	π¹ Pegaso .	32 34	— 0,20	— 0,43
20 Chioma.	21 35	+ 0,52	. . .	32 Volpetta	27 35	+ 0,67	— 0,18	π² Pegaso .	32 34	+ 0,37	— 1,27
109 Ercole .	21 43	+ 0,26	— 0,14	ε³ Boote. .	27 36	. . .	— 0,01	w Ercole .	32 38	. . .	. . .
β Ercole. .	21 46	+ 0,64	+ 0,28	β Cigno .	27 42	+ 0,36	— 0,06	ι Auriga .	32 58	+ 0,38	— 0,57
				μ Ercole .	27 48	— 0,40	— 1,38	π Androm.	33 2	+ 0,68	— 0,32
δ Gemelli.	22 13	0,00	— 0,54					β¹ Lira . .	33 13	— 0,03	— 0,66
η Gemelli.	22 32	— 0,33	— 1,00	11 Boote. .	27 59	— 0,29	— 0,57	γ Triang..	33 16	— 0,07	. . .
μ Gemelli.	22 35	— 0,37	. . .	ι Gemelli.	28 3	— 0,05	— 0,36	ε Cigno .	33 30	+ 0,13	— 0,71
τ Toro . .	22 43	+ 0,42	+ 0,10	χ Gemelli.	28 9	— 0,54	— 1,17	π Gemelli.	33 43	— 0,28	— 0,89
υ Pegaso .	22 43	+ 0,95	+ 0,31	β Gemelli.	28 20	+ 0,22	— 0,18	ν Orsa mag.	33 47	+ 0,24	— 0,12
α Ariete .	22 52	+ 0,13	— 0,22	α Androm.	28 24	— 0,14	— 0,78	δ Boote. .	33 47	— 0,59	— 1,00
λ Pegaso .	22 55	+ 0,08	+ 0,06	β Toro . .	28 30	+ 0,34	— 0,30				
τ Pegaso .	23 3	+ 0,52	+ 0,17	β Chioma.	28 31	+ 0,64	+ 1,11	θ Gemelli.	34 7	— 0,57	— 1,35
23 Chioma.	23 19	. . .	— 0,18	ε Androm.	28 38	+ 0,11	— 0,87	σ¹ Corona .	34 11	. . .	— 1,27
ζ Androm.	23 35	+ 0,70	+ 0,58	ο Ercole. .	28 45	— 0,18	— 1,53	54 Perseo .	34 16	+ 0,20	— 0,82
27 Toro . .	23 40	+ 0,30	— 0,50	α Triang .	28 58	+ 0,02	— 0,43	β Triang .	34 24	+ 0,41	— 0,21
η Toro . .	23 43	+ 0,01	— 0,50	ι Cancro .	29 13	— 1,17	— 1,50	46 Leon. m.	34 53	+ 0,06	— 0,45
17 Toro . .	23 43	+ 0,09	— 0,71	ξ Ercole .	29 16	— 0,76	— 0,70	α Lince. .	34 55	+ 0,14	— 0,23
41 Leone. .	23 51	+ 0,13	+ 0,21	τ Pesci . .	29 26	— 0,13	— 0,36	β Androm.	34 57	+ 0,38	— 0,36
				β Corona .	29 32	— 0,31	— 0,76	ξ Perseo .	35 26	+ 0,09	+ 0,16
μ Pegaso .	23 57	+ 0,24	— 0,42	η Pegaso .	29 34	0,00	— 0,54				
ζ Leone. .	24 2	+ 0,22	+ 0,26	ζ Cigno. .	29 43	+ 0,47	— 0,10	ι Lira . .	35 54	— 0,15	— 0,81
24 Volpetta	24 17	+ 0,67	. . .					λ Cigno. .	36 2	+ 0,11	— 0,34
ε Leone. .	24 21	— 0,47	— 0,85	δ Androm.	30 11	— 0,82	— 1,51	25 Canidac.	36 56	. . .	— 0,98
κ Gemelli.	24 42	0,00	— 0,61	72 Pegaso .	30 38	+ 0,58	. . .	10 Leon m.	36 57	— 0,67	— 0,96
ι Pegaso .	24 44	+ 0,36	— 0,44	η Corona .	30 44	. . .	— 0,48	π Ercole .	36 57	+ 0,69	+ 0,13
δ Ercole. .	24 59	+ 0,38	. . .	ρ Boote. .	30 55	+ 0,14	— 0,23	ζ Corona s.	37 3	— 0,70	— 0,71
χ Pegaso .	25 4	— 0,43	— 1,09	57 Cancro .	31 3	— 0,53	— 1,19	15 Cigno. .	37 3	+ 0,28	. . .
ε Gemelli.	25 15	— 0,06	— 0,52	ε Ercole. .	31 7	+ 0,54	— 0,16	θ Auriga .	37 12	— 0,48	— 0,69
16 Pegaso .	25 20	+ 0,18	— 0,37	42 Leone. .	31 20	— 0,71	— 1,40	θ Ercole .	37 16	— 0,41	. . .
d Boote. .	25 41	+ 0,12	— 0,64	ζ Perseo .	31 31	— 0,19	— 0,75	38 Lince . .	37 20	+ 0,68	+ 0,52

Differenze di declinazione fra i Cataloghi: *Campidoglio*, *Fundamental-Catalog*, *Greenwich* 1872.

Specchio V.

Stella	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G	Stella	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G	Stella	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G
	+				+				+		
31 Leon. m.	37° 21′	+ 0″,02	— 0″,03	64 Auriga .	41° 6′	0″,00	. . .	o Cigno .	46° 22′	+ 0″,40	— 0″,03
τ Cigno .	37 31	+ 0,53	— 0,24	13 Lucert. .	41 10	+ 0,38	.	τ Ercole .	46 37	+ 0,87	+ 0,58
μ Boote .	37 49	— 0,04	— 1,16	20 Cani d.c.	41 14	— 0,43	— 1″,60	λ Boote. .	46 40	— 0,16	— 0,91
μ Androm.	37 49	+ 0,53	— 0,01	ν¹ Boote .	41 16	— 0,01	. . .	c Perseo .	47 23	0,00	. . .
17H Cani d.c.	37 49	— 0,14	— 1,19	ν² Boote .	41 19	+ 0,18	. . .	δ Perseo .	47 23	— 0,01	— 0,52
				2 Cani d.c.	41 21	— 0,47	. . .	σ Perseo .	47 34	— 0,26	. . .
θ Lira . .	37 55	— 0,37	— 0,96	19 Leon m.	41 39	+ 0,36	+ 0,29	o Cassiop.	47 36	— 0,32	— 0,79
61² Cigno .	38 8	. . .	— 1,29	o Androm.	41 39	+ 0,19	— 0,63	κ Orsa mag.	47 39	— 0,41	. . .
61¹ Cigno .	38 8	+ 0,1⁷	— 0,74	γ Androm.	41 44	— 0,22	— 1,38	26 Lince . .	47 53	0,00	. . .
μ Auriga .	38 20	+ 0,16	— 0,58								
ρ Perseo .	38 21	+ 0,20	— 0,13	8 Cani d.c.	42 2	+ 0,08	— 1,08	υ Perseo. .	48 0	+ 0,63	— 0,15
10 Lucert. .	38 24	— 0,26	— 0,84	2533 Groomb.	42 7	— 1,32	— 1,71	x Ercole. .	48 22	— 0,28	. . .
1450 Groomb.	38 27	+ 0,07	— 1,90	μ Orsa mag.	42 8	— 0,23	— 0,19	χ Orsa mag.	48 28	— 0,31	— 0,77
α Lira . .	38 40	— 0,08	+ 0,13	ν Perseo .	42 11	— 0,58	— 0,92	ι Orsa mag.	48 32	+ 0,29	— 0,37
γ Boote. .	38 51	+ 0,33	. . .	10 Orsa mag.	42 17	— 0,13	. . .	θ Perseo .	48 42	+ 0,40	— 0,58
σ Cigno. .	38 52	. . .	— 0,66	ι Androm.	42 35	+ 0,45	— 0,22	π^3 Cigno .	48 44	— 0,35	. . .
3097 B.A.C. .	38 57	. . .	. . .	σ Ercole .	42 42	— 0,05	— 0,54	ι Perseo .	49 8	— 0,26	. . .
α Cani d. c.	39 0	+ 0,16	— 0,16	ξ Cigno. .	43 26	— 0,38	— 1,33	Ψ¹ Auriga .	49 21	— 0,32	. . .
ν Auriga .	39 7	+ 0,24	— 0,19	λ Orsa mag.	43 32	— 0,77	— 1,63	α Perseo .	49 25	+ 0,11	. . .
η Ercole .	39 10	— 1,05	— 1,49	31 Lince . .	43 35	— 0,38	. . .	α Lucert. .	49 38	+ 0,33	+ 0,05
17 Cani d.c.	39 10	— 0,66	— 1,28	ε Auriga .	43 38	+ 0,32	— 0,42	o Auriga .	49 46	+ 0,33	+ 0,48
5 ε Lira . .	39 29	— 0,05	. . .	χ Androm.	43 39	+ 0,49	. . .				
51 Auriga .	39 30	— 0,54	— 1,45	Ψ^3 Auriga .	43 42	+ 0,28	— 1,74	θ Cigno. .	49 56	— 0,01	. . .
63 Auriga .	39 31	— 0,31	— 0,84	36 Lince . .	43 44	— 0,43	. . .	η Orsa mag.	49 56	— 0,28	— 0,81
4 ε Lira . .	39 32	— 0,25	— 1,33	13 R Lira .	43 47	+ 0,31	— 0,18	φ Perseo .	50 3	0,00	— 0,65
ε Perseo .	39 39	— 0,13	— 1,02	58 Orsa mag.	43 52	— 0,01	. . .	1757 Groomb.	50 9	— 0,56	. . .
6 Cani d.c.	39 43	— 0,04	. . .					6 Perseo. .	50 29	— 0,13	— 0,80
74 Cigno. .	39 51	+ 0,13	. . .	δ Cigno. .	44 50	— 0,06	— 0,70	ι^2 Cigno .	51 28	— 0,18	— 0,31
γ Cigno. .	39 51	+ 0,28	— 0,16	α Cigno. .	44 50	+ 0,12	— 0,72	γ Dragone	51 30	+ 0,22	— 0,27
				β Auriga .	44 56	— 0,13	— 0,96	β Lucert. .	51 36	— 0,18	. . .
λ Auriga .	39 59	. . .	+ 0,64	33 Boote. .	44 57	+ 0,23	. . .	27 Lince. .	51 52	— 0,05	. . .
ν Androm.	40 21	. . .	. . .	ψ Orsa mag.	45 11	— 0,23	— 0,95				
β Perseo .	40 28	+ 0,04	— 0,90	φ Ercole .	45 16	— 0,02	. . .	ι Boote . .	51 57	+ 0,01	— 0,56
2415 Groomb.	40 41	— 0,57	. . .	22 Androm.	45 23	+ 0,06	. . .	ψ Cigno. .	52 6	+ 0,03	— 0,53
ν Cigno. .	40 41	— 0,08	. . .	λ Androm.	45 47	+ 0,22	. . .	θ Orsa mag.	52 15	— 0,33	— 0,81
φ Boote. .	40 46	+ 0,28	. . .	α Auriga .	45 52	+ 0,54	+ 0,29	τ Perseo .	52 24	+ 0,02	— 0,44
β Boote. .	40 53	— 0,13	— 1,08					β Dragone	52 24	— 0,49	— 1,14
ζ Ariete. .	40 53	+ 0,17	— 0,38	g Cigno. .	45 59	0,00	. . .	θ Boote. .	52 26	+ 0,07	+ 0,03
η Auriga .	41 4	— 0,02	+ 0,39	ι Ercole .	46 4	— 0,64	— 1,57	γ Perseo .	53 1	— 0,33	— 0,86

Differenze di declinazione fra i Cataloghi: *Campidoglio, Fundamental-Catalog, Greenwich* 1872.

SPECCHIO V.

STELLA	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G	STELLA	δ appross.	differenza in δ C—F	differenza in δ C—G	STELLA	δ appross.	Differenza in δ C—F	Differenza in δ C—G
	+				+				+		
κ Cigno .	53° 8′	— 0″,43	— 0″,85	ξ Dragone	56° 54′	— 0″,40	— 2″,09	2164Groomb.	59° 48′	+ 0″,06	. . .
1460Groomb.	53 9	— 0,11	. . .	13H Cefeo . .	56 55	+ 0,04	. . .				
ζ Cassiop.	53 13	+ 0,54	. . .	2377Groomb.	57 0	— 0,16	— 0,26	γ Cassiop.	60 2	+ 0,12	— 0″,67
1 Giraffa s.	53 38	+ 0,16	. . .	β Orsa mag.	57 3	— 0,87	— 1,57	β Giraffa .	60 15	+ 0,02	— 0,44
				6H Cefeo . .	57 8	— 0,19	. . .	69H Orsa mag.	60 36	— 0,64	— 1,00
δ Auriga .	54 16	+ 0,13	— 0,22	η Cassiop.	57 9	— 0,90	— 1,33	53 Giraffa .	60 40	— 0,20	+ 0,31
μ Cassiop.	54 18	. . .	— 0,53	ζ Cefeo . .	57 35	+ 0,36	— 0,23	9H Giraffa .	60 41	— 0,55	— 1,19
γ Orsa mag.	54 23	+ 0,24	— 0,40	37 Orsa mag.	57 44	— 0,50	— 0,62	2125Groomb.	60 47	+ 0,25	. . .
1501Groomb.	54 46	+ 0,31	. . .	δ Orsa mag.	57 44	— 0,69	— 1,03	o Orsa mag.	61 8	— 0,83	— 1,24
2296Groomb.	55 6	— 0,01	. . .	δ Cefeo . .	57 47	+ 0,10	. . .	η Cefeo . .	61 21	— 0,25	— 0,73
ν Drag.seg.	55 16	— 0,42	. . .					8 Lince . .	61 35	— 0,12	— 0,25
ν Drag.pr.	55 16	— 0,13	. . .	β Cassiop.	58 28	— 0,33	— 1,12	4 Cassiop.	61 36	+ 0,02	— 0,51
η Perseo. .	55 22	+ 0,40	. . .	15 Lince . .	58 35	— 0,29	— 0,63	η Dragone	61 48	+ 0,64	+ 0,15
2343Groomb.	55 29	— 0,70	+ 0,10	b Dragone	58 44	+ 0,33	. . .				
19 Lin. seg.	55 31	— 0,17	+ 0,07	θ Dragone	58 54	+ 0,50	+ 0,13	α Cefeo . .	62 3	— 0,19	— 0,51
ζ Orsa mag.	55 35	— 0,18	— 0,81	24 Lince . .	59 0	— 0,37	. . .	20 Cefeo . .	62 11	— 0,80	— 1,06
α Cassiop.	55 51	+ 0,16	. . .	2 Lince . .	59 3	— 0,32	. . .	χ Cassiop.	62 14	+ 0,28	— 0,27
				74 Orsa mag.	59 6	— 0,66	. . .	α Orsa mag.	62 26	— 0,48	— 0,78
33 Cigno. .	56 11	+ 0,26	. . .	o Drag.seg.	59 14	— 0,22	— 0,66	θ Cefeo . .	62 34	+ 0,59	+ 0,26
3077Bradley.	56 29	— 0,36	— 1,28	ι Dragone	59 24	+ 0,12	— 0,32	716 Groomb.	62 49	+ 0,07	— 0,39
4 Giraffa .	56 32	+ 0,14	— 0,89	3415Groomb.	59 28	+ 0,37	. . .	30 Cefeo . .	62 56	— 0,41	. . .
36 Orsa mag.	56 37	+ 0,14	— 0,34	2H Giraffa .	59 30	— 0,64	. . .	17 Giraffa .	62 58	— 0,28	. . .
ε Orsa mag.	56 38	+ 0,42	— 0,4	δ Cassiop.	59 35	— 0,74	— 1,21	ε Cassiop.	63 3	+ 0,14	+ 0,04
ρ Cassiop.	56 48	— 0,11	. . .	υ Orsa mag.	59 38	— 0,62	— 1,14	82 Bradley.	63 34	— 0,26	. . .

Da questo specchio si rileva, che mentre in generale le nostre declinazioni sono in conveniente accordo con quelle di Auwers, e con differenze irregolarmente oscillanti intorno allo zero, le differenze fra le nostre declinazioni e quelle del Catalogo di Greenwich sono invece molto più forti e quasi sistematicamente negative; dal che risulta che le declinazioni di Greenwich sono sistematicamente più grandi delle nostre e di quelle di Auwers. Calcolando sulle 272 differenze C-F la differenza probabile di una delle nostre declinazioni colla corrispondente di Auwers, e chiamandola d si trova

$$d = \pm 0'',2652 .$$

Calcolando poi secondo la teoria degli errori accidentali il numero delle differenze che dovrebbero essere comprese da $0'',00$ a $\pm 0''27$, da $\pm 0'',27$ a $\pm 0'',47$, da $\pm 0'',47$ a $\pm 0''67$, da $\pm 0''67$ a $\pm 0''87$, e finalmente quelle maggiori di $\pm 0'',87$, si trovano i seguenti numeri, che si accordano in modo soddisfacente coi numeri dati dalle osservazioni.

Differenze comprese	Numeri calcolati	Numeri osservati
da $0'',00$ a $\pm 0'',27$ . .	142	133
da $\pm 0'',27$ a $\pm 0'',47$ . .	67	72
da $\pm 0'',47$ a $\pm 0'',67$ . .	40	41
da $\pm 0'',67$ a $\pm 0'',87$ . .	16	18
$> \pm 0''87$	7	8

Questo soddisfacente accordo fra il nostro Catalogo e quello di Auwers si riferisce però al complesso dei risultati ottenuti per le 272 stelle, e non è perciò esclusa la possibilità di errori sistematici fra i due cataloghi, qualora le differenze si distribuiscano in gruppi ordinati secondo la declinazione delle stelle, o secondo la loro ascensione retta.

Per iscoprire gli errori sistematici in declinazione possiamo prendere nello specchio V i medî delle differenze di 2° in 2° di declinazione avendo riguardo al segno, poichè la grandezza e il segno di questi medî pei 22 gruppi di stelle ci mostreranno, se e quale relazione essi abbiano colla declinazione.

Il seguente specchio VI contiene appunto queste medie differenze di C-F pei 22 gruppi di stelle, alle quali sonosi aggiunte anche le medie differenze di C-G, ossia i medî delle differenze fra il nostro Catalogo e quello di Greenwich desunte dallo stesso specchio V per le 216 stelle fondamentali comuni a due cataloghi, e così i medî di F-G, ossia delle differenze di declinazione fra il *Fundamental-Catalog* e il Catalogo di Greenwich per le 204 stelle ad essi comuni: e finalmente nell'ultima colonna dello specchio si sono inseriti i medî C-GG delle differenze di declinazione per tutte le 666 stelle comuni al nostro Catalogo ed a quello di Greenwich.

Medie differenze in declinazione fra i Cataloghi: *Càmpidoglio, Fundamental-Catalog e Greenwich* 1872.

SPECCHIO VI.

Zona di declinazione	Arco in distanza zenitale	Differenze medie C — F	N.° delle Stelle	Differenze medie C — G	N.° delle Stelle	Differenze medie F — G	N.° delle Stelle	Differenze medie C — G G	N.° delle Stelle
+									
19° 53′ a 21° 53′	22° a 20°	+ 0″,11	10	— 0″,40	10	— 0″,43	8	— 0″,43	19
21 53 » 23 53	20 » 18	+ 0,20	13	— 0,17	13	— 0,42	12	— 0,39	48
23 53 » 25 53	18 » 16	+ 0,11	11	— 0,52	9	— 0,59	9	— 0,57	47
25 53 » 27 53	16 » 14	+ 0,23	12	— 0,26	13	— 0,49	12	— 0,63	47
27 53 » 29 53	14 » 12	— 0,11	16	— 0,64	16	— 0,53	16	— 0,92	49
29 53 » 31 53	12 » 10	+ 0,01	10	— 0,73	9	— 0,64	8	— 1,19	30
31 53 » 33 53	10 » 8	+ 0,05	14	— 0,68	13	— 0,73	13	— 0,81	38
33 53 » 35 53	8 » 6	+ 0,20	7	— 0,56	8	— 0,65	7	— 0,72	27
35 53 » 37 53	6 » 4	+ 0,02	14	— 0,50	13	— 0,49	12	— 0,74	51
37 53 » 39 53	4 » 2	— 0,10	20	— 0,83	18	— 0,67	16	— 0,89	44
39 53 » 41 53	2 » 0	— 0,02	16	— 0,56	10	— 0,66	8	— 0,73	30
—									
41 53 » 43 53	0 » 2	— 0,15	16	— 0,90	11	— 0,73	11	— 0,91	22
43 53 » 45 53	2 » 4	+ 0,08	9	— 0,61	5	— 0,66	5	— 0,68	11
45 53 » 47 53	4 » 6	— 0,05	11	— 0,54	6	— 0,54	6	— 0,83	20
47 53 » 49 53	6 » 8	+ 0,05	11	— 0,27	6	— 0,53	7	— 0,51	21
49 53 » 51 53	8 » 10	— 0,13	9	— 0,57	5	— 0,49	5	— 0,62	13
51 53 » 53 53	10 » 12	— 0,08	11	— 0,65	8	— 0,46	8	— 0,45	21
53 53 » 55 53	12 » 14	— 0,03	11	— 0,36	7	— 0,28	6	— 0,63	17
55 53 » 57 53	14 » 16	— 0,17	16	— 0,92	11	— 0,67	11	— 0,80	20
57 53 » 59 53	16 » 18	— 0,20	14	— 0,71	7	— 0,48	7	— 0,63	18
59 53 » 61 53	18 » 20	— 0,14	11	— 0,56	10	— 0,42	10	— 0,65	52
61 53 » 63 53	20 » 22	— 0,13	10	— 0,38	7	— 0,31	7	— 0,44	21
Medie a totali . . .		— 0,01	272	— 0,56	216	— 0,54	204	— 0,69	666

Esaminando la colonna C-F delle differenze fra le declinazioni del nostro Catalogo e il *Fundamental-Catalog* di Auwers, si rileva che per le stelle al sud le nostre declinazioni sono maggiori di quelle di Auwers, e in media di + 0″06: mentre per le stelle al nord le prime sono minori delle seconde di — 0″,09 : la media generale di queste differenze, avuto riguardo al segno, risulta di — 0″,01 ; e però in complesso le nostre declinazioni sono di pochissimo inferiori a quelle di Auwers; mentre non avendo riguardo al segno, il medio delle differenze fra uno dei nostri gruppi di stelle ed il corrispondente di Auwers risulta di 0″,11.

Le differenze fra i due cataloghi si presentano più sensibili e più sistematiche nei gruppi di stelle più distanti dal zenit, e ciò potrebbe, in parte almeno, attribuirsi a difetto delle tavole di rifrazione da noi usate; ma siccome le differenze sono abbastanza piccole, e d'altronde non essendo del tutto escluso il dubbio, che una parte di queste differenze od errori provenga dallo stesso Catalogo di Auwers, principalmente per quelle stelle le cui declinazioni non poterono prendersi da lui che in pochi cataloghi, così non credo opportuno di entrare in ispeciali indagini sulla causa di queste discrepanze e sul modo più ragionevole di diminuirne l' entità o la grandezza. Malgrado queste differenze l'accordo del nostro Catalogo con quello di Auwers è già molto soddisfacente, e certamente molto più grande di quello presentato da tutti i cataloghi da lui usati.

Quantunque il confronto dei due cataloghi non risguardi che le sole 272 stelle comuni ai medesimi, pure le conseguenze, che se ne possono dedurre in riguardo alla fiducia meritata dal nostro Catalogo, possono ragionevolmente estendersi a tutto il Catalogo stesso, in quanto che tutte le 1463 stelle vennero osservate collo stesso sistema, dai medesimi osservatori e lo stesso numero di volte, e le riduzioni delle osservazioni furono basate sugli stessi dati, sulle stesse costanti.

Come già ho dichiarato, le osservazioni di ogni stella non furono fatte di seguito, ma interrottamente a lunghi intervalli di tempo, in modo da occupare varie stagioni, passando successivamente dalle ore avanzate dalla notte sino alle prime ore della sera: e questo sistema fu adottato per evitare il pericolo di errori od influenze sistematiche sulle distanze zenitali, dipendenti dalle condizioni atmosferiche e dalle condizioni dello strumento, e forse anche dallo stato fisico e fisiologico dell'osservatore: delle quali influenze si rendeva più probabile il compenso nelle variate condizioni di un lungo periodo di osservazione.

Per questa circostanza nel nostro Catalogo le declinazioni non dovrebbero essere soggette ad errori sistematici in ascensione retta, dipendenti cioè dal tempo dei passaggi delle stelle al meridiano; ma invece prendendo il medio delle differenze fra le nostre declinazioni e quelle di Auwers, distribuite o classificate per ora, ossia in ordine alla ascensione retta, si ottiene il seguente quadro, nel quale sono date le medie differenze C-F per ogni ora di A R, contando 0^h per le stelle comprese da $23^h\ 30^m$ a $0^h\ 30^m$, così 1^h per quelle fra $0^h\ 30^m$ e $1^h\ 30^m$, e così di seguito; coll'aggiunta delle medie differenze fra le nostre declinazioni e quelle di Auwers, corrette le prime dagli errori sistematici in declinazione, già riportati nello specchio VI.

Differenze medie in declinazione fra il Catalogo del Campidoglio e il Fundamental-Catalog di Auwers in ordine alla ascensione retta.

Ora	Differenze senza correzione	Differenze colla correzione	N.° delle stelle
h			
0	+ 0″,11	+ 0″,17	8
1	+ 0,04 (+ 0″,09)	+ 0,05 (+ 0″,11)	15
2	+ 0,14	+ 0,13	10
3	0,00	+ 0,01	13
4	+ 0,04	+ 0,02	14
5	+ 0,17	+ 0,18	12
6	— 0,12	— 0,12	11
7	— 0,13	— 0,13	12
8	— 0,20	— 0,17	12
9	— 0,20 (— 0,07)	— 0,18 (— 0,09)	12
10	— 0,20	— 0,17	10
11	— 0,33 (— 0,23)	— 0,36 (— 0,23)	11
12	— 0,17	— 0,13	8
13	— 0,10	— 0,02	8
14	+ 0,02	+ 0,05	9
15	+ 0,02	+ 0,03	12
16	+ 0,14 (+ 0,07)	+ 0,13 (+ 0,06)	11
17	— 0,12 (— 0,04)	— 0,08 (— 0,01)	12
18	— 0,32 (— 0,22)	— 0,27 (— 0,17)	10
19	— 0,01 (— 0,07)	+ 0,04 (— 0,04)	13
20	+ 0,27	+ 0,29	9
21	+ 0,11	+ 0,15	14
22	— 0,07	+ 0,02	13
23	+ 0,19 (+ 0,12)	+ 0,15 (+ 0,10)	13

I numeri posti fra parentesi rappresentano le differenze medie, che si otterrebbero escludendo le 8 stelle, per le quali le differenze di declinazione nei due cataloghi superano $\pm$ 0″87, le quali possono considerarsi come eccezionali, e perciò tali da alterare troppo irregolarmente il valore della media di un numero ristretto di dati.

Esaminando questo quadro si rileva, che da 20^h a 0^h e da 0^h a 5^h inclusive le nostre declinazioni sono un poco più grandi di quelle di Auwers colla media differenza + 0″,09 tanto per le declinazioni non corrette, come per quelle corrette degli errori sistematici dati dallo specchio VI; che da 6^h a 12^h inclusive le nostre declinazioni sono più piccole di quelle di Auwers, e in risultato medio di — 0″,18 tanto per le declinazioni non corrette come per le corrette; che da 13^h a 19^h le differenze oscillano leggermente attorno allo zero, colla sola eccezione di quella delle 18^h, nella quale le nostre declinazioni sono minori di quasi 0″,30 di quelle di Auwers.

Ciò proverebbe l'esistenza di errori sistematici in declinazione fra il nostro Catalogo a quello di Auwers, dipendenti dal tempo o dalla A R delle stelle, ma la grandezza di questi errori, fatta eccezione a pochi casi, è generalmente piccola e di andamento troppo irregolare per poterla assoggettare ad una legge o formola generale. Che anzi avuto riguardo al piccol numero delle stelle comprese in ogni ora, alla notevole influenza esercitata sulla media differenza oraria soltanto dalla declinazione di una o due stelle, ed alla possibilità di qualche errore nelle declinazioni del *Fundamental-Catalog*, non credo irragionevole il conchiudere, che se nelle declinazioni del nostro Catalogo esiste un errore sistematico dipendente dal tempo o dalla A R delle stelle, esso deve essere ristretto in limiti molto più ravvicinati, di quelli presentati dal quadro precedente.

Il confronto del nostro Catalogo con quello di Greenwich 1872 è stato principalmente fatto allo scopo di mostrare, che l'accordo verificato fra il nostro Catalogo e il *Fundamental-Catalog* per le 272 stelle fondamentali comuni ai medesimi, può ragionevolmente estendersi a tutte le altre stelle da noi osservate, quantunque ciò potesse stabilirsi a priori per l' identità del metodo di osservazione e delle costanti usate nelle riduzioni, per l' identità degli osservatori e per l' uniformità nel numero delle osservazioni fatte sopra ogni stella.

Prendendo dallo specchio VI le differenze medie C-G fra le declinazioni del nostro Catalogo e quelle di Greenwich per le 216 stelle comuni ai medesimi, prese di 2° in 2° di declinazione o di distanza zenitale, e confrontandole colle corrispondenti F-G fra il *Fundamental-Catalog* e lo stesso Catalogo di Greenwich, per le 204 stelle ad essi comuni, si trova che fra queste differenze C-G e F-G esiste un accordo abbastanza soddisfacente, avuto riguardo al ristretto numero delle stelle ed alla loro incompleta identità.

Prendendo la media generale delle differenze C-G e F-G, si trova che da 19°,54′ a 63°,54′ le nostre declinazioni sono più piccole di quelle del Catalogo di Greenwich di — 0″,56, mentre fra le declinazioni del *Fundamental-Catalog* e del Catalogo Greenwich la differenza media corrispondente è di —0″,54, sicchè il nostro Catalogo e quello di Auwers, entro i due indicati paralleli, assegnano quasi lo stesso errore sistematico medio al Catalogo di Greenwich 1872.

Se ora prendiamo le medie differenze C-GG fra le nostre declinazioni e quelle di Greenwich 1872 per tutte le 666 stelle comuni ai due cataloghi, e le confrontiamo colle corrispondenti C-G e F-G, troviamo che mentre nella maggiore parte dei gruppi di stelle vi è un sufficiente accordo, per alcuni gruppi invece le differenze riescono piuttosto sensibili. Il medio generale delle differenze C-GG, prese per tutte le 666 stelle comuni al Catalogo del Campidoglio ed a quello di Greenwich, risulta di — 0″69; mentre questo medio per le sole 216 fondamentali giungeva soltanto a — 0″,56: e per ciò secondo il nostro Catalogo l'errore sistematico medio dedotto dalle 666 stelle sarebbe portato da — 0″,56 a — 0″,69, ingrandito cioè di — 0″,13.

Ma tanto questo aumento nel medio delle differenze C-GG ottenute dalle 666 stelle, quanto i disaccordi verificati per alcuni gruppi, trovano facilmente la loro spiegazione nel fatto, che nel Catalogo di Greenwich le declinazioni delle stelle comuni colle nostre fondamentali erano basate nella maggior parte su di un conveniente numero

di osservazioni; fra le rimanenti stelle invece ve ne sono non poche le cui declinazioni furono appoggiate soltanto sopra 1, o 2 osservazioni, in modo che si hanno non poche differenze maggiori di — 2″,00; escludendo le quali, in gran parte sparirebbero, tanto i disaccordi parziali di alcuni gruppi, quanto la differenza — 0″,13 trovata fra i due medî errori sistematici. Da questi risultati mi sembra confermato che in complesso le declinazioni date dal nostro Catalogo meritano in realtà quello stesso grado di fiducia, che può accordarsi alle 272 stelle fondamentali che esso ha comuni col *Fundamental-Catalog* di Auwers.

Farò da ultimo avvertire in riguardo all'errore sistematico medio del Catalogo Greenwich 1872 rispetto al *Fundamental-Catalog* di Auwers e rispetto al Catalogo del Campidoglio, che vi ha tutta ragione di ritenerlo come un reale eccesso di grandezza nelle declinazioni dello stesso Catalogo Greenwich: ciò che d'altronde viene ammesso come molto probabile anche nell'*Appendice* che fa seguito all'*Introduzione* di questo Catalogo; nella quale, in base ai confronti fatti coi precedenti Cataloghi di Greenwich, si trova non giustificato l'aumento dato alla latitudine e la diminuzione fatta alla rifrazione per quest'ultimo Catalogo. Di modo che applicando alle declinazioni Greenwich 1872 le correzioni date nell'*Appendice* stessa, per riportarle alla primitiva latitudine e rifrazione, in gran parte scompare l'errore sistematico di questo Catalogo con quello di Auwers e con quello del Campidoglio.

Nel chiudere questa Introduzione al Catalogo delle 1463 stelle soddisfo all'obbligo, che mi incombe, di esternare la mia piena soddisfazione e gratitudine al sig. dott. Alfonso Di Legge primo assistente, ed al sig. dott. Francesco Giacomelli secondo assistente in questo R. Osservatorio, per la efficace ed intelligente cooperazione da essi prestatami nell'esecuzione di questo gravoso lavoro, tanto nella parte di osservazione che in quella delle riduzioni e dei calcoli. E di più sono ben lieto di poter aggiungere, che mercè il loro valido concorso trovasi ora quasi del tutto compito il lavoro di osservazione anche per la 2ª parte dell'intero Catalogo, esteso a tutto l'emisfero settentrionale; e che anche il lavoro di riduzione e di calcolo trovasi già abbastanza innoltrato per farmi sperare non lontana la sua pubblicazione.

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				+			
1	α Andromeda.	2	0 1 56	28 24 0,74	0,55	0,65	10	12	1,19	19,90	— 0,78		4
2	β Cassiopea. .	2.3	0 2 31	58 27 36,37	36,44	36,41	10	10	1,25	19,85	— 1,14		7
3	Andromeda.	6	0 3 34	45 41 34,30	—	34,30	14	—	1,22	20,05		— 8,33	13
4	22 Andromeda.	5.6	0 3 50	45 22 35,24	—	35,24	18	—	0,42	20,05			16
5	23 Andromeda.	6	0 7 2	40 20 42,45	—	42,45	15	—	0,84	19,97		— 5,07	28
6	Andromeda.	6	0 10 15	60 50 18,03	18,33	18,18	11	10	1,22	20,03	— 1,68	— 0,12	46
7	Andromeda.	6	0 10 23	47 15 8,71	8,43	8,57	10	10	1,37	20,04		— 3,28	51
8	θ Andromeda.	5.4	0 10 34	37 59 14,83	15,08	14,96	11	11	1,82	20,04	— 0,60	— 0,64	52
9	Cassiopea. .	6.7	0 11 5	50 44 19,73	19,42	19,57	9	10	1,24	20,04		+ 1,62	54
10	σ Andromeda.	4.5	0 11 48	36 5 31,25	31,04	31,15	10	15	1,33	19,99	— 1,59	— 0,63	58
11	Cassiopea. .	6	0 13 56	61 11 7,55	7,84	7,70	10	10	1,23	20,02		— 0,28	65
12	ρ Andromeda.	6	0 14 33	37 16 32,91	32,75	32,83	10	11	1,27	19,99	— 1,27	— 4,35	67
13	Andromeda.	6.7	0 17 26	43 34 18,43	—	18,43	16	—	1,33	20,00		— 1,52	78
14	Cassiopea. .	6	0 17 31	51 19 36,97	36,74	36,86	10	9	1,27	20,00		— 0,09	79
15	12 Cassiopea. .	6.5	0 17 55	61 8 17,53	17,50	17,52	11	10	1,40	20,00	— 0,29	+ 0,37	80
16	Cassiopea. .	6	0 18 20	52 21 15,37	15,14	15,26	11	9	1,26	19,96		+ 3,61	83
17	Andromeda.	6.5	0 21 30	43 42 9,43	—	9,43	15	—	0,86	19,96		— 2,29	100
18	28 Andromeda.	6.5	0 23 32	29 3 43,69	43,89	43,79	14	11	1,33	19,92	— 0,44	— 2,64	109
19	Andromeda.	6	0 24 48	32 53 28,88	28,67	28,78	10	10	1,16	19,94		+ 10,78	120
20	λ Cassiopea. .	5	0 24 52	53 49 56,10	55,80	55,95	10	11	1,27	19,96		— 0,45	121
21	κ Cassiopea. .	4.5	0 25 54	62 14 29,94	29,70	29,82	11	10	1,36	19,94	— 0,27		126
22	Cassiopea. .	6	0 29 11	53 28 46,36	46,57	46,47	10	10	0,85	19,94		— 2,51	146
23	Cassiopea. .	6	0 29 21	59 38 14,53	14,89	14,71	10	9	1,72	19,90		— 0,87	148
24	Andromeda.	6	0 29 59	43 27 55,67	—	55,67	16	—	1,40	19,90		+ 1,09	152
25	ζ Cassiopea. .	4	0 30 1	53 12 31,53	31,63	31,58	8	10	1,25	19,86			153
26	π Andromeda.	4	0 30 12	33 1 51,79	51,55	51,67	11	10	0,32	19,89	— 0,33		155
27	Andromeda.	6	0 30 40	34 42 40,20	40,36	40,28	10	13	1,36	19,84		+ 3,60	158
28	ε Andromeda.	4	0 31 57	28 37 57,57	57,77	57,67	10	10	1,30	19,62	— 0,87		164
29	Cassiopea .	6	0 32 16	48 40 1,92	2.05	1,98	11	10	1,83	19,85	— 0,98	— 0,97	165
30	δ Andromeda.	3.4	0 32 39	30 10 35,07	35,12	35,10	10	12	1,32	19,76	— 1,51		166
31	55 Pesci	6.5	0 33 21	20 45 8,52	8,78	8,66	11	10	1,86	19,83		— 1,10	170
32	α Cassiopea .	3var	0 33 25	55 51 5,18	5,49	5,33	11	12	1,30	19,80	— 0,33		169
33	32 Andromeda.	5.6	0 34 22	38 46 20,65	—	20,65	16	—	1,49	19,85		— 0,50	173
34	Andromeda.	6	0 34 59	23 56 36,19	36,60	36,40	10	11	1,32	19,84	— 0,39	— 3,10	178
35	ξ Cassiopea. .	6	0 35 6	49 49 36,27	35,91	36,09	11	10	1,34	19,77	+ 0.04	+ 5,17	180

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
36	π Cassiopea. .	6	0 36 33	40 20 24,58	24,84	24,76	10	11	1,29	19,79	— 0,85	— 2,36	189
37	o Cassiopea. .	5	0 37 46	47 35 59,20	58,84	59,02	9	9	1,26	19,79	— 0,79		198
38	. Cassiopea. .	6	0 38 11	54 32 13,21	13,58	13,40	12	11	1,26	19,70		+ 4,65	201
39	ζ Andromeda.	4	0 40 43	23 35 12,73	13,24	12,99	9	11	1,22	19,66	+ 0,58		215
40	η Cassiopea. .	4.3	0 41 33	57 9 7,23	7,33	7,34	10	10	1,27	19,24	— 1,33		218
41	ν Cassiopea. .	5	0 41 45	50 17 8,81	8,86	8,84	10	10	1,30	19,66		+ 4,99	219
42	Andromeda.	6	0 42 27	28 2 14,77	15,09	14,93	10	10	1,43	19,71		— 1,27	224
43	Cassiopea. .	6	0 42 37	47 4 57,79	57,84	57,81	10	10	1,79	19,71		— 2,17	226
44	ν Andromeda.	4.5	0 42 55	40 23 51,70	—	51,70	15	—	1,31	19,70	— 0,98		227
45	82 Bradley. . .	6	0 43 9	63 33 58,95	58,80	58,88	10	10	1,35	19,67			228
46	i Pesci	6	0 43 10	27 1 44,25	44,43	44,34	10	10	1,28	19,73		— 4,54	229
47	Cassiopea. .	5.6	0 45 37	60 26 16,29	16,62	16,46	10	10	0,88	19,70	— 0,96	+ 6,87	239
48	υ^4 Cassiopea. .	6.5	0 47 36	58 17 43,73	43,74	43,74	10	10	0,86	19,54	— 1,32	+ 1,06	244
49	Cassiopea. .	5	0 47 59	48 0 0,90	0,88	0,89	11	11	1,80	19,61	— 1,47	— 2,06	245
50	36 Andromeda.	6	0 48 17	22 57 2,10	2,38	2,24	10	10	1,31	19,59	— 1,24	— 4,56	250
51	γ Cassiopea. .	2	0 49 11	60 2 21,55	21,45	21,50	11	10	1,36	19,60	— 0,67		253
52	υ^2 Cassiopea. .	6.5	0 49 14	58 30 18,56	18,47	18,52	10	10	1,45	19,59	— 1,09	— 3,23	254
53	k Pesci	6	0 49 15	26 31 53,14	53,06	53,10	12	10	1,39	19,68	— 0,23	— 6,80	256
54	Cassiopea. .	6	0 49 16	59 41 7,46	7,57	7,52	11	11	1,36	19,59		— 0,43	255
55	μ Andromeda.	4	0 49 49	37 49 15,63	15,67	15,65	12	12	0,85	19,62	— 0,01		259
56	Pesci	7.6	0 50 31	26 19 22,48	22,29	22,39	10	9	1,41	19,58		— 4,61	263
57	η Andromeda.	5	0 50 32	22 44 32,40	32,81	32,60	11	10	1,32	19,58	+ 0,48	— 5,00	264
58	h Pesci	6	0 51 4	28 18 58,06	57,64	57,85	11	11	1,27	19,56	— 0,62	— 1,12	267
59	39 Andromeda.	6	0 55 53	40 40 21,91	—	21,91	15	—	1,44	19,46		+ 0,41	283
60	Cassiopea. .	6	0 55 56	60 24 8,01	8,40	8,20	9	9	0,87	19,46	— 1,25	+ 0,42	282
61	σ' Pesci. . . .	5	0 55 58	31 7 56,40	56,57	56,48	11	13	1,29	19,46	— 1,58	— 4,12	285
62	Andromeda.	6	0 57 34	39 19 13,32	—	13,32	16	—	1,44	19,43		0,00	297
63	Pesci	6	0 57 37	28 59 27,26	27,28	27,27	10	11	1,42	19,42		— 11,33	299
64	Cassiopea. .	6.7	0 58 31	62 5 31,04	31,28	31,16	9	11	1,27	19,41	— 1,02	— 1,79	302
65	Ψ' Pesci prec.	5.4	0 58 59	20 48 12,37	12,61	12,49	9	11	1,42	19,37		— 0,23	307
66	Pesci	6	0 59 0	20 47 43,85	44,09	43,97	11	9	1,44	19,36		— 0,23	308
67	μ Cassiopea. .	6	0 59 58	54 18 22,85	22,81	22,83	10	10	1,27	17,86	— 0,53		314
68	41 Ariete . . .	5	1 0 50	43 16 32,25	—	32,25	17	—	1,93	19,32		— 1,00	318
69	78 Pesci	6	1 1 6	31 20 40,28	40,57	40,43	10	10	1,32	19,34		— 3,25	321
70	φ Andromeda.	4.5	1 2 15	46 34 29,29	29,53	29,41	3	10	1,38	19,34		— 1,58	330

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni		Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette / riflesse					
			h m s	° ′ ″	″	″		+				
71	β Andromeda.	2.3	1 2 44	34 57 26,58	26,41	26,50	15 16	0,78	19,21	— 0,35		334
72	44 Andromeda.	6	1 3 15	41 25 58,68	—	58,68	17 —	1,46	19,26		— 1,37	337
73	θ Cassiopea. .	4.5	1 3 29	54 29 3,34	3,57	3,46	11 10	1,36	19,28		— 1,29	339
74	45 Andromeda.	6	1 4 5	37 3 30,78	30,83	30,80	12 11	1,44	19,34		— 4,85	343
75	g Pesci	5.6	1 4 13	30 45 32,68	32,79	32,74	10 10	1,84	19,25		+ 1,75	345
76	χ Pesci. . . .	5,4	1 4 44	20 22 9,87	10,09	9,98	9 12	1,84	19,25		+ 0,98	348
77	τ Pesci	4	1 4 47	29 25 31,33	31,47	31,40	10 10	1,36	19,22	— 0,36		349
78	Andromeda.	6.7	1 5 21	44 40 9,84	—	9,84	16 —	1,32	19,20		+ 4,88	352
79	φ Pesci. . . .	5	1 6 58	23 55 16,24	16,35	16,30	10 11	0,88	19,24		— 5,04	365
80	Andromeda.	6	1 9 19	42 16 45,44	—	45,44	16 —	1,26	19,14		— 2,66	377
81	φ Cassiopea .	5.6	1 12 13	57 34 25,92	25,87	25,90	10 11	1,23	19,10		— 1,76	391
82	υ Pesci	4	1 12 36	26 36 23,16	23,19	23,18	10 13	1,26	19,07	+ 0,79		395
83	l Pesci	5	1 14 13	28 5 2,82	2,69	2,76	11 10	1,87	18,98		— 3,64	401
84	ξ Andromeda.	5	1 14 59	44 52 23,58	—	23,58	16 —	1,35	18,96	+ 0,53	+ 3,48	404
85	47 Andromeda.	6	1 16 32	37 3 41,60	41,48	41,54	10 10	1,40	18,97		— 4,44	409
86	δ Cassiopea. .	3	1 17 39	59 35 4,72	5,13	4,92	10 10	0,85	18,87	— 1,22		416
87	Andromeda.	6	1 18 57	42 48 30,36	—	30,36	18 —	0,88	18,84		— 3,01	425
88	ω Andromeda.	5	1 20 10	44 45 37,92	—	37,92	17 —	1,26	18,74		— 0,04	432
89	49 Androm. A.	6	1 22 37	46 21 41,89	41,51	41,70	15 10	1,42	18,74	— 1,14	— 1,74	441
90	χ Cassiopea. .	5.6	1 25 46	58 35 22,83	22,76	22,80	9 13	0,90	18,64		+ 0,28	456
91	Andromeda.	6	1 27 4	36 35 43,42	43,58	43,50	14 10	1,26	18,67	— 0,71	— 0,43	465
92	Andromeda.	6	1 28 50	48 4 59,45	59,46	59,45	10 10	1,38	18,52	— 1,20	+ 1,01	474
93	50 Andromeda.	4.5	1 29 28	40 46 46,47	—	46,47	16 —	1,24	18,17	+ 0,50	— 0,23	480
94	Cassiopea. .	6	1 29 58	57 20 22,80	22,64	22,72	10 10	1,28	18,53			482
95	υ Perseo . . .	4.3	1 30 20	47 59 38,94	39,25	39,10	11 10	1,33	18,40	— 0,15		487
96	χ Andromeda.	5.6	1 31 52	43 44 58,07	—	58,07	15 —	1,29	18,47		+ 0,99	492
97	Andromeda.	6	1 33 9	42 39 50,39	—	50,39	16 —	1,40	18,42		— 3,83	501
98	τ Andromeda.	5	1 33 12	39 56 34,87	—	34,87	16 —	1,82	18,33	— 0,96	+ 4,09	502
99	Andromeda.	6	1 34 10	41 59 7,53	—	7,53	16 —	1,30	18,33	— 0,87	— 5,13	510
100	Andromeda.	6	1 34 50	34 36 50,09	50,06	50,08	10 9	1,30	18,31	+ 0,26	— 1,45	516
101	44 Cassiopea .	6	1 34 53	59 55 11,30	11,01	11,15	10 11	1,30	18,33	— 0,89	+ 0,42	515
102	φ Perseo . . .	4	1 35 50	50 3 28,77	28,82	28,79	21 10	1,35	18,30	— 0,63		522
103	Andromeda.	6.7	1 40 8	45 36 20,87	—	20,87	16 —	1,29	18,06		+ 2,61	540
104	Andromeda.	6	1 41 16	37 19 46,40	46,49	46,45	10 10	1,27	18,14	— 0,36	— 2,53	544
105	Andromeda.	6	1 41 41	47 16 24,09	23,69	23,89	10 10	1,35	18,11		— 9,65	547

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875.0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
106	Perseo . . .	6.7	1 42 57	51 19 56,29	56,20	56,25	11	11	1,30	18,00		— 3,81	555
107	1 Ariete . . .	6	1 43 14	21 39 1?,44	12,26	12,35	9	9	1,33	18,15		— 9,60	556
108	1 Perseo . . .	6	1 43 47	54 31 39,27	39,46	39,37	10	10	1,36	17,99		+ 2,47	558
109	*g* Perseo . . .	6	1 44 13	50 10 25,76	26,21	25,98	10	10	1,34	17,95		+ 3,54	560
110	ε Cassiopea .	3.4	1 45 25	63 3 11,86	11,82	11,84	13	10	1,88	17,95	+ 0,04		564
111	55 Andromeda.	6	1 45 48	40 6 41,61	—	41,61	17	—	1,93	17,90		+ 4,07	566
112	α Triangolo. .	4.3	1 45 58	28 58 8,10	7,92	8,01	10	10	0,97	17,73	— 0,43		569
113	Andromeda.	6	1 47 35	36 30 47,75	47,96	47,85	11	10	1,46	17,83		+ 0,52	576
114	β Ariete. . . .	3.2	1 47 44	20 11 46,03	46,34	46,18	22	12	0,42	17,78	+ 0,01		577
115	Andromeda.	5	1 48 31	36 39 49,12	49,41	49,26	10	10	1,45	17,86	— 0,82	— 1,32	579
116	56 Andromeda.	5	1 48 44	36 38 14,69	15,04	14,86	11	11	1,84	17,88	— 1,43	— 2,62	580
117	7 Ariete . . .	6	1 48 53	22 57 48,86	48,64	48,75	8	10	1,27	17,87		— 3,45	581
118	Andromeda.	6	1 50 10	46 29 2,99	3,09	3,04	10	10	1,33	17,82		— 2,49	587
119	λ Ariete . . .	5	1 50 58	22 59 7,80	8,02	7,91	12	10	1,36	17,75	+ 0.69	— 1,54	593
120	Ariete . . .	6.7	1 52 39	20 27 0,77	0,58	0,68	10	11	1,83	17,57		+ 4,03	607
121	4 Perseo . . .	5.6	1 53 59	53 52 55,27	54,98	55,13	11	10	1,80	17,63		— 1,93	614
122	ε Triangolo. .	5.6	1 55 40	32 40 50,51	50,23	50,37	10	10	1,33	17,56	— 0,30	— 1,47	624
123	γ Andromeda.	2.3	1 56 14	41 43 43,27	—	43,27	38	—	0,44	17,48	— 1,38		628
124	ϰ Ariete . . .	6.5	1 59 34	22 3 3,35	3,22	3,29	10	10	1,39	17,43	— 2,29	— 9,51	644
125	Ariete . . .	6.7	1 59 37	25 13 58,32	58,46	58,39	9	12	1,90	17,39		+ 2,10	645
126	11 Ariete . . .	6.7	1 59 44	25 6 23,25	23,24	23,25	10	10	0,37	17,34		+ 2,00	647
127	Perseo . . .	5.6	1 59 58	57 49 39,46	39,10	39,28	9	10	1,33	17,37		+ 0,71	646
128	α Ariete . . .	2	2 0 8	22 52 13,14	13,32	13,23	23	15	0,31	17,22	— 0,22		648
129	58 Andromeda.	5.6	2 0 57	37 15 53,95	53,89	53,92	7	10	1,49	17,30		— 3,27	649
130	β Triangolo .	3	2 2 7	34 23 41,75	42,07	41,91	10	10	0,97	17,24	— 0,45		656
131	14 Ariete . . .	5	2 2 18	25 20 50,45	50,32	50,38	11	10	1,50	17,19		+ 4,61	657
132	*h* Perseo . . .	6	2 2 47	57 3 14,53	14,53	14,53	10	10	1.33	17,32		— 3,48	658
133	59 Andromeda.	6	2 3 18	38 26 54,17	—	54,17	18	—	1,93	17,21		— 1,09	661
134	6 Triangolo .	6	2 5 7	29 42 57,06	57,01	57,03	11	10	1.37	17,10	— 1,96	— 1.86	675
135	6 Perseo . . .	6.5	2 5 18	50 29 1,51	1,30	1,41	10	10	1,33	16,95	— 0,80		673
136	*b* Andromeda.	5.6	2 5 23	43 38 38,14	—	38.14	16	—	1,96	17,09		+ 1,21	676
137	Ariete . . .	6.7	2 5 34	23 34 46,10	45,97	46,03	12	10	1,87	17,14		— 3.08	679
138	η Ariete . . .	5.6	2 5 48	20 37 21,63	21,17	21,40	11	10	1,86	17,11		+ 1,84	682
139	7 Triangolo .	5	2 8 33	32 46 35,70	35,62	35.66	11	10	1,30	16,97	— 0,71	— 1,90	691
140	8 Perseo . . .	6	2 9 10	57 19 6,67	6,60	6,63	10	11	1,31	16,93		+ 1,38	695

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Nnm. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse					
			h m s	° ′ ″	″	″				+			
141	δ Triangolo. .	6.5	2 9 24	33 39	2,35	2,76	2,56	10	11	1,47	16,71	— 1,17	— 2,09	697
142	γ Triangolo. .	4.5	2 9 53	33 16	4,17	4,13	4,15	10	10	0,94	16,88			698
143	c Andromeda.	5.6	2 11 13	46 48	7,02	7,11	7,07	11	10	1,94	16,93		+ 0,51	706
144	Andromeda.	6	2 11 14	48 22	29,12	29,10	29,11	10	10	1,45	16,84		— 0,44	705
145	Andromeda.	6	2 12 37	46 44	6,97	6,71	6,84	12	13	1,91	16,81		— 1,76	714
146	63 Andromeda.	6	2 12 42	49 34	37,13	36,80	36,96	10	11	1,35	16,73		+ 2,68	715
147	i Perseo . . .	6.5	2 13 39	55 16	19,37	19,63	19,50	10	10	1,34	16,74		— 0,58	721
148	Andromeda.	6	2 15 4	40 49	40,83	—	40,83	16	—	1,79	16.59	— 0,19	— 1,04	727
149	64 Andromeda.	6	2 16 7	49 26	17,69	17,57	17,63	9	11	0,91	16,57		+ 1,68	731
150	65 Andromeda.	5	2 17 18	49 42	41,81	41,80	41,80	10	10	1,26	16,50		+ 4,20	735
151	12 Triangolo .	6.5	2 20 51	29 6	36,08	35,80	35,94	10	10	0,91	16.31	— 1,00	— 0,95	757
152	Perseo . . .	6	2 22 12	38 34	41,67	—	41,67	16	—	1,28	16,32		— 1,26	761
153	14 Triangolo. .	6	2 24 28	35 35	29,43	29,63	29,53	12	10	1,30	16.18	— 0,12	+ 3,80	772
154	15 Triangolo .	6.5	2 28 12	34 8	25,32	25,62	25,47	12	9	0,92	15,97	— 2,44	— 2,18	786
155	30 Ariete . . .	6	2 29 45	24 6	5,37	5,23	5,30	10	10	1,40	15,95	— 2,03	— 5.11	796
156	Perseo . . .	6	2 31 40	52 15	49,76	49,93	49,85	9	10	0,91	15,84		— 1,76	806
157	ν Ariete . . .	6.5	2 31 43	21 25	10,11	9,96	10,03	10	10	0,96	15,80	— 1,26		808
158	33 Ariete . . .	6.5	2 33 23	26 31	22,45	22,12	22,28	10	10	1,30	15,74		— 5,44	813
159	Perseo . . .	6.7	2 34 11	52 59	28,94	28,78	28,86	10	11	0,92	15.69		— 1,67	819
160	12 Perseo . . .	5	2 34 22	39 39	49,67	—	49,67	16	—	1,83	15.51		— 2,57	821
161	θ Perseo . . .	4	2 35 40	48 41	53,44	53,75	53.60	10	10	0,99	15.56	— 0,58		827
162	14 Perseo . . .	6	2 35 57	43 45	50,90	—	50.90	16	—	1,87	15.56		+ 1,45	829
163	35 Ariete . . .	5	2 36 7	27 10	26,50	26,08	26,29	11	10	1,24	15.56	+ 0,54	— 3,02	831
164	39 Ariete . . .	5	2 40 28	28 43	35,90	33,89	33,90	10	10	1,38	15,23	— 2,19		861
165	η Perseo . . .	4.3	2 41 35	55 22	29,84	29,70	29,77	10	10	0,98	15,27	— 0,71		863
166	41 Ariete. . . .	4.3	2 42 38	26 44	38,57	38,57	38,57	10	11	0,40	15.09	+ 0,70		872
167	16 Perseo . . .	5.4	2 42 41	37 48	8, 15	8,09	8.12	9	11	1,83	15,13	— 1,28	— 1,96	871
168	17 Perseo . . .	5	2 43 49	34 32	38,83	38,49	38,66	10	8	1.34	15,03	— 0.56	+ 5,25	877
169	Perseo . . .	6	2 44 0	52 28	53,57	53,72	53,65	9	10	1,25	15,14		— 1,91	875
170	τ Perseo . . .	4	2 45 24	52 14	56,76	57,06	56,91	9	11	1,32	15,03	— 0,44		885
171	Perseo . . .	6	2 48 7	46 39	20.38	20,52	20,45	11	10	1,43	14.89		+ 0.51	897
172	21 Perseo . . .	5	2 49 42	31 25	44,66	44,75	44,70	10	9	1,22	14,82	— 1,10	— 6,45	904
173	π Perseo . . .	5	2 50 46	39 9	38,69	—	38,69	18	—	1,92	14,71		— 1,14	912
174	47 Ariete . . .	6	2 50 56	20 9	56,11	56,36	56,24	10	10	1,72	14 69		+ 2,93	913
175	24 Perseo . . .	5.6	2 51 19	34 40	50,34	50,00	50,17	11	10	1,58	14,64		+ 5,96	915

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°,

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″		″				+			
176	Perseo . . .	6	2 51 21	46 43 6,03	6,15	6,09	11	10	1,58	14,71		+ 1,08	914
177	Perseo . . .	6.7	2 51 35	40 32 13,07	—	13,07	16	—	2,02	14,70		+ 11,00	916
178	Perseo . . .	5	2 51 58	51 51 10,58	10,25	10,42	11	12	0,93	14,72		— 3,58	918
179	ε Ariete . . .	4.5	2 52 4	20 50 20,63	20,07	20,35	9	10	1,38	14,75	— 0,86		921
180	49 Ariete . . .	6	2 54 32	25 57 57,33	57,24	57,29	11	11	1,30	14,50	— 1,23	— 1,06	941
181	γ Perseo . . .	3	2 55 45	53 0 53,75	54.08	53,92	10	12	0,58	14,42	— 0,86	+ 0,55	947
182	Perseo . . .	5	2 56 9	56 12 46,64	46,56	46.60	9	10	1,34	14 50			948
183	ρ Perseo . . .	4,3	2 57 10	38 21 15,41	—	15,41	16	—	1,32	14,25	— 0,13		953
184	β Perseo . . .	var.	3 0 2	40 28 20,33	—	20,33	17	—	0,31	14,18	— 0,90		963
185	ι Perseo . . .	4	3 0 3	49 8 1,37	1,34	1,35	10	10	0,91	14,13			962
186	κ Perseo . . .	4.5	3 1 4	44 22 54,70	—	54,70	17	—	1,90	13,99		— 2,67	967
187	55 Ariete . . .	6	3 2 6	28 35 52,66	52,27	52, 47	10	9	1,42	14,07	— 0,63	— 5,47	974
188	Ariete . . .	6.7	3 3 2	26 24 58,73	58,50	58,62	10	10	0,97	13,99		— 2,88	980
189	ω Perseo . . .	5	3 3 13	39 8 5,14	—	5,14	17	—	1,48	14,00	— 1,42	— 1,82	981
190	Perseo . . .	6	3 3 54	41 54 6,12	—	6,12	15	—	1,32	13,94		— 2,20	983
191	56 Ariete . . .	6	3 4 47	26 47 2,66	2,48	2,57	10	11	0,92	13,90		— 4,32	989
192	Perseo . . .	6.7	3 6 39	42 2 5,32	—	5,32	17	—	1,39	13,79		— 1,83	993
193	Perseo . . .	5	3 7 16	50 28 19,07	19,03	19,05	10	11	0,93	13,73		— 0,25	995
194	ζ Ariete . . .	4.5	3 7 43	20 34 47,15	46,91	47,05	10	11	1,37	13,64	— 0,32	— 1,28	999
195	30 Perseo . . .	6	3 9 23	43 33 49,90	—	49,90	17	—	1,58	13,55		— 0,27	1006
196	Perseo . . .	6.7	3 9 40	38 49 19,84	—	19,84	16	—	1,96	13,57	— 0,34	— 0,02	1008
197	29 Perseo . . .	6	3 9 44	49 45 44,88	44,76	44,82	11	10	1,38	13,51	+ 0,22	+ 3,92	1007
198	31 Perseo . . .	5.6	3 10 14	49 38 10,54	10,24	10,39	10	10	1,39	13,50	— 0,56	+ 1,65	1011
199	Perseo . . .	5	3 10 55	33 45 49,79	49,49	49,64	9	11	0,94	13,42	— 0,46	+ 2,39	1017
200	59 Ariete . . .	6	3 12 28	26 37 3,45	3,35	3,40	11	10	1,90	13,37		— 6,45	1023
201	Ariete . . .	5	3 12 47	28 35 36,12	36,38	36,25	10	10	1,46	13,31		— 0,57	1025
202	Perseo . . .	6	3 13 0	48 37 10 96	10,93	10,95	12	10	1,41	13,23		+ 1,57	1024
203	60 Ariete . . .	6.7	3 13 0	25 12 38,80	38,63	38,72	9	9	1,94	13,22		+ 4,32	1029
204	l Perseo . . .	5.6	3 14 4	42 52 31,79	—	31,79	15	—	2,03	13,35		— 1,81	1026
205	Perseo . . .	6.7	3 14 22	48 45 49,57	49,53	49,55	10	10	1,39	13,21		+ 1.68	1035
206	62 Ariete . . .	6	3 14 42	27 9 23,57	23,53	23,55	10	10	1,45	13,24		— 4,32	1040
207	α Perseo . . .	2	3 15 24	49 24 51,36	51,70	51,53	28	10	0,37	13,13	— 0,59		1043
208	64 Ariete . . .	6	3 16 56	24 16 46,41	46,57	46,49	10	10	1,31	13,03	— 0,80	+ 1,06	1052
209	2 H Giraffa . . .	5.4	3 18 57	59 30 7,84	8,29	8,07	10	10	1,07	12,97			1058
210	Perseo . . .	6	3 19 10	48 37 29,47	29,21	29,34	9	11	1,33	12,88		+ 3,90	1059

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875.0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B.A.C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″	″	″				+			
211	Perseo . . .	6.7	3 19 55	49 24 44,12	43,67	43,90	9	10	1,90	12,81		+ 2,92	1063
212	Giraffa . . .	5	3 19 57	58 26 34,71	34,89	34,80	11	10	1,45	12,93	— 0,69	— 0,77	1062
213	34 Perseo. . . .	5	3 20 26	49 4 25,39	25,20	25,30	10	10	1,50	12,80		+ 0,18	1066
214	Giraffa . . .	5	3 20 29	55 1 2,55	2,76	2,65	10	10	1,99	12,74	+ 0,89	+ 7,46	1065
215	66 Ariete . . .	6	3 21 8	22 22 18,11	18,12	18,12	10	10	1,29	12,72	+ 0,19	— 4,05	1069
216	σ Perseo. . . .	5	3 21 46	47 33 41,86	41,73	41,80	9	9	1,54	12,77			1071
217	Perseo . . .	6	3 21 48	47 40 17,60	17,40	17,50	10	10	1,96	12,72		— 0,05	1072
218	Perseo . . .	6	3 22 44	47 25 57,09	57,23	57,16	9	10	1,99	12,65		— 0,84	1078
219	Perseo . . .	6	3 23 19	47 35 42,47	42,19	42,33	11	15	1,55	12,68		— 3,39	1081
220	36 Perseo . . .	6	3 23 47	45 37 51,50	—	51,50	16	—	1,55	12,55		— 0,40	1083
221	Perseo . . .	6	3 24 30	47 31 28,69	28,60	28,65	7	8	1,91	12,59		— 1,93	1089
222	7 Toro	6	3 27 2	24 2 36,02	35,93	35,98	10	10	1,39	12,38	— 0,24	— 1,96	1095
223	ψ Perseo . . .	5	3 27 37	47 46 28,66	28,31	28,49	10	11	1,45	12,33		— 0,56	1099
224	Perseo . . .	6.5	3 27 51	31 15 37,73	37,44	37,59	12	9	1,43	12,35		— 3,38	1101
225	Perseo . . .	6.7	3 29 33	42 10 8,21	—	8,21	21	—	0,94	12,24		— 2,94	1105
226	9 Toro	6	3 29 37	22 47 44,56	44,72	44,64	11	11	1,46	12,20	— 0,50	— 0,81	1107
227	716 Groomb. . .	6	3 31 20	62 48 32,23	32,34	32,29	12	11	2,20	12,17	— 0,39		1111
228	Giraffa . . .	6	3 32 25	59 33 50,30	50,46	50,38	10	10	1,34	11,93		+ 6,01	1117
229	Perseo . . .	6	3 33 2	37 10 27,96	27,73	27,85	12	11	1,42	12,07	— 1,22	— 7,95	1123
230	11 Toro	6	3 33 18	24 55 23,85	23,45	23,65	12	9	1,40	11,93	— 0,71	+ 3,50	1126
231	δ Perseo . . .	3	3 34 2	47 23 8,59	8,59	8,59	23	10	0,39	11,87	— 0,34		1129
232	40 Perseo . . .	5	3 34 27	33 33 43,55	43,33	43,44	11	10	1,46	11,90		— 1,53	1132
233	o Perseo . . .	4	3 36 29	31 53 25,81	25,48	25,65	12	11	1,35	11,74	— 0,19		1138
234	ν Perseo . . .	4	3 36 42	42 10 53,16	—	53,16	28	—	0,37	11,72	— 0,92		1139
235	Perseo . . .	6	3 37 14	45 17 26,05	—	26,05	16	—	1,54	11,70		— 1,53	1142
236	16 Toro	6.7	3 37 22	23 53 40,97	41,03	41,00	9	7	1,89	11,64		— 0,35	1146
237	17 Toro	4	3 37 27	23 43 6,75	6,64	6,70	11	11	1,55	11,64	— 0,71		1147
238	19 Toro	5	3 37 46	24 4 23,25	23,58	23,42	7	11	1,95	11,65		— 3,42	1151
239	20 Toro	5	3 38 23	23 58 32,41	32,37	32,39	11	10	1,94	11,58		+ 0,11	1154
240	23 Toro	5	3 38 54	23 33 26,56	26,85	26,70	11	9	1,90	11,55	+ 0,78	— 1,39	1161
241	η Toro	3	3 40 3	23 43 0,76	0,39	0,58	24	12	0,38	11,45	— 0,50		1166
242	Perseo . . .	6	3 41 22	44 35 2,28	—	2,28	17	—	1,45	11,41		— 2,12	1172
243	n Perseo . . .	6.5	3 41 39	32 42 22,59	22,53	22,56	11	9	1,96	11,38		— 0,69	1175
244	27 Toro	4	3 41 44	23 40 9,52	9,82	9,67	10	11	1,37	11,33	— 0,50		1176
245	28 Toro	5.6	3 41 45	23 45 11,16	11,45	11,45	8	9	1,86	11,33	+ 0,16	— 1,92	1177

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni		Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″	″	″				+			
246	Toro	6	3 42 48	25 12 0,67	0,54	0,60	10	11	1,47	11,05		+ 8,75	1192
247	ζ Perseo . . .	3	3 46 17	31 30 37,44	37,48	37,46	11	10	1,33	11,02	— 0,75		1207
248	9 H Giraffa . .	6	3 46 30	60 44 23,89	23,86	23,88	9	10	1,33	11,03	— 1,19		1204
249	Perseo . . .	6.5	3 46 58	47 30 7,03	6,66	6,85	11	10	1,51	11,00	— 1,20	— 2,68	1210
250	43 Perseo A . .	5.6	3 47 19	50 19 51,66	51,74	51,70	12	10	1,47	10,82		— 2,42	1214
251	ε Perseo . . .	3.4	3 49 28	39 38 47,54	—	47,54	17	—	0,60	10,79	— 1,02		1219
252	32 Toro	6	3 49 29	22 6 57,67	57,36	57,52	11	10	1,90	10,67	— 0,14	— 2,62	1221
253	33 Toro	6.7	3 49 39	22 48 38,78	38,53	38,66	13	11	1,57	10,79	— 0,49	— 1,59	1223
254	ξ Perseo . . .	4	3 50 51	35 25 47,35	47,02	47,18	12	10	1,36	10,69	+ 0,16		1228
255	Giraffa . . .	6.5	3 54 2	58 48 20,43	20,43	20,43	13	10	0,96	10,47		+ 1,04	1237
256	Perseo . . .	6.7	3 57 3	46 35 0,78	0,80	0,79	9	10	1,43	10,27		— 4,44	1252
257	λ Perseo . . .	4.5	3 57 16	50 0 34,70	34,83	34,76	11	11	0,96	10,17	— 0,66	+ 1,24	1254
258	Giraffa . . .	6.7	3 58 52	59 34 16,28	16,43	16,36	10	10	1,56	10,11		— 0,22	1261
259	41 Toro	6.5	3 58 56	27 15 39,42	39,16	39,29	10	10	1,44	10,09		— 5,08	1262
260	ψ Toro	6	3 59 17	28 39 40,21	40,56	40,39	10	10	1,44	10,10	— 0,66	— 2,16	1265
261	c Perseo . . .	4	3 59 36	47 22 34,93	35,00	34,96	10	10	0,96	10,01			1266
262	49 Perseo . . .	6.7	4 0 0	37 23 48,99	49,16	49,08	10	10	1,94	9,89		— 3,72	1268
263	50 Perseo . . .	6	4 0 17	37 42 37,22	37,21	37,22	10	11	1,54	9,81	— 0,77	— 0,07	1269
264	p Toro	6	4 3 13	26 9 9,07	8,87	8,97	10	10	0,96	9,79	— 1,18	— 4,78	1279
265	Perseo . . .	6	4 4 27	48 46 13,36	13,01	13,19	10	10	0,96	9,69		— 2,11	1282
266	μ Perseo . . .	4.5	4 5 43	48 5 21,60	21,23	21,42	11	11	1,36	9,53		+ 1,41	1287
267	Giraffa . . .	6	4 5 53	61 31 58,58	58,36	58,47	11	10	1,54	9,57	— 1,15	— 1,65	1286
268	f Perseo . . .	5	4 6 23	40 9 52,79	—	52,79	17	—	1,95	9,47	— 1,90	+ 3,21	1291
269	Giraffa . . .	6.7	4 6 47	57 32 44,24	44,16	44,20	11	10	1,55	9,51		— 2,39	1292
270	Giraffa . . .	5	4 6 58	53 17 43,38	43,78	43,58	10	9	1,94	9,43		+ 2,53	1293
271	b' Perseo . . .	5	4 8 51	49 59 7,97	7,75	7,86	10	10	1,35	9,30		+ 0,65	1301
272	Perseo . . .	6	4 9 29	41 49 53,31	—	53,31	16	—	0,98	9,30	+ 0,07	— 1,28	1305
273	Perseo . . .	6.5	4 9 50	49 44 29,29	29,14	29,22	10	9	1,94	9,28		— 3,68	1307
274	b² Perseo . . .	6.5	4 10 43	50 36 51,87	52,07	51,97	10	10	1,46	9,20		+ 0,14	1314
275	Giraffa . . .	6.5	4 10 56	60 26 6,43	6,74	6,59	10	10	2,00	9,12	— 1,30	— 3,18	1313
276	Perseo . . .	6.7	4 11 36	41 30 13,28	—	13,28	16	—	2,07	9,18	— 1,32	— 4,40	1320
277	Giraffa . . .	6	4 11 42	56 12 10,29	10,44	10,37	10	10	1,05	9,13		— 1,43	1318
278	54 Perseo . . .	6	4 12 18	34 15 45,53	46,04	45,79	10	10	0,60	9,06	— 0,82		1322
279	d Perseo . . .	5	4 12 31	46 11 51,46	51,57	51,52	11	10	1,41	9,02		— 1,23	1323
280	φ Toro	5.6	4 12 40	27 2 59,90	59,75	59,83	10	10	1,40	9,01	— 0,36	— 2,63	1326

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni diretto	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. diretto	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″		″				″	″	″	
281	Perseo . . .	6.7	4 14 54	42 8 57,40	—	57,40	16	—	1,56	8,90		— 3,71	1339
282	χ' Toro	6.5	4 14 59	25 19 56,19	55,86	56,02	10	10	1,37	8,83	— 1,06	+ 0,85	1341
283	55 Perseo . . .	6	4 16 22	33 50 20,89	20,70	20,80	11	10	1,39	8,71	— 0,07	+ 1,18	1349
284	56 Perseo . . .	6.7	4 16 31	33 40 10,90	11,05	10,97	11	10	1,93	8,67	— 0,34	+ 1,05	1352
285	Toro	6	4 18 9	31 9 16,08	16,24	16,16	10	10	1,38	8,51		— 1,34	1364
286	υ^1 Toro	5.4	4 18 50	22 31 40,97	40,93	40,95	11	11	1,36	8,54	— 1,22	— 2,88	1367
287	υ^2 Toro	6	4 19 49	22 42 44,96	44,84	44,90	8	9	1,36	8,50	+ 0,56	— 3,33	1371
288	1 Giraffa seg.	6	4 22 8	53 38 11,69	11,48	11,59	12	9	0,96	8,07			1382
289	Perseo . . .	6.7	4 24 37	42 45 51,83	—	51,83	14	—	1,54	8,07		— 3,88	1397
290	m Perseo . . .	6	4 24 37	42 47 40,59	—	40,59	24	—	0,99	8,11	— 0,30	— 0,42	1398
291	e Perseo . . .	5	4 28 2	41 0 19,94	—	19,94	21	—	0,97	7,82	— 0,56	— 1,33	1414
292	2 Giraffa . . .	6	4 30 4	53 13 26,49	26,25	26,37	13	10	1,39	7,58		— 1,15	1424
293	3 Giraffa . . .	6	4 30 4	52 49 40,37	40,35	40,36	13	11	1,36	7,64	+ 0,43	+ 1,33	1425
294	Toro	6.5	4 33 30	28 22 13,48	13,57	13,53	9	10	0,99	7,35	— 1,34	— 1,19	1444
295	59 Perseo . . .	6	4 34 2	43 7 27,04	—	27,04	16	—	1,39	7,28		— 1,27	1415
296	τ Toro	4.5	4 34 45	22 42 54,75	54,72	54,73	12	10	1,07	7,26	+ 0,10		1449
297	Auriga . . .	6.7	4 35 44	32 37 41,84	41,54	41,69	11	10	1,39	7,21		— 2,27	1452
298	4 Giraffa . . .	6	4 37 36	56 31 56,07	56,26	56,17	10	10	0,97	6,90	— 0,89		1456
299	Giraffa . . .	6	4 37 52	55 22 35,20	35,46	35,33	10	10	1,39	6,96		— 3,54	1459
300	Auriga . . .	6	4 41 14	32 21 59,30	59,39	59,35	10	10	0,97	6,76		— 1,55	1475
301	1 Auriga . . .	6	4 41 30	37 15 54,58	54,53	54,56	10	10	1,59	6,79	— 0,47	— 2,97	1476
302	Perseo . . .	6	4 41 46	48 31 21,03	20,84	20,94	11	10	1,40	6,72		— 2,79	1477
303	2 Auriga . . .	5	4 44 16	36 29 22,92	22,74	22,83	10	11	0,97	6,52	— 0,13	— 2,85	1492
304	5 Giraffa . . .	6	4 44 50	55 3 0,70	0,71	0,70	10	10	0,84	6,36		+ 10,10	1494
305	6 Giraffa . . .	6	4 46 31	55 37 14,62	14,43	14,53	10	10	1,44	6,30		+ 1,01	1501
306	7 Giraffa . . .	5	4 47 16	53 32 57,33	57,08	57,21	10	9	1,37	6,26	— 0,12	+ 0,18	1504
307	ι Auriga . . .	3	4 48 51	32 57 57,54	57,43	57,48	39	11	0,56	6,11	— 0,57		1520
308	8 Giraffa . . .	6.7	4 49 49	52 57 37,61	37,40	37,50	10	10	1,47	5,99		+ 1,61	1524
309	99 Toro	6	4 50 14	23 45 4,54	4,57	4,56	11	10	1,99	5,98		— 0,91	1527
310	k Toro	6.5	4 50 30	24 51 18,45	18,26	18,36	10	10	1,60	5,90	— 0,74	+ 2,70	1528
311	4 Auriga . . .	6	4 50 46	37 41 56,07	56,34	56,20	11	10	1,61	5,88		— 1,74	1530
312	5 Auriga . . .	6.7	4 51 43	39 12 9,31	—	9,31	16	—	1,45	5,89		— 0,25	1534
313	β Giraffa . . .	4	4 52 18	60 15 23,00	22,62	22,81	27	10	0,24	5,83	— 0,44		1536
314	ε Auriga . . .	3.4	4 53 0	43 38 9,39	—	9,39	16	—	1,47	5,78	— 0,42		1540
315	ζ Auriga . . .	4	4 53 45	40 53 27,52	—	27,52	16	—	0,98	5,71	— 0,38		1541

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse					
			h m s							+			
316	11 Giraffa . . .	5	4 55 17	58° 47′ 41″,66	41″,38	41″,52	12	9	1,31	5″,58	— 1″,89	— 0″,72	1546
317	12 Giraffa . . .	6	4 55 20	58 50 40,39	40,29	40,34	10	11	1,98	5,56	+ 0,84	— 0,30	1547
318	ι Toro	5	4 55 38	21 24 33,32	33,05	33,19	11	11	1,38	5,52	— 0,43		1551
319	9 Auriga . . .	5	4 56 53	51 25 43,44	43,40	43,42	11	7	1,37	5,31		— 3,58	1554
320	η Auriga . . .	4.3	4 57 45	41 3 47,63	—	47,63	15	—	0,99	5,33	+ 0,39		1558
321	103 Toro	6	5 0 30	24 5 52,35	52,21	52,28	10	11	1,48	5,20	— 0,18	— 5,07	1572
322	Auriga . . .	6	5 1 24	46 48 18,13	17,81	17,97	10	10	1,00	4,97		— 4,32	1582
323	μ Auriga . . .	6.5	5 4 53	38 20 2,12	—	2,12	20	—	0,65	4,71	— 0,68		1602
324	12 Auriga . . .	6	5 7 12	46 16 15,07	15,03	15,05	10	10	1,43	4,55	— 0,15	+ 0,16	1609
325	14 Auriga . . .	5.6	5 7 16	32 32 26,06	25,91	25,98	10	10	0,99	4,59	— 1,58	— 1,34	1614
326	α Auriga . . .	1	5 7 27	45 52 5,92	—	5,92	35	—	0,40	4,13	+ 0,29		1613
327	16 Auriga . . .	5	5 9 58	33 14 18,13	18,19	18,16	10	10	0,99	4,19		— 2,55	1627
328	λ Auriga . . .	5	5 10 21	39 59 7,47	—	7,47	16	—	1,38	3,79	+ 0,64		1631
329	n Toro	6	5 11 46	21 57 53,46	53,49	53,48	11	10	1,01	4,24	— 0,13	— 6,67	1637
330	19 Auriga . . .	5.6	5 11 47	33 49 30,62	30,64	30,63	10	10	1,63	4,18	+ 0,05	+ 1,49	1636
331	16 Giraffa . . .	6.5	5 12 45	57 25 10,64	10,81	10,73	10	10	1,44	4,06		— 1,99	1642
332	ρ Auriga . . .	6.5	5 12 58	41 40 37,90	—	37,90	16	—	1,60	4,06	+ 0,29	— 1,87	1645
333	σ Auriga . . .	6	5 16 9	37 15 57,37	57,32	57,35	10	10	1,37	3,81	— 1,11	— 1,93	1663
334	17 Giraffa . . .	6	5 18 22	62 57 33,17	33,23	33,20	8	11	1,60	3,61			1676
335	β Toro	2	5 18 23	28 29 58,76	58,85	58,81	18	11	0,43	3,43	— 0,30		1681
336	Auriga . . .	6	5 18 32	34 16 45,40	45,69	45,55	12	10	1,48	3,63	— 1,16	+ 0,28	1683
337	φ Auriga . . .	5.6	5 19 22	34 22 1,29	1,36	1,32	9	11	1,99	3,49	— 0,11	+ 0,25	1690
338	o Toro	6	5 20 8	21 49 40,35	40,63	40,49	11	12	1,59	3,50	+ 0,30	— 4,35	1695
339	18 Giraffa . . .	6.7	5 21 51	57 7 46,11	46,42	46,27	10	11	1,02	3,15	— 0,83	— 4,29	1705
340	χ Auriga . . .	5	5 24 36	32 5 49,86	49,89	49,88	10	11	0,99	3,13	— 0,23	— 4,02	1723
341	Auriga . . .	6	5 26 49	47 37 47,33	47,15	47,24	10	11	1,00	2,90		— 1,62	1736
342	121 Toro	6	5 27 49	23 57 14,70	14,43	14,57	11	10	1.43	2,79	— 1,36	— 2,08	1742
343	22 Giraffa . . .	6	5 28 32	56 17 7,35	7,41	7,38	9	12	1,50	2,63		— 2,89	1744
344	ζ Toro	3.4	5 30 11	21 3 50,66	50,95	50,81	9	10	1,61	2,58	— 0,34		1767
345	26 Auriga . . .	6	5 30 36	30 24 55,46	55,62	55,54	10	10	1,50	2,55	— 2,40	— 0,77	1768
346	Auriga . . .	6.7	5 31 12	53 25 37,37	37,28	37,33	10	10	1,50	2,52	— 1,36	— 37,57	1769
347	Auriga . . .	6.7	5 31 21	29 8 24,92	24,89	24,91	11	10	1,62	2,50	— 2,42	— 3,97	1772
348	125 Toro	6	5 31 59	25 49 29,06	28,80	28,93	10	10	1,47	2,44	— 1,02	— 1,74	1778
349	24 Giraffa . . .	6.7	5 32 25	56 30 46,44	46,43	46,44	10	11	2,04	2,41		— 0,02	1776
350	23 Giraffa . . .	6	5 32 38	61 24 39,29	39,56	39,43	10	10	1,62	2,42	— 0,78	— 2,98	1777

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B.A.C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse			1872		
			h m s	° ′ ″	″	″				+			
351	26 Giraffa . . .	5.6	5 35 58	56 3 38,68	38,36	38,52	11	12	1,43	2,07		— 2,34	1797
352	o Auriga . . .	6.5	5 36 13	49 46 7,65	7,80	7,72	12	9	1,55	2,05	+ 0,48		1804
353	29 Giraffa . . .	5.6	5 39 54	56 52 27,53	27,48	27,50	10	10	1,02	1,76		— 0,98	1818
354	τ Auriga . . .	5	5 40 31	39 8 8,57	—	8,57	17	—	1,63	1,64		+ 1,51	1830
355	Auriga . . .	6.7	5 40 59	51 28 23,84	23,68	23,76	10	10	1,54	1,66		— 3,14	1832
356	30 Giraffa . . .	6	5 41 16	58 55 28,91	28,80	28,86	10	10	1,59	1,69	— 1,21	— 3,34	1833
357	132 Toro	5.6	5 41 21	24 31 24,05	23,85	23,95	10	11	1,56	1 62	— 0,83	— 0,93	1837
358	υ Auriga . . .	5	5 42 31	37 16 0,03	0,04	0,03	10	10	1,56	1,50	— 1,81	— 2,07	1844
359	ν Auriga . . .	4	5 42 50	39 6 33,45	—	33,45	15	—	1,63	1,55	— 0,19		1845
360	31 Giraffa . . .	5.6	5 43 46	59 21 23,77	23,69	23,73	10	10	1,48	1,38	— 0,33	+ 1,32	1849
361	ξ Auriga . . .	5	5 44 22	55 40 29,33	29,18	29,26	10	10	1,61	1,34		+ 2,64	1854
362	Auriga . . .	6.7	5 44 24	33 52 56,02	55,80	55, 91	11	10	1,49	1,33	— 1,17	+ 2,26	1857
363	136 Toro	5	5 45 28	27 34 50,13	50,17	50,15	11	10	1,54	1,21	— 0,16	+ 2,11	1863
364	Auriga . . .	6.7	5 46 18	51 46 40,54	40,64	40 ,59	11	10	1,03	1,20		— 0,79	1866
365	δ Auriga . . .	4.5	5 49 14	54 16 19,35	19,37	19,36	10	11	1,02	0,82	— 0,22		1885
366	Auriga . . .	6.7	5 49 20	55 18 26,36	26,53	26,45	11	10	1,12	0,88	— 1,53	— 3,97	1887
367	Auriga . . .	6	5 49 29	54 31 56,81	56,73	56,77	10	11	1,50	0,84		+ 1,92	1888
368	139 Toro	5.6	5 50 14	25 56 9,85	9,55	9,70	10	10	2,02	0,85	— 0,54	— 1,26	1896
369	β Auriga . . .	2	5 50 22	44 55 55,28	—	55,28	16	—	1,08	0,83	— 0,96		1895
370	π Auriga . . .	5	5 50 39	45 55 21,57	21,93	21,75	9	10	2,09	0,80		— 0,62	1897
371	θ Auriga . . .	3	5 51 12	37 12 4,66	4,47	4,57	12	10	1,47	0,66	— 0,69		1900
372	36 Auriga . . .	6	5 51 29	47 53 27,93	27,63	27,78	10	10	1,64	0,69		+ 1,15	1902
373	Auriga . . .	6	5 53 5	49 54 2,81	2,58	2,70	10	10	0,99	0,70		— 10,93	1914
374	141 Toro	6	5 54 9	22 23 42,33	42,58	42,46	10	11	1,11	0,51		— 3,29	1925
375	38 Auriga . . .	6	5 54 17	42 54 45,81	—	45,81	16	—	1,60	0,35	— 0,41	— 1,77	1923
376	Auriga . . .	6.7	5 54 34	51 34 24,26	24,45	24,36	11	10	1,59	0,44		— 1,32	1924
377	39 Auriga . . .	6.7	5 56 4	42 59 18 28	—	18,28	17	—	1,56	0,27	— 1,21	— 4,20	1931
378	1 Gemelli . .	5	5 56 31	23 16 3,94	3,83	3,89	11	11	1,48	0,20	— 0,68	— 0,31	1938
379	40 Auriga . . .	6	5 57 58	38 29 29,10	—	29,10	17	—	1,59	0,18	— 0,10	— 3,54	1942
380	37 Giraffa . . .	6	5 58 57	58 56 54,91	54,52	54,71	10	10	1,04	0,10		+ 1,97	1943
381	41 Auriga . . .	6	6 2 2	48 44 0,33	0,18	0,25	10	11	1,06	— 0,28		+ 0,70	1963
382	3 Gemelli. . .	6.7	6 2 9	23 7 53,06	53,36	53,21	12	10	1,50	0,20	— 1,00	— 1,68	1971
383	5 Gemelli. . .	6	6 3 52	24 26 42,99	42,95	42,97	10	10	1,42	0,42	— 0,66	+ 1,30	1981
384	40 Giraffa . . .	6	6 4 26	60 1 48,61	48 ,73	48,67	12	10	1,47	0,42	— 1,33	— 0,68	1979
385	1 Lince	6	6 6 23	61 33 7,94	7,97	7,96	10	11	1,07	0,57	— 0,62	— 1,17	1992

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″		″				—	″		
386	η Gemelli . .	3.4	6 7 20	22 32 28,88	26,72	26,80	10	11	1,56	0,64	— 1,00		2002
387	$\varkappa$ Auriga . . .	5.4	6 7 25	29 32 29,78	29,94	29,86	12	10	1,12	0,94	— 1,24	+ 0,30	2001
388	42 Auriga . . .	6	6 8 16	46 27 45,40	45,27	45,34	10	10	2,07	0,75	— 0,38	— 0,77	2008
389	2 Lince. . . .	5.4	6 8 36	59 3 10,28	9,98	10,13	10	10	1,12	0,74			2007
390	43 Auriga . . .	6	6 8 57	46 24 22,14	22,54	22,34	9	11	1,66	0,89	+ 0,17	— 3,87	2010
391	3 Lince. . . .	6	6 10 33	61 48 50,21	50,10	50,16	10	10	1,55	1,04	+ 0,77	— 0,21	2019
392	4 Lince. . . .	6	6 10 58	59 25 19,82	19,86	19,84	10	11	1,48	0,98		+ 1,52	2020
393	45 Auriga . . .	6	6 11 36	53 30 21,81	21,98	21,90	9	10	1,53	1,12		+ 1,22	2024
394	ψ^1 Auriga . . .	5	6 15 16	49 20 55,57	55,88	55,73	10	12	1,03	1,35			2044
395	μ Gemelli. . .	3	6 15 24	22 34 31,83	31,64	31,74	17	30	0,15	1,49			2047
396	5 Lince. . . .	6	6 15 54	58 28 56,82	56,70	56,76	10	10	1,97	1,42	+ 0,18	+ 0,70	2045
397	6 Lince. . . .	6	6 19 56	58 15 4,15	4,13	4,14	10	11	1,06	2,10	— 0,46	+ 0,46	2074
398	47 Auriga . . .	6.7	6 20 43	46 45 44,05	44,02	44,03	10	11	1,51	1,84	— 1,14	+ 1,67	2081
399	7 Lince. . . .	6	6 24 9	55 26 29,59	29,60	29,60	9	10	1,07	2,14		+ 1,47	2107
400	9 Lince. . . .	6.7	6 25 29	56 28 52,02	52,37	52,20	10	11	1,01	2,27	— 1,42	— 3,45	2114
401	8 Lince. . . .	6	6 26 16	61 35 15,81	15,82	15,82	10	10	1,08	2,56	— 0,25		2120
402	Auriga . . .	6.5	6 26 57	31 31 43,39	43,41	43,40	10	10	1,55	2,31		— 4,29	2130
403	11 Lince. . . .	6	6 27 1	56 57 17,83	17,69	17,76	10	10	1,13	2,34		— 1,32	2128
404	49 Auriga . . .	6.5	6 27 20	28 7 1,60	1,93	1,77	7	10	2,08	2,41	— 2,20	— 1,17	2133
405	Auriga . . .	6.7	6 27 57	38 32 37,24	—	37,24	16	—	1,04	2,44	— 1,01	— 2,14	2139
406	41 Giraffa . . .	6.7	6 28 57	62 1 37,85	38,08	37,97	8	12	2,07	2,52	— 0,08	— 1,81	2143
407	51 Auriga . . .	6.7	6 30 0	39 29 53,73	—	53,73	18	—	2,18	2,71	— 1,45		2155
408	ψ^3 Auriga . . .	6	6 30 6	40 0 25,09	—	25,09	16	—	2,18	2,68	— 1,56	+ 2,53	2156
409	ψ^2 Auriga . . .	5	6 30 24	42 35 45,72	—	45,72	17	—	1,63	2,70	— 1,73	— 2,99	2159
410	54 Auriga . . .	6	6 31 40	28 22 15,42	15,55	15,48	10	10	1,08	2,81	— 1,24	— 0,46	2170
411	ψ^4 Auriga. . .	5	6 33 59	44 38 31,38	—	31,38	18	—	1,12	3,00		+ 0,55	2182
412	12 Lince. . . .	5	6 35 11	59 33 53,42	53,94	53,68	12	10	1,48	3,09		+ 2,58	2187
413	13 Lince. . . .	6	6 36 11	57 17 44,86	44,64	44,75	11	11	1,49	3,21		— 1,19	2192
414	ε Gemelli. . .	3.4	6 36 14	25 15 9,63	9,54	9,58	10	11	1,02	3,16	— 0,52		2194
415	28 Gemelli. . .	6	6 36 50	29 5 41,55	41,15	41,35	10	13	1,52	3,24	— 1,89	— 0,94	2197
416	ψ^5 Auriga. . .	6	6 37 44	43 41 57,80	—	57,80	16	—	1,13	3,11	— 1,74		2200
417	ψ^6 Auriga . . .	6	6 38 8	48 55 7,11	6,73	6,92	10	10	1,11	3,36		+ 2,08	2201
418	14 Lince. . . .	6	6 42 3	59 35 36,01	36,08	36,05	10	11	1,21	3,70		— 1,51	2220
419	d Gemelli. . .	6	6 44 4	21 54 22,99	23,26	23,13	10	11	1,49	3,85		— 1,86	2233
420	59 Auriga . . .	6.7	6 44 25	39 0 56,61	—	56,51	16	—	1,15	3,89	— 1,22	+ 1,86	2235

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
421	Gemelli. . .	6.7	6 44 25	23 44 50,39	50,79	50,59	10	11	1,09	3,86		— 0,99	2238
422	0 Gemelli. . .	3.4	6 44 33	34 6 34,18	34,24	34,21	10	10	1,06	3,90	— 1,35		2237
423	ψ^8 Auriga. . .	6	6 44 39	38 35 29,12	—	29,12	16	—	2,09	4,04	— 1,12	— 4,19	2239
424	61 Auriga . . .	6	6 45 23	38 39 19,33	—	19,33	17	—	1,63	3,96	— 2,17	— 2,47	2241
425	15 Lince. . . .	5	6 46 26	58 35 0,46	0,29	0,38	10	11	0,66	4,19	— 0,63		2248
426	37 Gemelli. . .	6.7	6 47 37	25 31 47,12	46,85	46,99	11	11	1,50	4,13	— 0,63	+ 0,34	2254
427	ψ^{10} Auriga . . .	5	6 48 30	45 15 12,69	—	12,69	15	—	0,85	4,24		+ 0,35	2261
428	ω^1 Gemelli. . .	6	6 54 48	24 23 29,26	29,43	29,35	9	15	0,73	4,76	— 0,05	+ 0,52	2299
429	Lince. . . .	6	6 54 59	59 58 60,03	59,83	59,93	12	10	1,48	4,79	— 1,26	+ 1,09	2294
430	Lince. . . .	6	6 55 44	52 56 31,91	31,64	31,78	12	12	0,61	4,85		— 3,20	2300
431	Auriga . . .	5.6	6 57 57	34 39 42,49	42,29	42,39	10	10	0,70	5,19		+ 7,99	2314
432	17 Lince. . . .	6	6 58 25	60 59 8,29	8,25	8,27	12	11	1,46	5,10	— 0,54	— 2,09	2312
433	Lince. . . .	6	7 2 24	49 59 29,88	29,83	29,86	10	11	1,06	5,39		— 0,67	2334
434	63 Auriga . . .	5	7 3 3	39 31 19,23	—	19,23	17	—	1,06	5,43	— 0,84		2338
435	τ Gemelli. . .	5.4	7 3 11	30 26 51,99	51,53	51,56	10	10	1,50	5,52	— 1,56	+ 0,59	2340
436	Lince. . . .	5.6	7 3 38	51 38 0,14	59,98	0,06	10	11	1,55	5,50		— 0,52	2341
437	47 Gemelli. . .	6	7 3 38	27 3 35,97	35,86	35,92	10	11	1,17	5,52	— 0,47	— 2,79	2343
438	48 Gemelli. . .	6	7 4 51	24 20 7,52	7,71	7,62	10	11	1,51	5,61	— 0,30	— 2,78	2350
439	18 Lince. . . .	6	7 5 0	59 51 25,13	25,30	25,21	10	10	1,56	5,95		+ 5,13	2349
440	Lince. . . .	6	7 6 33	47 27 32,30	32,50	32,40	10	10	1,53	5,75		— 12,90	2361
441	Lince. . . .	6	7 7 45	52 20 54,92	54,79	54,86	10	10	1,45	5,84		— 5,67	2367
442	53 Gemelli. . .	6.7	7 8 9	28 6 45,50	45,13	45,32	10	10	1,52	5,88	— 0,63	— 0,89	2374
443	Lince. . . .	6	7 9 1	49 41 2,59	2,23	2,41	10	11	1,01	5,95		— 0,34	2379
444	64 Auriga . . .	6	7 9 21	41 6 10,30	—	10,30	16	—	1,06	5,96			2381
445	47 Giraffa . . .	6	7 11 19	60 7 49,00	49,27	49,13	10	10	1,02	6,17	— 0,64	+ 1,58	2397
446	19 Lince seg. .	5	7 12 39	55 30 50,60	50,78	50,69	10	11	1,50	6,31	+ 0,02	— 0,54	2407
447	δ Gemelli. . .	3.4	7 12 39	22 12 37,79	37,60	37,70	14	23	0,31	6,27	— 0,54		2410
448	66 Auriga . . .	6	7 13 42	36 59 35,81	35,77	35,79	9	10	1,01	6,34	— 1,05	— 3,06	2416
449	56 Gemelli. . .	6.5	7 14 34	20 40 39,19	39,36	39,28	11	10	1,05	6,41	— 0,59	— 2,23	2423
450	66 Auriga . . .	6	7 15 29	40 54 38,10	—	38,10	16	—	1,14	6,49	— 1,50	— 1,75	2429
451	A Gemelli. . .	5.6	7 15 51	25 17 19,23	19,37	19,30	11	10	1,50	6,54	— 0,06	— 0,68	2431
452	21 Lince. . . .	5	7 17 17	49 27 24,39	24,14	24,27	12	10	1,48	6,73	— 0,82	+ 1,48	2441
453	ι Gemelli. . .	4	7 17 58	28 2 40,40	40,00	40,20	9	11	0,66	6,78	— 0.36		2442
454	63 Gemelli. . .	6.5	7 20 19	21 41 56,06	56,38	56,20	10	8	1,05	6.96	— 0,85	— 3,57	2460
455	22 Lince. . . .	6	7 20 25	49 55 40,74	40,57	40,65	10	10	1,09	7,01		+ 1,46	2459

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				— ″	″		
456	ρ Gemelli . .	5	7 21 4	32 1 51,37	51,13	51,25	10	10	1,09	6,76	— 0,54		2464
457	b' Gemelli . .	5	7 21 33	28 22 24,56	24.70	24,63	10	10	1,15	7,03		— 2,67	2467
458	b^2 Gemelli . .	5	7 22 2	28 10 17,66	17,58	17,62	11	13	1,50	7,01	— 1,47	— 2,83	2469
459	Gemelli . .	6	7 22 53	28 10 2,80	2,60	2,70	10	10	2,05	6,82	— 2,68	— 26,65	2472
460	α^2 Gemelli . .	2.1	7 26 37	32 9 37,53	37,32	37,43	10	11	1,03	7,48	— 0,81		2485
461	Lince. . . .	6	7 27 25	46 27 2,06	1,90	1,98	10	11	1,48	7,47		+ 15,72	2488
462	υ Gemelli . .	4.5	7 28 13	27 10 17,58	17,79	17,69	11	10	0,74	7,62	— 0,12	— 2,89	2493
463	70 Gemelli . .	6	7 30 21	35 19 35,00	34,65	34,83	11	10	1,06	7,73	+ 0,04	+ 5,09	2504
464	23 Lince. . . .	6.7	7 30 29	57 21 54,50	54,34	54,42	11	13	1,13	7,75		— 0,36	2501
465	o Gemelli . .	5.6	7 31 0	34 52 8,15	7,96	8,05	10	11	1,48	8,05	— 0,03	+ 11,81	2509
466	Lince. . . .	6	7 31 47	55 3 3,50	3,01	3,26	11	10	1,55	7,82	— 1,46	— 0,90	2512
467	24 Lince. . . .	5	7 32 25	58 59 59,64	59,55	59,60	11	10	0,66	7,94			2516
468	Lince. . . .	6	7 34 36	50 43 36,59	36,48	36,54	10	10	1,49	8,08	— 0,96	— 0,99	2532
469	49 Giraffa . . .	5.6	7 35 7	63 7 44,01	44,08	44,05	9	11	1,65	8,14	— 0,16	— 1,75	2533
470	σ Gemelli . .	5	7 35 30	29 11 1,24	1,55	1,40	10	10	1,52	8,36	— 1,34	— 0,48	2540
471	c Gemelli . .	6	7 36 29	26 4 46,67	46,35	46,51	11	10	1,54	8,20	— 1,24	— 2,98	2549
472	ϰ Gemelli . .	4.3	7 36 54	24 41 44,57	44,87	44,72	10	10	1,02	8,26	— 0,61		2551
473	β Gemelli . .	1·2	7 37 40	28 19 34,35	34,50	34,42	6	7	1,50	8,35	— 0,18		2555
474	π Gemelli . .	6	7 39 27	33 43 13,00	12,87	12,94	11	10	1,09	8,45	— 0,89		2563
475	Lince. . . .	6.7	7 41 14	54 26 18,10	17,92	18,01	9	11	0,73	8,67	+ 0,48	+ 9,03	2576
476	26 Lince. . . .	6.5	7 45 36	47 53 10,78	10,59	10,69	10	11	1,06	8.94			2609
477	φ Gemelli . .	6	7 45 51	21 5 14,40	14,19	14,30	10	10	0,75	8,97	— 1,03	— 1,14	2617
478	52 Giraffa . . .	5.6	7 46 19	56 49 48,97	48,51	48,74	10	10	0,74	8,99		— 2,70	2616
479	Lince. . . .	6	7 49 29	44 18 31,33	—	31,33	16	—	0,74	9,21		— 0,45	2638
480	53 Giraffa . . ,	6	7 51 1	60 39 48,16	48,23	48,20	10	11	0,68	9,37	+ 0,31		2643
481	Giraffa . . .	6	7 51 27	61 19 57,12	57,10	57,11	10	9	1,58	9,37	+ 0,90	+ 0,99	2648
482	54 Giraffa . . .	6	7 52 24	57 37 2,21	2,09	2,15	10	10	0,62	9,45		— 3,60	2650
483	ω Cancro . . .	6	7 53 22	25 44 0,12	59,98	0,05	9	11	0,72	9,51	+ 0,67	— 0,53	2657
484	χ Gemelli . .	5	7 55 50	28 8 34,17	33,90	34,03	20	22	0,60	9,78	— 1,17		2672
485	μ' Cancro . . .	6.7	7 58 54	22 59 26,29	26,02	26,16	10	10	0,75	9,95	— 0,85	— 1,03	2700
486	27 Lince. . . .	5.4	7 59 3	51 51 53,02	52,71	52,87	10	10	0,66	9,95			2697
487	Giraffa . . .	6	7 59 48	58 36 42,59	42,30	42,45	11	12	1,53	10,01		— 4,92	2704
488	μ^2 Cancro . . .	6.5	8 0 24	21 56 33,02	33,16	33,09	10	9	1,64	10,08	— 2,27	— 8,36	2714
489	Lince. . . .	6.7	8 0 47	42 47 40,35	—	40,35	17	—	1,16	10,09		— 5,41	2715
490	ψ^2 Cancro . . .	6	8 2 55	25 53 5,17	4,95	5,06	11	9	0,76	10,58	— 1,13	— 2,86	2730

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				— ″	″	″	
491	Lince. . . .	5.6	8 3 52	56 49 27,64	27,42	27,53	9	13	1,11	10,30		— 4,42	2732
492	56 Giraffa . . .	6	8 5 17	60 45 20,33	20,23	20,28	10	10	1,50	10,43	— 0,55	— 2,06	2741
493	ψ Gemelli. . .	6	8 5 24	30 1 45,50	45,51	45,51	10	8	1,13	10,50	— 0,60	+ 3,48	2747
494	29 Lince. . . .	6	8 7 27	59 57 5,43	5,31	5,37	10	10	1,53	10,65	— 1,16	+ 3 89	2757
495	30 Lince. . . .	6	8 10 19	38 7 48,63	48,43	48,53	12	10	0,75	10,78		+ 0,07	2776
496	Orsa magg.	6	8 12 13	61 1 26,38	26,54	26,46	10	10	1,50	10,94	— 0,63	— 2,31	2784
497	χ Cancro . . .	6	8 12 28	27 37 14,36	14,11	14,24	10	10	0,74	11,33	— 0,87	— 2,16	2786
498	λ Cancro . . .	6	8 13 6	24 24 51,09	51,23	51,16	12	11	1,59	11,05		0,00	2789
499	31 Lince. . . .	5	8 14 16	43 35 13,21	—	13,21	16	—	1,04	11 20			2793
500	Lince. . . .	6	8 14 20	53 37 12,66	12,42	12,54	11	10	1,15	11,13		— 4,16	2792
501	Lince. . . .	6	8 16 14	42 24 18,13	—	18,13	18	—	1,10	11,23	— 1,46	— 2,37	2798
502	φ^2 Cancro . . .	6	8 19 13	27 20 31,18	30,95	31,07	10	10	0,75	11,46	— 0,80	— 0,68	2817
503	o Orsa magg.	3.4	8 19 52	61 8 0,24	0,47	0,36	11	11	1,55	11,64	— 1,24		2819
504	Orsa magg.	6.7	8 23 10	53 32 8,75	8,90	8,83	10	9	0,73	11,73	— 4,91	— 5,93	2844
505	υ^3 Cancro . . .	6	8 24 7	24 30 2,45	2,72	2,58	10	10	1,49	11,90	— 1,45	+ 3,45	2850
506	1460Groomb. . .	6.7	8 24 46	38 26 35,30	—	35,30	17	—	1,14	12,05	— 1,90		2855
507	32 Lince. . . .	6	8 25 21	36 51 29,55	29,56	29,56	10	10	1,13	11,90	— 1,78	— 0,81	2860
508	η Cancro . . .	6	8 25 29	20 51 51,09	51,32	51,20	11	11	0,42	11,95	— 0,64		2862
509	1460Groomb. . .	6	8 30 1	53 8 51,22	51,11	51,17	10	11	0,60	12,05			2892
510	34 Lince. . . .	6	8 32 22	46 16 12,79	12,73	12,76	10	10	1,14	12,31	— 1,99	— 0,78	2909
511	γ Cancro . . .	4.5	8 36 3	21 54 59,17	58,90	59,04	10	10	1,14	12,60	— 0,73	— 4,92	2937
512	σ^1 Cancro . . .	6.7	8 37 41	31 8 54,05	54,46	54,26	10	10	1,14	12,72	— 1,78	— 5,18	2952
513	ι Cancro . . .	4	8 39 8	29 12 54,93	54,85	54,89	10	10	0,59	12,92	— 1,50		2965
514	35 Lince. . . .	6	8 43 33	44 11 24,46	—	24,46	16	—	0,74	13,11		+ 1,87	2989
515	51 Cancro . . .	6	8 44 51	32 56 26,80	26,65	26,73	11	11	1,55	13,19	— 1,04	— 0,83	2999
516	ρ^2 Cancro . . .	6	8 45 10	28 48 23,46	23,56	23,51	10	9	1,53	13,48		— 1,34	3002
517	57 Cancro med.	6	8 46 37	31 3 3,78	3,67	3,73	10	9	1,07	13,38	— 1,19		3016
518	ρ^3 Cancro . . .	6	8 48 10	28 24 10,09	10,04	10,07	10	10	1,54	13,47		— 2,15	3026
519	Lince. . . .	6	8 48 22	46 6 31,56	31,64	31,60	9	11	1,14	13,40		— 7,95	3025
520	Lince. . . .	6.7	8 48 24	40 40 43,45	—	43,45	16	—	2,10	13,45		— 4,31	3027
521	σ^3 Cancro . . .	6	8 49 14	33 23 22,91	22,97	22,94	11	10	1,17	13,57	— 0,49	— 1,84	3033
522	σ^3 Cancro . . .	6	8 50 23	30 42 43,34	43,67	43,50	11	11	1,14	13,55		— 2,61	3046
523	ι Orsa magg.	3	8 50 38	48 31 51,20	51,15	51,19	10	10	0,57	13,87	— 0,47		3048
524	64 Cancro . . .	5	8 51 52	32 54 9,06	9,01	9,04	10	9	1,16	13,73	— 0,20	+ 1,54	3056
525	10 Orsa magg.	4	8 52 31	42 16 33,62	—	33,62	17	—	0,37	13,98			3059

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B.A.C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse					
			h m s	° ′ ″		″				—			
526	Lince	6.7	8 52 34	38 5 19,49	—	19,49	17	—	1,66	13,71		— 1,49	3060
527	66 Cancro . . .	6.7	8 53 44	32 44 20,68	21,64	20,66	12	10	1,58	13,78	— 1,20	+ 0,10	3068
528	1501 Groombr. .	6	8 54 50	54 46 29,33	29,22	29,28	11	11	1,08	13,83			3072
529	$\varkappa$ Orsa magg.	3.4	8 55 5	47 38 56,61	56,48	56,55	10	10	0,60	13,97			3075
530	ν Cancro . . .	6	8 55 26	24 56 35,75	35,71	35,73	10	11	1,58	13,96	— 0,76	+ 6,15	3079
531	Orsa magg.	6	8 56 46	49 1 27,34	27,27	27,31	11	10	1,63	13,98		— 5,27	3085
532	Orsa magg.	6	8 57 1	59 50 28,69	28,61	28,65	9	10	1,84	13,99		— 43,04	3086
533	Lince	5	8 58 34	38 57 1,39	—	1,39	18	—	1,17	14,05	— 0,85	+ 0,89	3097
534	Lince	6	8 58 50	38 46 38,65	—	38,65	17	—	1,20	14,11		— 1,35	3100
535	f Orsa magg.	5	9 0 3	52 6 26,70	26,58	26,64	12	10	1,58	14,23		— 1,06	3106
536	τ Cancro . . .	6	9 0 30	30 9 18,43	18,55	18,49	10	10	0,75	14,26	— 1,12	+ 4,51	3109
537	Lince	6	9 1 11	34 23 20,17	20,11	20,14	11	10	1,54	14,50		+ 8,34	3112
538	ξ Cancro . . .	5	9 2 10	22 33 58,60	58,98	58,79	11	10	0,64	14,30	— 0,53	— 2,04	3117
539	79 Cancro . . .	6.7	9 3 10	22 30 10,57	10,68	10,63	8	11	1,55	14,39	+ 1,07	+ 1,75	3123
540	36 Lince	5	9 5 37	43 43 53,11	—	53,11	16	—	0,69	14,58			3131
541	Cancro . . .	6.7	9 6 29	21 47 48,83	48,57	48,70	11	10	1,57	14,59	— 0,17	— 4,30	3138
542	17 Orsa magg.	6	9 6 33	57 15 27,66	27,64	27,65	11	10	1,55	14,65		— 0,33	3135
543	e Orsa magg.	5	9 7 11	54 32 11,13	11,07	11,10	10	12	1,09	14,60		+ 3,62	3140
544	Lince	6.7	9 7 33	35 8 50,92	51,07	51,00	11	10	1,13	14,67	— 1,89	+ 6,16	3144
545	Orsa magg.	6	9 9 7	47 20 11,23	11,40	11,32	10	11	1,18	14,70		— 2,21	2150
546	38 Lince	4	9 11 4	37 19 49,20	48,71	48,96	10	10	1,04	14,94	+ 0,51		3162
547	Orsa magg.	6.7	9 12 3	51 47 13,44	13,38	13,41	10	11	1,15	14,80		+ 2,81	3169
548	Orsa magg.	6	9 12 32	57 13 36,48	36,41	36,45	11	10	1,52	14,94		— 1,83	3172
549	α Lince	3.4	9 13 36	34 55 11,12	10,84	10,98	10	10	1,10	14,99	— 0,23		3178
550	Orsa magg.	6	9 14 0	50 4 29,08	29,29	29,19	11	10	1,55	15,06	— 0,33	+ 2,04	3182
551	$\varkappa$ Leone . . .	5	9 17 22	26 43 7,97	7,98	7,98	11	12	0,76	15,24	— 1,47	— 3,77	3204
552	41 Lince	6.7	9 20 28	46 8 50,65	50,83	50,74	14	11	0,72	15,52		— 4,14	3218
553	7 Leon. min. .	6.7	9 23 10	34 12 13,08	12,93	13,00	10	10	1,14	15,66	— 1,44	+ 4,31	3238
554	8 Leon min. .	6	9 23 56	35 39 16,42	16,67	16,55	10	10	1,17	15,69		— 0,59	3241
555	θ Orsa magg.	3	9 24 29	52 14 43,76	43,99	43,88	10	12	0,26	16,19	— 0,81		3242
556	λ Leone . . .	5.4	9 24 35	23 31 4,86	4,89	4,88	9	10	1,18	15,66	— 0,15	— 0,53	3246
557	9 Leon min. .	6	9 25 50	37 2 22,48	22,13	22,31	9	12	1,18	15,72		— 1,33	3252
558	26 Orsa magg.	5	9 26 34	52 36 21,34	21,00	21,17	9	11	1,17	15,75		— 0,58	3256
559	10 Leon min. .	5	9 26 34	36 57 3,53	4,01	3,77	10	11	1,09	15,74	— 0,96		3261
560	Lince	5	9 27 16	40 10 30,41	—	30,41	16	—	1,67	15,82		+ 2,63	3265

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				—	″	″	
561	11 Leon min. .	6	9 28 9	36 22 27,34	27,61	27,47	10	10	1,55	16,07	— 0,57	— 1,34	3268
562	42 Lince	6	9 30 33	40 47 58,85	—	58,85	16	—	0,78	15,95		— 1,90	3281
563	9 Leone. . . .	6.7	9 30 41	25 13 50,11	50,30	50,21	11	12	1,19	16,01	— 1,39	+ 1,92	3285
564	Orsa magg.	6.7	9 34 28	54 55 59,17	58,89	59,03	11	10	1,65	16,14		— 2,37	3308
565	13 Leone . . .	6.7	9 34 28	26 28 49,59	49,78	49,69	10	12	1,15	16,16	— 1,21	— 6,06	3309
566	13 Leon min. .	6	9 35 11	35 39 48,35	48,20	48,27	10	10	1,46	16,25	— 0,35	+ 0,01	3313
567	Orsa magg.	6	9 37 39	57 42 1,81	1,79	1,80	10	11	1,16	16,31	— 1,42	+ 1,46	3324
568	ε Leone . . .	3	9 38 45	24 20 54,91	54,90	54,90	17	18	0,32	16,39	— 0,85		3331
569	15 Leon min. .	6	9 40 31	46 36 7,42	7,72	7,57	10	10	1,46	16,55		— 1,75	3341
570	υ Orsa magg.	4.3	9 42 5	59 37 30,86	30,68	30,77	11	10	0,76	16,73	— 1,14		3346
571	16 Leon min. .	6	9 42 33	40 12 43,96	—	43,96	16	—	1,16	16,55	— 1,41	— 1,13	3352
572	g Leone . . .	5	9 44 47	24 59 7,70	7,71	7,71	9	12	0,78	16,87		— 0,02	3366
573	μ Leone. . . .	4	9 45 39	26 35 40,28	40,39	40,33	11	15	0,32	16,76	— 0,53		3371
574	31 Orsa magg.	5	9 47 33	50 24 30,48	30,76	30,62	10	11	1,16	16,80		+ 0,02	3381
575	Orsa magg.	6	9 48 30	58 0 42,39	42,17	42,28	9	10	1,19	16,89		— 2,26	3390
576	19 Leone min.	5	9 50 1	41 38 59,41	—	59,41	17	—	0,31	16,94	+ 0,28		3399
577	Orsa magg.	6.7	9 50 3	46 0 31,02	30,99	31,01	10	12	1,09	16,92		— 5,14	3397
578	Orsa magg.	6	9 51 15	57 24 30,51	30,52	30,52	10	11	1,18	16,97		— 2,79	3402
579	Leone. . . .	6	9 52 25	30 14 34,50	34,65	34,58	10	11	1,19	17,16	— 0,05	+ 5,18	3409
580	20 Leon min. .	5	9 53 48	32 32 14,00	14,05	14,03	10	10	0,80	17,55	— 1,39	+ 0,08	3416
581	Orsa magg.	6	9 55 8	50 42 39,32	39,04	39,18	10	10	1,14	17,16		— 2,98	3421
582	Orsa magg.	6	9 56 18	54 29 43,54	43,38	43,46	13	11	0,78	17,25		+ 2,37	3425
583	21 Leon min. .	4.5	10 0 3	35 51 9,75	9,87	9,81	13	10	0,74	17,38	— 1,63	— 1,52	3446
584	Leon min. .	6.7	10 3 26	41 16 29,25	—	29,25	16	—	1,32	17,52	— 1,20	— 4,33	3466
585	Leon min. .	neb.	10 6 59	32 2 39,00	39,27	39,14	10	13	1,28	17,67	— 0,53	— 2,95	3484
586	22 Leon min. .	6	10 7 55	32 5 14,27	14,47	14,37	18	11	1,16	17,70	— 1,63	— 3,18	3490
587	23 Leon min. .	5	10 9 8	29 55 55,69	55,66	55,67	9	10	1,19	17,87		+ 5,76	3500
588	λ Orsa magg.	3.4	10 9 33	43 32 14,63	—	14,63	18	—	0,25	17,86	— 1,63		3505
589	35 Leone . . .	6	10 9 37	24 7 24,48	24,41	24,44	10	11	2,14	17,79		+ 1,61	3507
590	ζ Leone . . .	3	10 9 44	24 2 22,09	21,94	22,02	11	11	1,74	17,76	+ 0,26		3508
591	Orsa magg.	6.7	10 11 15	44 40 58,41	—	58,41	17	—	0,75	18,26		+ 7,99	3515
592	Orsa magg.	6.7	10 12 25	54 50 35,71	35,65	35,68	10	10	1,26	17,88		— 1,60	3519
593	40 Leone . . .	6.7	10 12 56	20 6 15,48	15,53	15,50	10	12	2,11	18,14		+ 0,17	3522
594	γ' Leone . . .	2	10 13 5	20 28 22,78	22,70	22,74	12	9	0,70	18,06	— 0,14		3523
595	Orsa magg.	6	10 13 34	42 28 34,77	—	34,77	16	—	1,76	17,93		— 1,53	3525

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B.A.C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″		″				″	″	″	
596	Orsa magg.	6	10 14 44	41 51 47,51	—	47,51	16	—	1,67	17,99	— 0,83	— 9,79	3530
597	μ Orsa magg.	3	10 14 52	42 7 38,95	—	38,95	46	—	0,25	17,98	— 0,89		3533
598	29 Leon min. .	6.7	10 18 32	36 3 39,71	39,67	39,69	11	11	1,62	18,22	— 0,81	+ 0,19	3559
599	30 Leon min. .	5.4	10 18 45	34 25 55,17	54,92	55,05	9	10	1,18	18,24	— 0,84	+ 1,38	3560
600	Orsa magg.	5	10 20 4	42 14 20,94	—	20,94	16	—	1,73	18,12		— 8,76	3565
601	Orsa magg.	6	10 20 20	49 28 2,88	2,72	2,80	11	11	1,65	18,19		+ 0,78	3567
602	31 Leon min. .	5.4	10 20 39	37 20 48,84	49,17	49,01	12	10	1,21	18,30	— 0,03		3572
603	36 Orsa magg.	5	10 22 37	56 37 14,59	14,78	14,69	10	10	0,75	18,32	— 0,34		3580
604	32 Leon min. .	6	10 22 49	39 33 50,56	—	50,56	16	—	1,22	18,31		+ 1,48	3584
605	33 Leon min. .	6	10 24 45	33 1 12,57	12,41	12,49	10	10	1,22	18,34	— 0,53	— 1,61	3602
606	Orsa magg.	5	10 25 56	41 4 4,40	—	4,40	18	—	0,92	18,39		— 1,15	3607
607	34 Leon min. .	6	10 26 22	35 37 54,98	54,90	54,94	10	11	1,62	18,42	+ 0,42	+ 0,32	3610
608	37 Orsa magg.	5	10 27 6	57 43 32,19	31,73	31,96	9	10	0,75	18,42	— 0,62		3612
609	38 Leon magg.	6	10 29 11	36 58 26,53	26,79	26,66	10	10	1,18	18,52	— 1,17	— 4,67	3625
610	36 Leon min. .	6.7	10 30 47	34 43 34,53	34,66	34,60	10	10	1,46	18,62		+ 6,95	3633
611	37 Leon min. .	5.4	10 31 41	32 37 29,06	29,26	29,16	10	11	1,19	18,59	— 0,98	— 0,44	3640
612	Orsa magg.	6	10 31 50	51 19 11,27	11,43	11,35	10	10	1,22	18,58		— 5,59	3639
613	37 Leon min. .	6	10 31 59	38 33 40,16	—	40,16	16	—	1,86	18,65		+ 0,76	3641
614	39 Orsa magg.	6	10 35 49	57 51 17,77	17,41	17,59	10	11	0,76	18,79	— 0,36	— 0,47	3664
615	40 Leon min. .	6	10 36 10	26 58 52,70	52,49	52,60	11	11	1,67	18,79		— 2,55	3666
616	Orsa magg.	5	10 36 12	46 51 35,64	35,56	35,60	10	9	1,73	18,70		— 8,45	3665
617	Leon min. .	5	10 36 37	23 50 31,82	31,67	31,75	10	10	1,12	18,74	+ 0,21		3671
618	41 Orsa magg.	6	10 38 32	58 1 26,91	26,79	26,85	9	9	0,82	18,87		— 3,33	3682
619	42 Leon min. .	5	10 38 55	31 20 23,70	23,73	23,72	12	10	1,12	18,86	— 1,40		3685
620	43 Leon min. .	6.7	10 42 4	30 4 35,94	36,08	36,01	10	11	1,11	18,99		+ 3,68	3704
621	44 Leon min. .	6.7	10 43 1	28 37 59,49	59,33	59,41	12	8	1,22	18,90	— 0,99	— 1,79	3710
622	43 Orsa magg.	6	10 43 29	57 14 35,43	35,67	35,55	10	10	1,21	18,97		— 1,08	3713
623	42 Orsa magg.	6	10 43 32	59 58 58,43	58,70	58,57	10	10	1,22	19,04	— 1,73	+ 0,90	3714
624	44 Orsa magg.	5	10 46 0	55 14 56,04	55,79	55,92	11	10	1,22	19,07		+ 1,47	3725
625	46 Leon min. .	4	10 46 19	34 53 17,67	17,82	17,75	13	10	1,19	19,27	— 0,45		3728
626	ω Orsa magg.	5	10 46 47	43 51 17,57	—	17,57	16	—	0,82	19,07	— 0,29	— 1,58	3729
627	Leon min. .	5.6	10 48 49	34 10 23,99	24,11	24,05	10	10	1,19	19,20		+ 3,32	3741
628	54 Leone. . . .	4.5	10 48 51	25 24 57,18	57,14	57,16	11	11	1,24	19,11	— 0,74	— 1,24	3742
629	50 Leon min. .	6	10 49 47	26 10 0,70	0,60	0,65	11	10	1,74	19,14		— 4,89	3751
630	47 Orsa magg.	5	10 52 28	41 5 50,09	—	56,09	17	—	0,34	19,15	— 1,16	— 2,20	3757

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse			1872		
			h m s	° ′ ″	″	″				—			
631	Orsa magg.	6	10 53 3	46 11 43,41	43,53	43,47	13	9	1,66	19,21		— 1,53	3758
632	Orsa magg.	6	10 53 16	43 35 8,16	—	8,16	17	—	2,04	19,21		— 10,64	3760
633	49 Orsa magg.	5	10 53 50	39 52 58,91	—	58,91	17	—	1,26	19,24		+ 0,41	3765
634	β Orsa magg.	2.3	10 54 17	57 3 6,33	6,12	6,22	10	10	0,76	19,23	— 1,57		3767
635	α Orsa magg.	2	10 56 0	62 25 30,91	30,94	30,93	12	11	1,64	19,37	— 0,88		3777
636	51 Orsa magg.	6	10 57 34	38 54 51,08	—	51,08	17	—	0,32	19,38	— 1,11	+ 2 40	3784
637	67 Leone . . .	6	11 2 7	25 20 4,49	4,56	4,53	15	10	0,76	19,43	— 0,52	+ 0,80	3809
638	Orsa magg.	6	11 2 27	36 59 11,69	11,96	11,83	11	12	1,23	19,45	— 0,78	— 3,70	3811
639	ψ Orsa magg.	3	11 2 38	45 10 34,31	—	34,31	16	—	1,16	19,51	— 0,95		3812
640	Orsa magg.	6.7	11 2 38	43 53 5,67	—	5,67	17	—	1,24	19,39	— 0,65	— 3,14	3813
641	Orsa magg.	6.7	11 5 27	55 34 22,59	22,74	22,67	13	11	0,80	19,39	— 3,61	2,03	3825
642	δ Leone . . .	2.3	11 7 27	21 12 29,53	29,24	29,39	18	11	0,28	19,67	— 0,49		3834
643	72 Leone . . .	5	11 8 33	23 46 34,78	34,58	34,68	12	10	1,60	19,57		— 1,09	3842
644	. 1757Groom.	6	11 9 39	50 9 28,78	29,12	28,95	11	9	0,75	19,59			3846
645	ξ Orsa magg.	4.3	11 11 31	32 13 54,26	54,68	54,47	15	11	0,77	20,19	— 2,04		3851
646	ν Orsa magg.	3.4	11 11 43	33 46 33,76	33,91	33,84	11	10	0,65	19,59	— 0,12		3852
647	55 Orsa magg.	5	11 12 20	38 52 15,04	—	15,04	16	—	1,21	19,71		— 1,44	3856
648	56 Orsa magg.	6	11 15 58	44 10 4,03	—	4,03	18	—	0,34	19,75		+ 1,08	3868
649	Orsa magg.	6	11 18 54	56 32 8,48	8,46	8,47	12	11	0,74	19,69		+ 0,21	3885
650	57 Orsa magg.	5	11 22 20	40 1 28,01	—	28,01	20	—	0,31	19,80		+ 0,96	3905
651	58 Orsa magg.	6	11 23 45	43 51 33,23	—	33,23	19	—	0,76	19,72			3913
652	Orsa magg.	6	11 25 15	61 46 27,92	28,12	28,02	14	10	0,76	19,84	— 1,22	— 5,28	3918
653	Orsa magg.	6	11 28 11	55 28 32,76	32,76	32,76	15	11	0,69	19,87		— 0,57	3931
654	Leone. . . .	6	11 29 43	28 28 19,03	18,89	18,96	11	10	0,80	19,94	— 0,62	+ 0,86	3937
655	Orsa magg.	6	11 31 7	51 18 38,64	38,52	38,58	11	10	1,22	19,90		— 3,22	3949
656	59 Orsa magg.	6	11 31 41	44 19 5,11	—	5,11	17	—	1,77	19,98		+ 0,66	3952
657	60 Orsa magg.	6	11 31 50	47 31 37,42	73,31	37,37	11	10	1,68	19,96	— 0,88	+ 0,36	3953
658	92 Leone . . .	5	11 34 17	22 2 48,60	48,61	48,61	12	10	0,59	19,92	— 0,58	— 8,47	3964
659	61 Orsa magg.	5	11 34 28	34 54 27,28	27,02	27,15	10	10	1,68	20,39	— 0,43	+ 5,02	3965
660	62 Orsa magg.	6	11 35 4	32 26 8,56	8,55	8,56	12	11	1,68	19,90		— 9,22	3966
661	Orsa magg.	6.7	11 37 0	42 24 57,04	—	57,04	16	—	0,65	19,95	— 0,97	— 2,90	3973
662	χ Orsa magg.	4	11 39 27	48 28 20,26	20,50	20,38	19	11	1,14	19,98	— 0,77		3981
663	Orsa magg.	6	11 40 13	56 19 25,04	25,30	25,17	10	10	0,82	19,98		— 1,23	3985
664	Orsa magg.	6	11 43 12	35 37 34,68	34,71	34,70	18	11	0,75	20,03		+ 0,60	3998
665	γ Orsa magg.	2.3	11 47 17	54 23 23,25	23,18	23,22	17	16	0,29	20,02	— 0,40		4017

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″		″				— ″		″	
666	Orsa magg.	7	11 47 21	41 36 37,21	—	37,21	16	—	1,18	20,03		— 4,70	4018
667	66 Orsa magg.	6	11 49 26	57 17 38,63	39,00	38,82	12	10	0,78	20,06	— 1,76	— 0,45	4033
668	1 Chioma. . .	6.7	11 55 20	22 47 26,27	26,21	26,24	11	12	0,75	20,07	— 0,49	— 1,78	4056
669	67 Orsa magg.	5	11 55 46	43 44 20,60	—	20,60	18	—	0,31	20,03		+ 2,57	4057
670	2 Chioma. . .	6	11 57 52	22 9 18,18	17,87	18,03	11	11	0,75	20,04		— 4,75	4066
671	68 Orsa magg.	6	12 5 30	57 45 1,52	1,93	1,73	13	9	0,80	21,11	— 0,64	+ 3,20	4108
672	4 Chioma. . .	6	12 5 31	26 33 59,83	59,76	59,80	13	9	0,76	20,04	— 1,05	— 7,19	4107
673	5 Chioma. . .	6	12 5 48	21 14 17,70	17,36	17,53	10	13	0,81	20,03		— 7,45	4110
674	1 Cani da cac.	6	12 8 31	54 7 49,06	49,10	49,08	11	10	1,24	20,10	— 0,47	+ 1,94	4121
675	δ Orsa magg.	3.4	12 9 14	57 43 37,42	37,49	37,46	13	14	0,20	20,06	— 1,03		4123
676	2 Cani da cac.	6	12 9 51	41 21 21,99	—	21,99	16	—	1,21	20,07			4126
677	7 Chioma. . .	5.6	12 10 1	24 38 25,40	25,54	25,47	10	10	1,22	20,07	— 0,13	+ 1,27	4127
678	Cani da cac.	5	12 10 13	33 45 36,58	36,24	36,41	10	10	0,80	20,22		+ 4,66	4128
679	8 Chioma. . .	6.7	12 13 0	23 43 45,00	45,06	45,03	10	10	0,85	20,03	— 0,25	— 2,31	4141
680	10 Chioma. . .	6.7	12 13 34	29 9 31,52	31,33	31,42	10	10	2,22	20,01		+ 2,79	4147
681	3 Cani da cac.	6	12 13 39	49 40 41,67	41,48	41,57	10	10	1,70	20,08		+ 4,94	4148
682	Chioma. . .	6	12 14 3	27 19 1,97	2,02	2,00	10	10	0,81	20,01		— 14,58	4153
683	70 Orsa magg.	6	12 14 47	58 33 37,60	37,73	37,67	9	10	1,24	20,08		— 1,06	4159
684	12 Chioma. . .	5	12 16 13	26 32 23,87	23,81	23,84	16	10	0,76	19,99	— 0,32	— 2,96	4169
685	4 Cani da cac.	6	12 17 38	43 14 6,51	—	6.51	16	—	1,78	20,00		— 0,24	4177
686	13 Chioma. . .	5	12 18 2	26 47 30,19	30,27	30,23	9	11	0,31	20,01		— 3,77	4181
687	Chioma. . .	6.7	12 18 58	24 37 13,22	13,48	13,35	12	10	1,26	20,13	+ 0,19	+ 5,55	4184
688	71 Orsa magg.	6.7	12 19 4	57 28 15,97	16,23	16,10	10	10	1,25	20,02		+ 0,85	4185
689	6 Cani da cac.	5.6	12 19 41	39 42 43,84	—	43,84	16	—	1,30	20,03			4188
690	14 Chioma. . .	5.4	12 20 9	27 57 47,14	47,48	47,31	10	10	1,82	20,01		+ 7,06	4191
691	γ Chioma. . .	4.5	12 20 43	28 57 48,19	48,15	48,17	12	10	0,86	20,08	— 1,14	— 0,61	4195
692	16 Chioma. . .	5	12 20 44	27 31 5,66	6,02	5,84	10	11	1,82	19,97		— 1,59	4196
693	73 Orsa magg.	6	12 21 37	56 24 18,46	18,43	18,45	10	10	1,30	20,02		+ 1,47	4203
694	Chioma. . .	6	12 22 24	26 55 7,87	7,92	7,90	10	10	1,32	19,96		— 6,18	4205
695	17 Chioma. . .	5	12 22 40	26 36 18,82	18,64	18,73	11	10	1,24	19,97		— 2,00	4207
696	18 Chioma. . .	6	12 23 12	24 48 1,29	1,11	1,20	10	10	1,31	20,03		+ 8,67	4209
697	20 Chioma. . .	6	12 23 27	21 35 18,91	19,34	19,13	10	10	2,29	19,97			4212
698	74 Orsa magg.	6	12 24 7	59 5 36,87	36,78	36,82	9	10	0,77	19,88			4216
699	7 Cani da cac.	6	12 24 8	52 13 33,10	32,99	33,04	10	10	1,81	19,96	— 0,08	— 0,23	4217
700	75 Orsa magg.	6.7	12 24 12	59 27 33,40	33,44	33,42	10	10	1,78	19,94		— 2,56	4219

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni: dirette	Osservazioni: riflesse	Declinazione media 1875,0 — medio	Osservazioni — Num.: dirette	Osservazioni — Num.: riflesse	Osservazioni — Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione —	Differenza coi Cataloghi: Greenwich 1872	Differenza coi Cataloghi: B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
701	21 Chioma. . .	6.5	12 24 46	25 15 29,76	29,40	29,58	10	10	0,34	19,99	— 0,97	+ 2,33	4223
702	22 Chioma . .	6.7	12 27 20	24 58 22,78	22,99	22,88	10	10	0,85	19,98		+ 3,78	4232
703	8β Cani da cac.	4.5	12 27 48	42 2 13,06	—	13,06	24	—	0,29	19,61	— 1,08		4235
704	23 Chioma . .	4.5	12 28 37	23 19 4,43	4,79	4,61	10	10	0,85	19,90	— 0,18		4240
705	9 Cani da cac.	6	12 32 45	41 33 43,61	—	43,61	17	—	0,32	19,89		— 2,47	4258
706	26 Chioma . .	6	12 32 54	21 45 1,62	1,56	1,59	13	14	0,63	19,84	+ 0,26	— 3,84	4260
707	Cani da cac.	6	12 38 33	44 47 13,95	—	13,95	17	—	0,33	1 977		— 0,71	4282
708	10 Cani da cac.	6	12 39 4	39 57 29,93	—	29,93	16	—	0,82	19,64	— 0,83	+ 1,27	4285
709	Cani da cac.	5.6	12 39 15	46 7 24,85	25,00	24,92	14	10	1,30	19,76		0,00	4287
710	11 Cani da cac.	6	12 42 57	49 8 53,98	53,85	53,92	14	10	0,77	19,75		+ 3,34	4303
711	30 Chioma. . .	6	12 43 12	28 14 0,10	0,18	0,14	10	10	0,78	19,65	— 0,94	— 3,95	4304
712	Orsa magg.	6.7	12 43 12	61 0 6,46	6,74	6, 60	10	9	1,30	19,70	— 0,93	— 0,22	4305
713	Cani da cac.	6	12 44 14	38 11 49,13	—	49,13	16	—	1,06	19,68	— 1,47	+ 0,78	4311
714	31 Chioma. . .	5	12 45 37	28 13 15,65	45,82	15 ,74	13	10	0,79	19,66	— 1,79	— 4,99	4315
715	35 Chioma. . .	5	12 47 8	21 55 29,50	29,31	29,41	11	10	0,80	19,67	— 0,83	— 2,37	4328
716	ε Orsa magg.	2	12 48 31	56 38 19,19	19,19	19,19	12	10	0,81	19,65	— 0,49		4335
717	Cani da cac.	6	12 49 14	47 52 30,15	29,93	30,04	11	10	1,30	19,60		— 0,11	4341
718	α Cani da cac.	3	12 50 11	38 59 38,01	—	38,01	16	—	0,87	19,52	— 0,16		4346
719	Orsa magg.	6	12 50 48	54 46 35,59	35,72	35,66	13	9	1,31	19,59		+ 1,06	4348
720	Cani da cac.	6	12 51 25	46 51 17,94	17,74	17,84	10	10	0,83	19,56		— 3,54	4350
721	37 Chioma . .	5	12 54 18	31 27 33,66	33,90	33,78	11	9	0,81	19,47	— 1,27	— 5,62	4360
722	78 Orsa magg.	6	12 55 22	57 2 25,24	25,46	25,35	10	12	0,81	19,46		— 3,93	4366
723	Chioma . .	6	12 55 27	21 56 34,93	34,82	34,88	11	10	0,84	19,47		— 6,85	4364
724	14 Cani da cac.	5	12 59 54	36 28 4,98	5,23	5,11	10	10	0,83	19,36	— 0,74	— 2,17	4384
725	Cani da cac.	6	13 0 14	45 56 14,07	13,91	13,99	11	10	1,24	19,37		+ 1,21	4389
726	39 Chioma . .	6	13 0 13	21 49 27,79	28,05	27,92	11	10	0,83	19,39	— 1,02	— 4,33	4387
727	40 Chioma . .	6	13 0 16	23 17 14 66	14,93	14,80	10	10	1,89	19,34		— 7,20	4388
728	41 Chioma . .	5	13 1 11	28 17 45,85	45,94	45,90	15	11	1,27	19,43	— 0,61	— 1,05	4390
729	Chioma . .	6	13 1 54	28 13 34,95	34,90	34,92	10	12	1,33	19,44		+ 1,72	4393
730	Cani da cac.	6.7	13 3 53	38 5 21,61	—	21,61	15	—	0,89	19,28	— 1,45	+ 0,21	4407
731	15 Cani da cac.	5.6	13 3 57	39 12 0,20	—	0,20	17	—	1,83	19,30		+ 0,60	4408
732	17 Cani da cac.	6.7	13 4 19	39 9 48,53	—	48,53	16	—	1,83	19,22	— 1,28		4415
733	Orsa magg.	6	13 4 25	57 29 52,56	52,57	52,57	10	10	0,81	19,18		— 2,33	4416
734	18 Cani da cac.	7	13 5 47	41 27 28,91	—	28,91	17	—	1,32	19,26		+ 0,51	4420
735	β Chioma . .	4	13 6 2	28 30 44,70	44,54	44,62	14	10	0,80	18,33	+ 1,11		4421

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″		″				″	″	″	
736	Cani da cac.	5	13 8 3	40 48 54,88	—	54,88	15	—	087	19,24		+ 1,28	4433
737	19 Cani da cac.	6	13 9 55	41 30 57,41	—	57,41	14	—	0,91	19,11		— 1,46	4438
738	20 Cani da cac.	5.4	13 11 56	41 13 51,73	—	51,73	17	—	0,36	19,04	— 1,60		4451
739	Cani da cac.	6	13 12 40	34 45 23,70	23,65	23,67	12	11	1,28	19,21		+ 10,47	4453
740	21 Cani da cac.	5	13 12 55	50 20 24,80	24,58	24,69	10	9	0,85	19,07		+ 3,26	4456
741	Cani da cac.	6	13 18 14	37 41 13,60	13,28	13,44	8	10	0,80	18,88	— 0,54	+ 0,08	4479
742	ζ^1 Orsa magg.	2.3	13 18 53	55 34 42,86	43,18	43,02	11	11	0,34	18,93	— 0,81		4484
743	ζ^2 Orsa magg.	6	13 18 54	55 34 30,12	30,48	30,30	9	11	1,34	18,92	— 1,19	— 0,13	4486
744	g Orsa magg.	5	13 20 13	55 88 23,92	23,98	23,95	11	12	0,83	18,87		+ 1,57	4493
745	69H Orsa magg.	5.6	13 23 52	60 35 30,30	29,90	30,10	11	13	0,80	18,72	— 1,00		4510
746	Chioma. . .	6	13 24 55	24 52 55,87	55,76	55,82	10	8	1,33	18,67	+ 0,35	— 2,20	4513
747	Cani da cac.	6	13 25 51	42 44 58,14	—	58,14	17	—	0,83	18,65		+ 19,81	4519
748	17H. Cani da c..	6	13 29 13	37 49 23,78	24,07	23,92	10	10	0,85	18,56	— 1,19		4536
749	81 Orsa magg.	5.6	13 29 19	55 59 22,01	21,99	22,00	11	10	0,85	18,55		— 0,70	4540
750	24 Cani da cac.	5	13 29 21	49 39 20,08	20,04	20,06	11	11	1,33	18,55		— 2,23	4538
751	Cani da cac.	6	13 29 55	44 50 11,04		11,04	17	—	1,33	18,52		+ 2,34	4545
752	25 Cani da cac.	5	13 31 54	36 55 52,62	52,75	52,69	10	9	0,89	18,50	— 0,98		4552
753	Orsa magg.	6	13 32 42	51 21 4,44	4,58	4,51	11	11	0,85	18,35		— 4,62	4556
754	2 Boote. . . .	6	13 35 7	23 7 46,75	46,84	46,80	14	10	0,86	18,32	— 0.57	— 6,43	4566
755	83 Orsa magg.	6.5	13 36 0	55 18 52,57	52,85	52,71	12	16	0,83	18,36		+ 2,63	4568
756	Boote. . . .	6	13 37 50	23 19 53,18	53,49	53,34	11	10	0,82	18,24		— 1,99	4575
757	3 Boote. . . .	6	13 40 55	26 19 47,39	47,51	47,45	14	10	0,77	18,14	— 1,29	— 7,28	4594
758	Cani da cac.	6	13 40 55	41 43 57,99	—	57,99	16	—	1,37	18,12		— 4,01	4596
759	84 Orsa magg.	6	13 41 56	55 3 28,32	28,59	28,45	12	10	1,33	18,20	— 1,14	+ 7,45	4605
760	η Orsa magg.	2	13 42 37	49 56 15,95	15,51	15,73	11	10	1,35	18,11	— 0,81		4607
761	Cani da cac.	6	13 42 48	42 40 22,60	—	22,60	17	—	2,30	18,07		— 2,45	4609
762	Cani da cac.	6	13 43 0	31 47 42,91	42,96	42,93	11	11	1,32	18,05		+ 2,05	4610
763	e Boote. . . .	5	13 43 48	21 53 6,96	7,02	6,99	10	13	1,29	17,85		— 18,56	4618
764	Cani da cac.	5	13 45 37	35 17 8,83	8,89	8,86	11	10	0,87	17,95	— 0,93	— 9,52	4628
765	Cani da cac.	6	13 46 17	35 4 20,34	20,32	20,33	16	12	0,93	17,92		— 3,10	4632
766	86 Orsa magg.	6	13 49 15	54 20 38,42	38,13	38,27	12	12	0,85	17,91		+ 7,17	4649
767	9 Boote. . . .	5	13 50 52	28 6 20,52	20,72	20,62	11	11	0,79	17,80	— 0,91	— 0,01	4656
768	10 Boote. . . .	6	13 52 47	22 18 24,96	24,93	24,95	11	10	1,15	17,69	— 0,24	— 5,75	4664
769	11 Boote. . . .	6	13 55 30	27 59 28,06	27,89	27,98	15	12	0,77	17.55	— 0.57		4675
770	Boote. . . .	6.5	14 2 56	44 26 57,11		57,11	16	—	0,37	17,33	— 2,44	+ 3,86	4699

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B.A.C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
771	13 Boote. . . .	6	14 3 37	50 2 58,24	58,16	58,20	12	9	0,91	17,20	— 0,87	— 7,47	4701
772	*d* Boote. . . .	5	14 4 42	25 41 4,98	4,78	4,88	11	13	0,78	17,21	— 0,64		4706
773	*z* Boote. . . .	4.5	14 9 0	52 22 30,49	30,57	30,53	9	12	0,83	16,97		— 0,35	4726
774	Boote. . . .	6	14 9 21	42 6 21,62	—	21,62	20	—	0,79	16,92	— 2,84	— 8,81	4728
775	Boote. . . .	6	14 10 54	53 7 5,17	5,03	5,10	13	10	1,36	16,85		+ 0,12	4736
776	λ Boote. . . .	4	14 11 38	46 39 44,68	46,86	46,77	11	10	1,36	16,72	— 0,91		4741
777	*i* Boote. . . .	4.5	14 11 44	51 56 40,22	40,09	40,15	12	10	1,29	16,76	— 0,56		4742
778	A Boote. . . .	5	14 12 43	36 5 14,14	13,82	13,98	9	10	1,80	16,76	+ 0,33	— 0,35	4747
779	Boote. . . .	6	14 12 55	51 53 9,60	9,27	9,44	10	10	0,85	16,69		— 4,54	4752
780	Boote. . . .	6	14 14 8	52 36 35,65	35,39	35,52	12	10	1,35	16,70		— 0,51	4756
781	Boote. . . .	6	14 14 40	39 22 9,27	—	9,27	15	—	0,87	16,67		+ 0,44	4758
782	*θ* Boote. . . .	4.3	14 20 56	52 25 45,29	45,30	45,30	20	11	0,76	16,80	+ 0,03		4789
783	Boote. . . .	6	14 23 5	36 45 24,10	24,09	24,10	11	11	0,81	16,24	— 0,95	— 4,95	4797
784	*g* Boote. . . .	6	14 24 18	50 24 17,69	17,63	17,66	12	10	0,85	16,28		+ 1,53	4804
785	Boote. . . .	6.7	14 24 40	42 21 37,18	—	37,18	17	—	0,94	16,16		— 15,05	4805
786	*ρ* Boote. . . .	4.3	14 26 27	30 55 15,74	15,69	15,72	11	10	0,35	15,96	— 0.23		4808
787	Boote. . . .	6	14 26 48	27 13 51,74	52,08	51,91	10	12	1,69	16,05		— 7,02	4809
788	26 Boote. . . .	6	14 26 52	22 48 41,86	41,96	41,91	10	12	1,30	16,00		— 0,77	4810
789	*γ* Boote. . . .	3.2	14 27 3	38 51 21,29	—	21,29	17	—	1,02	15,92			4812
790	Boote. . . .	6	14 28 14	37 30 43,73	43,88	43,80	10	10	0,85	15,98		— 2,48	4816
791	2125Groom.	6	14 28 19	60 46 37,33	37,27	37,30	10	12	2,37	16,03			. . .
792	Boote. . . .	6	14 28 52	33 5 0,39	0,31	0,35	10	11	1,82	15,95		— 1,80	4820
793	*σ* Boote. . . .	5	14 29 14	30 17 19,41	19,07	19,24	9	11	1,84	15,80		+ 0,51	4823
794	Boote. . . .	6.7	14 29 52	37 10 33,36	33,59	33,48	11	10	1,35	15,96	+ 0,59	— 3,60	4825
795	Boote. . . .	6	14 30 17	49 54 50,17	50,24	50,20	11	10	0,86	15,87		+ 5,02	4830
796	Boote. . . .	6	14 33 31	44 10 53,88	—	53,88	18	—	0,37	15,69		+ 0,40	4841
797	33 Boote. . . .	6	14 34 11	44 56 41,53	—	41,53	16	—	0,89	15,70			4843
798	Boote. . . .	5.6	14 34 18	54 33 52,03	51,63	51,83	11	10	0,83	15,71		+ 4,00	4845
799	Boote. . . .	6	14 37 36	37 17 22,52	22,79	22,66	12	9	0,95	15,47		— 4,49	4863
800	34 Boote. . . .	6	14 37 56	27 3 36,24	36,37	36,31	11	10	0,86	15,35	— 0,81	— 2,60	4864
801	Boote. . . .	6.5	14 38 53	40 59 19,41	—	19,41	18	—	0,87	15,40		+ 1,43	4870
802	Dragone . .	6	14 38 55	61 47 43,73	43,45	43,59	12	10	0,88	15,41		— 1,64	4874
803	*ε* Boote. . . .	2.3	14 39 32	27 36 8,50	8,46	8,48	11	10	0,84	15,38	— 0,01		4876
804	Boote. . . .	6	14 44 36	29 8 5,34	5,13	5,24	16	11	0,82	15,09	— 0,10	— 1,26	4902
805	*h* Boote. . . .	6	14 44 52	46 38 16,06	15,63	15,85	12	9	0,85	15,15		— 1,45	4903

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni		Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.	Epoca media 1875 +		Greenwich	B A.C.	
				dirette	riflesse		dirette / riflesse		—	1872		
			h m s	° ′ ″	″	″			″	″	″	
806	39 Boote. . . .	6	14 45 27	49 14 7,36	7,33	7,35	12 11	0,93	15,00		+ 4,74	4907
807	2164Groomb.	6.5	14 48 16	59 48 9,49	9.42	9,46	16 10	0,80	14,72			4918
808	Boote. . . .	6	14 52 15	50 8 25,55	25,48	25,51	20 11	0,83	14,92		+ 3,65	4937
809	Boote. . . .	6	14 54 38	40 8 31,50	—	31,50	16 —	0,94	14,49		— 1,38	4942
810	40 Boote. . . .	5	14 54 49	39 45 42,08	—	42,08	18 —	0,89	14,44	— 1,55	+ 1,10	4943
811	Boote. . . .	6	14 56 23	47 46 19,16	19,03	19,10	10 11	0,98	14,38		+ 1,05	4952
812	ω Boote. . . .	5.4	14 56 38	25 30 11,94	12,05	12,00	11 10	0,84	14,41	— 0,73	+ 1,42	4953
813	β Boote. . . .	3	14 57 14	40 53 4,27	—	4,27	16 —	0,89	14,44	— 1,08		4958
814	Dragone . .	6	14 58 32	60 41 45,42	45,55	45,48	11 10	0,91	14,26		+ 1,68	4967
815	Boote. . . .	5.6	14 58 42	45 8 0,06	—	0,06	15 —	1,57	14,24		+ 2,88	4965
816	ψ Boote. . . .	4.5	14 59 5	27 26 9,93	10,32	10,13	12 10	1,39	14,23	— 0,74		4969
817	i Boote. . . .	5	14 59 41	48 8 29,69	29,45	25,57	13 10	0,86	14,14		— 0,68	4974
818	k Boote. . . .	5	15 1 17	48 38 5,07	4,96	5,02	10 11	0,98	14,07		+ 1,22	4980
819	c Boote . . .	5.4	15 1 48	25 21 25,27	25,56	25,42	12 12	0,88	14,20		— 1,93	4981
820	Dragone . .	5.6	15 2 44	55 2 17,35	17,44	17,40	10 10	0,90	14,02		+ 8,35	4992
821	b Boote. . . .	6	15 3 0	26 46 52,04	52,10	52,07	10 10	1,49	13,94	— 0,72	— 5,98	4991
822	Boote. . . .	6.7	15 3 9	25 35 17,80	17,53	17,67	11 12	0,84	13,91		— 1,23	4993
823	Boote. . . .	6.7	15 8 50	38 44 0,92	—	0,92	16 —	0,40	33,56		— 1,68	5026
824	χ Boote. . . .	5	15 9 16	29 37 45,41	45,82	45,61	10 10	0,85	13,55	— 0,31	+ 1,83	5031
825	Boote. . . .	6	15 9 39	42 38 15,43	—	15,43	17 —	0,97	13,54		— 2,15	5033
826	δ Boote. . . .	3	15 10 28	33 46 55,28	55,37	55,33	10 10	0,97	13,62	— 1,09	— 0,97	5036
827	Boote. . . .	6	15 12 48	21 2 50,70	50,94	50,84	12 13	0,83	13,28		— 10,72	5048
828	o Corona . . .	6	15 14 58	30 4 13,69	13,91	13,80	11 10	0,80	13,28	— 1,27	+ 0,40	5061
829	Dragone . .	6	15 16 26	52 24 33,96	33,71	33,84	10 10	0,87	13,13		+122,7:	5071
830	50 Boote. . . .	5.6	15 16 48	33 22 54,78	55,08	54,93	11 10	1,01	13,08	— 1,20	— 2,03	5072
831	Boote. . . .	6	15 18 0	40 1 42,91	—	42,91	18 —	0,99	13,03		— 1,31	5076
832	η Corona . . .	5.6	15 18 2	30 44 25,03	25,20	25,12	11 10	0,94	13,27	— 0,48		5075
833	μ Boote. . . .	4.3	15 19 46	37 48 59,23	59,24	59,23	13 10	0,86	12,81	— 1,16		5084
834	ι Dragone . .	3	15 22 9	59 24 16,75	16,68	16,72	11 11	0,85	12,73	— 0,32		5097
835	β Corona . . .	4.3	15 22 41	29 32 15,10	15,19	15,15	10 11	0,80	12,63	— 0,76		5098
836	Dragone . .	6	15 25 23	61 6 7,07	6,89	6,98	12 10	0,89	12,53	— 0,47	— 0,55	5115
837	Boote. . . .	6	15 25 24	48 8 35,60	35,27	35,44	12 10	0,90	12,52		— 0,96	5113
838	ν^1 Boote . . .	4.5	15 26 26	41 15 56,35	—	56,35	18 —	0,99	12,44			5122
839	ν^2 Boote. . . .	4.5	15 27 18	41 19 28,36	—	28,36	16 —	0,88	12,38			5130
840	β Corona . . .	4	15 27 53	31 46 56,13	56,39	56,25	10 10	0,90	12,41			5131

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				—	″	″	
841	α Corona . . .	2	15 29 24	27 8 11,30	11,41	11,35	11	10	0,85	12,32	— 0,93		5143
842	μ Corona. . .	5	15 30 39	39 25 33,79	—	33,79	16	—	0,86	12,17		+ 0,04	5155
843	Boote. . . .	6	15 30 53	43 34 56,82	—	56,82	20	—	0,89	12,15		+ 3,42	5157
844	φ Boote. . . .	5	15 33 20	40 45 40,98	—	40,98	16	—	0,89	11,89			5168
845	Ercole . . .	6	15 34 16	47 12 37,07	37,41	37,24	11	11	0,91	12,04		— 2,96	5177
846	ζ Corona seg.	4	15 34 40	37 2 32,52	32,86	32,69	12	11	1,38	11,93	— 0,74		5178
847	Boote. . . .	6.5	15 34 55	50 49 50,29	50,05	50,17	11	11	0,90	11,87		— 0,68	5181
848	γ Corona. . .	4.3	15 37 30	26 41 34,03	34,40	34,22	10	10	0,83	11,63	— 0,05		5192
849	π Corona. . .	6	15 39 4	32 54 40,88	40,99	40,94	11	11	0,87	11,57		— 0,44	5204
850	Dragone . .	6.5	15 39 26	52 45 22,97	22,61	22,79	14	11	0,86	11,54	+ 0,19	+ 3,04	5210
851	Corona. . .	6	15 43 26	28 32 29,52	29,46	29,49	13	12	1,33	11,26		— 1,29	5236
852	δ Corona . . .	4.5	15 44 21	26 27 7,19	7,11	7,15	12	11	0,90	11,22	— 1,50	— 4 60	5244
853	Dragone . .	5.6	15 44 38	55 45 36,42	36,48	36,45	9	9	0,90	11,15		+ 17,06	5248
854	ρ Serpente . .	5	15 45 47	21 21 17,66	17,84	17,75	12	10	0,92	11,03		— 4,10	5252
855	κ Corona. . .	5.4	15 46 31	36 2 46,23	46,35	46,29	11	10	0,92	11,36	— 0,08	— 3,21	5259
856	χ Ercole . . .	4.5	15 48 20	42 48 7,76	—	7,76	17	—	1,05	10,32		+ 3,09	5271
857	Dragone . .	6	15 49 23	56 11 47,21	47,12	47,16	11	11	0,87	10,82		+ 4,23	5279
858	2 Ercole . . .	6	15 50 28	43 30 12,90	—	12,90	16	—	0,91	10,68		+ 0,42	5287
859	λ Corona. . .	6.5	15 51 14	38 18 32,07	—	32,07	17	—	1,46	10,59	— 0,88	— 0,67	5295
860	4 Ercole . . .	6	15 51 18	42 55 50,00	—	50,00	19	—	1,46	10,68		— 1,28	5298
861	ε Corona . . .	4	15 52 25	27 14 27,53	27,34	27,44	10	10	0,78	10,62	— 1,15		5302
862	Dragone . .	6	15 53 24	59 16 22,30	22,19	22,25	11	10	0,87	10,52		+ 1,20	5307
863	Corona. . .	6	15 54 21	36 59 57,62	57,80	57,71	11	10	1,42	10,43		— 2,34	5310
864	2296Groomb. . .	5.6	15 54 49	55 6 13,06	12,69	12,88	10	10	0,90	10,31			5313
865	Ercole . . .	6	15 55 31	50 14 15,72	16,00	15,86	10	10	1,43	10,37		— 3,40	5316
866	ρ Corona. . .	6.5	15 56 16	33 40 53,15	53,12	53,14	10	10	0,93	11,07	— 1,57	+ 1,76	5319
867	ι Corona. . .	5.4	15 56 26	30 12 6,00	5,83	5,91	10	11	0,94	10,36	— 1,79	— 4,57	5321
868	Corona . . .	6	15 58 44	36 58 38,67	38,86	38,77	10	10	0,91	10,15	— 1,14	— 1,40	5336
869	υ Ercole . . .	4.5	15 58 54	46 23 4,27	4,31	4,29	10	10	1,45	10,18		— 0,84	5338
870	Dragone . .	6.7	15 58 54	53 15 49,83	49,65	49,74	10	10	0,93	10,11		— 1,96	5341
871	θ Dragone . .	4.3	15 59 33	58 53 59,28	59,11	59,20	11	11	1,05	9,73	+ 0,13		5348
872	τ Corona . . .	5.4	16 4 24	36 48 33,93	34,02	33,98	10	10	0,92	9,33	— 1,63	— 2,89	5385
873	φ Ercole . . .	4	16 4 50	45 15 48,72	—	48,72	16	—	0,89	9,62			5388
874	10 Ercole . . .	6	16 6 16	23 49 8,95	9,11	9,03	10	11	0,90	9,57		— 1,74	5399
875	14 Ercole . .	6.7	16 6 21	44 9 11,86	—	11,86	16	—	0,97	9,90		+ 0,78	5400

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse		—			
			h m s	° ′ ″		″				″	″	″	
876	Dragone . .	6	16 7 1	58 15 50,82	50,68	50,75	10	11	0,91	9,49		+408,5	5415
877	Corona . . .	6	16 7 14	36 44 55,54	55,71	55,63	9	10	1,42	9,50	— 0″,23	— 2,20	5411
878	Ercole . . .	6.7	16 7 39	42 41 44,11	—	44,11	16	—	1,47	9,45		+ 2,16	5417
879	σ' Corona . . .	6	16 10 0	34 10 33,99	34,12	34,06	13	10	0,91	9,37	— 1,27		5432
880	17 Ercole . . .	6	16 10 57	23 26 4,61	4,77	4,69	11	10	0,92	9,17		— 3,69	5434
881	υ Corona . . .	6	16 11 44	29 27 38,24	38,63	38,43	11	10	1,46	9,17		+ 3,21	5440
882	Ercole . . .	6	16 14 38	21 26 6,88	6,95	6,92	10	11	0,91	8,90		— 8,14	5452
883	Dragone . .	6	16 15 10	60 4 30,24	30,18	30,21	11	10	0,91	8,86	— 0,69	+ 1,36	5459
884	Ercole . . .	6.7	16 15 39	40 0 30,77	—	30,77	14	—	1,46	8,82		+ 0,37	5460
885	Ercole . . .	6	16 15 42	49 20 16,83	—	16,83	9	10	1,45	8,81		+ 2,00	5461
886	τ Ercole . . .	3.4	16 15 59	46 36 43,81	43,93	43,87	10	10	0,85	8,77	+ 0,54		5463
887	ξ Corona . . .	5	16 17 14	31 10 58,02	58,16	58,09	9	11	0,91	8,55	— 2,41	— 4,81	5473
888	ν^1 Corona . . .	5	16 17 39	34 5 39,80	40,09	39,94	10	11	0,95	8,75		+ 1,42	5479
889	ν^2 Corona . . .	5	16 17 47	34 59 43,37	43,26	43,31	8	10	1,98	8,68		+ 1,94	5480
890	23 Corona . . .	6	16 18 8	32 37 33,58	33,44	33,51	9	11	1,55	8,65		+ 2,01	5484
891	25 Ercole . . .	6.5	16 20 57	37 40 46,82	47,08	46,95	10	10	0,88	8,40	— 0,74	— 1,38	5496
892	Dragone . .	6	16 21 20	52 34 30,09	30,24	30,17	10	10	0,96	8,37		+ 0,56	5499
893	2343 Groomb. .	5.6	16 21 42	55 29 23,32	23,67	23,50	11	11	0,99	8,35	+ 0,10		5502
894	η^2 Dragone . .	3.2	16 22 18	61 47 51,55	51,65	51,60	11	9	0,98	8,19	+ 0,12		5512
895	g Ercole . . .	5.6	16 24 32	42 9 27,13	—	27,13	43	—	0,55	8,02		— 5,62	5523
896	β Ercole . . .	2.3	16 24 51	21 45 48,24	48,57	48,40	12	10	1,05	8,02	+ 0,28		5525
897	Ercole . . .	6	16 25 52	22 27 55,30	55,59	55,45	10	10	1,06	8,00		— 3,47	5530
898	32 Ercole . . .	6	16 28 37	30 45 44,42	44,56	44,49	10	10	0,94	7,85	— 1,31	— 0,14	5541
899	Ercole . . .	6.7	16 29 20	38 20 59,97	—	59,97	10	10	1,53	7,86	— 0,02	+ 8,14	5546
900	Dragone . .	6	16 29 39	50 24 20,24	20,16	20,20	10	10	1,42	7,71		— 1,66	5549
901	σ' Ercole . . .	4	16 30 4	42 41 44,91	—	44,91	14	—	0,99	7,61	— 0,54		5552
902	Dragone . .	6	16 30 40	61 55 8,38	8,42	8,40	14	12	1,42	7,58	— 0,34	— 3,50	5560
903	Dragone . .	6	16 30 56	52 29 50,21	50,27	50,24	10	10	1,46	7,60		+ 0,08	5559
904	16 Dragone . .	5.7	16 33 14	53 9 6,96	7,23	7,10	10	10	1,07	7,39	— 0,57	+ 0,40	5574
905	17 Dragone . .	6	16 33 16	53 10 34,61	34,67	34,64	9	13	0,93	7,41	— 0,45	+ 0,74	5575
906	42 Ercole . . .	5.4	16 35 21	49 10 24,78	24,93	24,96	11	10	1,46	7,26		+ 2,51	5596
907	Dragone . .	6.5	16 35 29	56 15 38,33	38,42	38,37	11	12	1,41	7,23		+ 6,01	5599
908	Ercole . . .	6	16 35 50	25 6 3,71	3,65	3,68	9	12	1,44	7,21		— 5,53	5597
909	ζ Ercole . . .	3.2	16 36 35	31 49 49,62	49,23	49,42	10	10	0,81	6,69	— 0,70		5601
910	Ercole . . .	6	16 38 37	36 44 41,63	42,13	41,83	11	9	1,07	6,98	+ 0,26	— 22,83	5615

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″		″				—	″	″	
911	η Ercole . . .	3	16 38 37	39 9 38,96	—	38,96	16	—	0,98	7,05	— 1,49		5617
912	Ercole . . .	6	16 39 15	34 16 13,45	13,61	13,53	9	9	1,48	6,93		+ 5,21	5619
913	Dragone . .	5.6	16 40 25	55 55 13,09	12,87	12,98	11	11	0,89	6,83		+ 5,31	5629
914	2377 Groomb. . .	5	16 42 56	57 0 20,87	20,74	20,81	10	10	0,93	6,56	— 0,26		5643
915	Ercole . . .	6.7	16 43 20	42 27 43,33	—	43,33	16	—	1,55	6,58		— 3,35	5644
916	Dragone . .	6	16 44 18	55 37 55,43	55,65	55,54	10	9	1,43	6,54		+ 0,42	5658
917	52 Ercole . . .	5	16 45 34	46 12 5,97	6,14	6,06	10	10	1,48	6,47		— 1,64	5667
918	50 Ercole . . .	6	16 45 46	30 1 14,18	14,25	14,22	9	11	0,95	6,38	— 2,06	— 0,88	5666
919	51 Ercole . . .	6	16 46 34	24 52 4,29	4,56	4,42	9	11	0,91	6,30		+ 1,60	5677
920	53 Ercole . . .	5	16 48 13	31 54 35,09	35,38	35,24	11	10	0,94	6,18	— 0,82	— 2,06	5693
921	56 Ercole . . .	6.7	16 49 54	25 55 59,67	59,58	59,63	11	11	0,96	6,04		— 2,93	5703
922	Ercole . . .	6.7	16 50 44	46 44 31,09	31,10	31,10	12	10	1,05	6,00		— 1,25	5706
923	Dragone . .	5.6	16 52 52	60 33 45,06	45,13	45,10	11	11	0,95	5,84	— 1,26	— 1,00	5717
924	Dragone . .	6	16 53 34	62 17 55,96	56,00	55,98	12	9	1,44	5,73		— 2,14	5728
925	Dragone . .	6	16 55 6	62 33 43,47	43,41	43,44	10	11	0,96	5,61	— 0,34	+ 0,22	5734
926	ε Ercole . . .	3.4	16 55 30	31 6 42,50	42,49	42,49	10	10	0,74	5,54	— 0,16		5731
927	d Ercole . . .	5	16 56 59	33 45 1,21	1,23	1,22	12	10	0,99	5,41	— 0,63	— 2,00	5747
928	Dragone . .	6.7	16 57 4	56 52 21,06	21,00	21,03	10	10	0,95	5,07		— 15,70	5752
929	Ercole . . .	6	17 1 17	43 58 57,68	—	57,68	16	—	0,94	5,13		+ 0,43	5775
930	Ercole . . .	6.7	17 1 30	48 58 37,31	37,27	37,29	11	10	1,48	5,25		+ 5,14	5776
931	μ Dragone . .	5.4	17 2 45	54 38 8,83	8,77	8,80	11	11	0,95	4,93	— 1,32	+ 5,60	5785
932	Ercole . . .	5	17 3 36	36 5 54,56	54,75	54,66	12	10	0,96	4,91	— 1,19	— 1,78	5788
933	2415 Groomb. . .	6	17 3 42	40 40 48,83	—	48,83	17	—	1,09	4,89			5790
934	Dragone . .	6	17 5 9	58 25 56,52	56,51	56,51	10	9	0,99	4,86		+ 1,42	5797
935	Dragone . .	6	17 5 13	51 0 5,46	5,34	5,40	10	10	0,97	4,71		— 2,35	5795
936	Dragone . .	6	17 5 23	55 55 39,49	39,35	39,42	11	10	0,96	4,76		+ 4,32	5801
937	δ Ercole . . .	3	17 9 54	24 59 17,08	16,81	16,95	11	11	0,94	4,50			5828
938	π Ercole . . .	3.4	17 10 42	36 57 4,60	4,41	4,50	10	11	0,80	4,27	+ 0,10		5834
939	u Ercole . . .	5	17 12 42	33 14 8,98	9,27	9,13	11	10	0,95	4,09	— 0,66	— 2,51	5842
940	e Ercole . . .	5	17 13 22	37 25 24,51	24,69	24,60	11	10	0,94	4,06		— 3,55	5847
941	Ercole . . .	6	17 13 38	49 49 33,60	33,48	33,54	12	10	1,44	4,24		+ 14,51	5853
942	70 Ercole . . .	6	17 15 45	24 37 30,42	30,66	30,54	10	10	0,94	3,86	— 1,10	+ 0,99	5860
943	u Ercole . . .	5.6	17 15 59	32 37 47,35	47,41	47,38	10	10	0,95	4,91			5863
944	74 Ercole . . .	6.5	17 16 49	46 21 50,75	50,50	50,63	11	10	1,08	3,74	— 1,66	— 0,13	5871
945	Ercole . . .	5	17 17 37	40 5 53,20	—	53,20	17	—	1,53	3,69		— 6,58	5874

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse		—			
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
946	73 Ercole . . .	6	17 18 53	23 4 39,72	39,81	39,76	10	10	0,95	3,61		— 1,47	5883
947	ρ^2 Ercole . . .	4	17 19 22	37 15 42,92	43,19	43,06	12	11	0,94	3,52		— 2,42	5886
948	Dragone . .	6	17 21 13	57 7 29,41	29,18	29,30	12	10	0,95	3,32		— 6,15	5902
949	x Ercole . . .	6	17 23 25	48 21 56,25	56,70	56,47	12	10	0,93	3,21			5911
950	Dragone . .	6.5	17 24 4	60 9 12,74	12,99	12,87	11	10	0,99	3,13	— 0,83	+ 31,52	5917
951	Dragone . .	6.7	17 24 12	58 45 24,53	24,65	24,59	10	10	0,98	3,08		— 1,34	5918
952	λ Ercole . . .	5	17 25 41	26 12 21,44	21,51	21,48	10	10	0,52	2,92	— 1,48	— 5,47	5922
953	Ercole . . .	6	17 26 30	38 58 36,29	—	36,29	17	—	1,58	2,92		— 0,26	5929
954	78 Ercole . . .	6	17 26 55	28 29 57,17	57,38	57,28	11	10	0,97	2,82	— 1,45	— 2,52	5931
955	β Dragone . .	3.2	17 27 37	52 23 40,26	40,33	40,30	10	10	1,47	2,82	— 1,14		5937
956	Ercole . . .	6	17 29 10	41 20 58,59	—	58,59	18	—	0,90	2,69	— 0,53	— 4,66	5944
957	ν^1 Dragone . .	4.5	17 29 43	55 16 13,31	12,89	13,10	12	10	0,96	2,61			5950
958	ν^2 Dragone . .	4.5	17 29 48	55 15 31,29	31,27	31,28	10	10	0,98	2,62			5951
959	Ercole . . .	6	17 31 51	30 51 47,98	48,29	48,14	10	10	1,60	2,45	— 0,87	— 1,84	5962
960	79 Ercole . . .	6	17 32 22	24 23 8,37	8,40	8,39	12	12	0,98	2,39		+ 0,01	5967
961	y Ercole . . .	6	17 33 21	48 39 33,30	32,91	33,10	12	10	0,96	2,29		+ 2,35	5975
962	26 Dragone . .	6.5	17 33 41	61 58 13,12	13,40	13,26	12	11	0,99	2,66	— 1,47	— 11,80	5978
963	Ercole . . .	6	17 35 14	31 16 10,17	10,37	10,27	10	9	0,90	2,17	— 2,16	— 2,87	5986
964	ι Ercole . . .	3.4	17 35 56	46 4 24,75	24,88	24,81	10	11	0,97	2,11	— 1,57		5990
965	Ercole . . .	6	17 35 57	24 34 35,28	35,22	35,25	12	6	1,10	2,17	— 0,37	+ 1,73	5988
966	Ercole . . .	6	17 36 50	43 31 58,86	—	58,86	19	—	1,17	2,02		+ 3,98	5997
967	83 Ercole . . .	6	17 37 21	24 37 43,01	43,23	43,12	12	10	0,80	1,93	— 0,38	— 5,51	5999
968	84 Ercole . . .	6	17 38 14	24 23 0,40	0,51	0,46	9	10	0,98	1,79	— 0,63	— 3,26	6005
969	Ercole . . .	6.7	17 39 23	44 8 21,88	—	21,88	17	—	0,92	1,81		+ 1,03	6013
970	μ Ercole . . .	3.4	17 41 34	27 47 41,66	41,68	41,67	16	11	0,90	2,35	— 1,38		6021
971	87 Ercole . . .	6	17 43 45	25 39 56,80	56,65	56,73	21	13	0,53	1,21	— 0,67	— 30,17	6033
972	30 Dragone . .	5	17 46 5	50 48 40,60	40,62	40,61	17	10	0,91	1,03		— 0,25	6052
973	z Ercole . . .	6	17 46 47	48 25 42,68	42,04	42,36	11	10	1,04	1,14		— 0,44	6056
974	Ercole . . .	6.7	17 48 1	40 0 38,09	—	38,09	13	—	1,01	1,03	+ 0,26	+ 4,40	6062
975	f Ercole . . .	5	17 49 13	40 1 34,63	—	34,63	18	—	0,52	0,90		+ 1,70	6068
976	89 Ercole . . .	6	17 50 23	26 4 15,90	15,90	15,90	12	12	0,95	0,80	— 1,72	— 3,65	6073
977	ξ Dragone . .	3.4	17 51 22	56 53 33,75	33,57	33,66	12	10	0,97	0,68	— 2,09		6079
978	θ Ercole . . .	4	17 51 58	37 16 4,90	4,98	4,94	10	10	0,99	0,68			6082
979	ξ Ercole . . .	4.3	17 52 54	29 15 44,05	44,41	44,23	10	15	1,01	0,65	— 1,86		6084
980	γ Dragone . .	2.3	17 53 42	51 30 15,65	15,66	15,65	11	11	1,00	0,59	— 0,24		6091

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione ±	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
981	ν Ercole . . .	4.5	17 53 43	30 12 2,14	2,53	2,34	11	10	1,63	0,55	— 2,26	— 0,06	6087
982	Ercole . . .	6	17 54 10	43 25 43,98	—	43,98	18	—	0,97	0,51		+ 1,45	6095
983	95 Ercole . . .	4.5	17 56 12	21 35 52,12	52,16	52,14	12	9	0,97	0,28		— 2,76	6106
984	Ercole . . .	6	17 56 22	45 30 28,40	—	28,40	14	—	1,59	0,38		+ 1,32	6109
985	96 Ercole . . .	5	17 57 2	20 50 5,21	5,26	5,24	12	10	1,01	0,21	— 0,44	+ 4,43	6110
986	97 Ercole . . .	6	17 57 16	22 55 26,12	26,06	26,09	10	10	0,92	0,22	— 0,58	— 2,91	6116
987	Ercole . . .	6	17 59 53	48 27 32,51	32,16	32,34	14	10	0,92	0,10		— 0,81	6129
988	98 Ercole . . .	6	18 0 46	22 12 30,16	30,24	30,20	13	15	1,01	0,10	— 2,91	— 7,50	6134
989	*b* Ercole . . .	5	18 2 17	30 32 42,63	43,08	42,86	10	10	1,64	0,28		— 0,59	6147
990	*o* Ercole . . .	4.3	18 2 40	28 44 47,48	47,70	47,59	11	10	0,97	0,24	— 1,36		6150
991	102 Ercole . . .	4.5	18 3 25	20 47 45,94	46,21	46,08	10	10	1,02	0,29		— 2,09	6157
992	101 Ercole. . . .	5	18 3 29	20 1 37,72	37,93	37,82	11	10	1,13	0,26	— 0,30	+ 3,40	6159
993	Ercole . . .	5	18 3 43	43 26 48,92	—	48,92	17	—	0,98	0,33		— 2,50	6162
994	A Ercole . . .	5	18 7 12	31 22 30,63	30,89	30,76	22	16	0,53	0,70	— 1,41	— 5,46	6178
995	Dragone . .	6	18 7 48	56 14 19,01	18,96	18,99	12	10	1,09	0,68		+ 0,21	6184
996	Dragone . .	6	18 7 57	54 14 59,84	60,02	59,93	11	10	1,11	0,69			6185
997	Lira	6	18 8 55	38 44 23,31	—	23,31	18	—	1,07	0,78	+ 1,29	+ 16,83	6193
998	2533Groomb. . .	6.5	18 11 45	42 7 2,58	—	2,58	41	—	0,53	1,03	— 1,71	— 0,74	6203
999	Dragone . .	6.7	18 12 29	56 32 45,27	45,41	45,34	10	10	1,49	1,09		+ 2,92	6216
1000	Lira	6	18 13 10	40 53 18,26	—	18,26	15	—	1,13	1,15		+ 5,69	6218
1001	105 Ercole . . .	6	18 14 2	24 23 43,40	43,36	43,38	10	10	1,01	1,23		— 0,14	6223
1002	106 Ercole . . .	6	18 15 1	21 54 34,68	34,87	34,78	10	9	1,15	1,30		— 6,22	6231
1003	*x* Lira.	5.4	18 15 29	36 0 34,02	34,06	34,04	13	10	0,98	1,03	— 0,69	— 0,17	6235
1004	108 Ercole . . .	5.6	18 16 7	29 48 2,07	2,35	2,21	10	10	1,07	1,46		+ 0,86	6237
1005	*t* Ercole . . .	5	18 16 8	28 48 42,60	42,86	42,73	10	10	1,61	1,47		— 1,17	6238
1006	Ercole . . .	6	18 16 56	23 13 23,59	23,84	23,71	9	10	1,16	1,56	+ 0,03	— 1,28	6241
1007	Dragone . .	6	18 17 0	51 17 35,62	35,77	35,70	9	10	1,10	1,49		— 2,25	6246
1008	Dragone . .	6	18 17 59	49 39 54,87	55,11	54,99	10	11	1,57	1,57		+ 2,41	6252
1009	Dragone . .	5	18 18 21	49 3 32,72	32,89	32,80	8	10	1,57	1,61		+ 4,45	6255
1010	109 Ercole . . .	4	18 18 22	21 42 51,81	51,54	51,67	10	11	1,04	1,33	— 0,14		6251
1011	Dragone . .	6	18 18 32	51 14 27,81	28,00	27,91	10	12	1,25	1,62		— 0,68	6258
1012	μ Lira	5.6	18 20 6	39 26 23,40	—	23,40	17	—	1,58	1,76	— 1,55	— 1,05	6268
1013	*b* Dragone . .	5	18 22 5	58 43 43,69	43,58	43,64	18	10	0,90	1,98			6289
1014	Ercole . . .	6	18 24 25	23 47 4,47	4,21	4,34	23	10	0,81	2.13	+ 0,13	— 0,58	6300
1015	Dragone . .	5.6	18 31 6	52 15 17,39	17,54	17,47	26	12	0,56	2,71		+ 1,35	6350

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B.A.C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″		″				+ ″	″	″	
1016	α Lira	1	18 32 42	38 40 6,29	—	6,29	20	—	1,02	3,13	— 0,47		6355
1017	Lira	6	18 33 58	39 33 32,45	—	32,45	16	—	0,93	2,87		+ 6,45	6357
1018	Lira	6.7	18 35 31	40 49 17,02	—	17,02	16	—	1,13	3,10	— 0,67	— 0,20	6364
1019	Lira	6	18 35 58	38 15 6,43	—	6,43	16	—	1,19	3,07		+ 2,41	6365
1020	Dragone . .	6	18 36 5	55 8 48,63	48,57	48,60	12	11	0,98	3,42	— 0,82	— 11,93	6368
1021	Dragone . .	6	18 36 53	60 35 43,96	43,80	43,88	11	10	1,49	3,22	+ 0,34	+ 4,90	6373
1022	Dragone . .	6	18 37 1	52 4 44,97	44,94	44,95	15	9	0,93	3,26	+ 0,10	— 0,32	6372
1023	Dragone . .	6	18 39 50	62 37 31,71	31,54	31,62	11	10	1,06	3,47	— 0,69	+ 7,14	6393
1024	4 ε Lira prec. .	4.5	18 40 12	39 32 24,94	—	24,94	17	—	1,16	3,56	— 1,33		6390
1025	ε Dragone . .	5.6	18 40 12	55 24 49,15	48,81	48,98	11	10	1,06	3,50		+ 6,07	6395
1026	5 ε Lira	5.4	18 40 14	39 28 58,29	—	58,29	16	—	1,03	3,59			6391
1027	110 Ercole . . .	4	18 40 17	20 25 40,80	41,41	41,10	8	10	0,94	3,15			6387
1028	ζ¹ Lira	4.5	18 40 28	37 28 32,04	32,24	32,14	11	11	1,58	3,59		— 4,37	6392
1029	ζ² Lira	4.5	18 40 30	37 27 53,66	53,95	53,81	10	10	1,58	3,61		— 7,50	6394
1030	Lira	6	18 42 13	41 18 31,17	—	31,17	16	—	1,05	3,68		+ 1,56	6404
1031	Dragone . .	6.7	18 42 50	60 54 56,93	57,05	56,99	11	10	1,51	3,69	— 0,25	+ 3,62	6410
1032	Dragone . .	6	18 43 55	52 51 5,00	4,72	4,86	10	12	1,05	3,82		— 0,09	6419
1033	Dragone . .	6	18 44 16	49 17 58,55	58,31	58,43	10	9	1,56	3,84		+ 1,09	6421
1034	Dragone . .	6	18 44 58	48 37 32,05	31,90	31,97	10	11	1,57	3,91		+ 6,01	6428
1035	ν¹ Lira	6	18 45 6	32 40 12,00	12,05	12,03	10	10	1,05	3,94		— 2,57	6426
1036	ν² Lira	5.6	18 45 13	32 24 28,31	28,79	28,55	10	9	1,22	3,94		— 2,15	6427
1037	β Lira	var.	18 45 28	33 13 7,41	7,48	7,45	10	10	1,05	3,92	— 0,66		6429
1038	112 Ercole . . .	5	18 46 56	21 16 32,45	32,61	32,53	10	9	1,04	4,15		— 9,61	6438
1039	Dragone . .	6	18 48 47	52 48 52,08	51,94	52,01	9	13	0,52	4,24		+ 17,76	6452
1040	δ¹ Lira	5.6	18 49 21	36 48 59,37	59,69	59,53	8	10	1,56	4,30		— 2,75	6456
1041	o Dragone seg.	5.4	18 49 21	59 14 9,23	9,65	9,44	10	12	1,07	4,30	— 0,66		6463
1042	113 Ercole . . .	4.5	18 49 28	22 29 16,84	17,15	17,00	10	10	1,58	4,36	— 0,51	— 5,38	6453
1043	Dragone . .	6	18 50 7	50 33 16,19	16,14	16,16	10	11	1,60	4,35		+ 3,20	6470
1044	δ² Lira. . . .	5	18 50 8	36 44 27,54	27,73	27,64	10	10	1,05	4,39		— 2,98	6466
1045	Lira	6	18 50 18	33 48 37,17	37,07	37,12	10	10	1,21	4,38	— 0,89	— 2,26	6468
1046	Lira	6	18 50 52	41 26 36,57	—	36,57	15	—	1,76	4,42		+ 0,07	6473
1047	Dragone . .	6	18 51 29	48 42 13,48	13,11	13,30	11	10	1,09	4,35		— 1,65	6476
1048	13 R Lira	4.5	18 51 32	43 46 56,76	—	56,76	15	—	1,20	4,55	— 0,10		6475
1049	Dragone . .	6	18 51 35	57 19 42,11	41,75	41,93	11	10	1,09	4,48		+ 0,18	6477
1050	Lira	6	18 52 19	32 44 31,78	31,53	31,66	14	10	0,98	4,42		— 8,14	6480

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse					
			h m s	° ′ ″	″	″				+			
1051	γ Lira	3.4	18 54 16	32 31 10,24	10,31	10,27	10	10	0,98	4,71	+ 0,46		6491
1052	48 Dragone . .	6	18 54 38	57 38 59,16	59,05	59,10	10	12	1,09	4,67		+ 0,20	6496
1053	Lira	6	18 54 41	40 30 30,71	—	30,71	16	—	1,63	4,76		+ 0,59	6493
1054	Lira	6	18 55 0	39 2 43,65	—	43,65	10	10	1,72	4,77		+ 0,36	6495
1055	λ Lira	5.6	18 55 18	31 58 18,29	18,02	18,16	10	10	1,09	4,80		— 2,04	6497
1056	Dragone . .	6.7	18 55 25	58 3 13,81	13,60	13,70	10	10	1,23	4,74		+ 5,82	6500
1057	Dragone . .	6.7	18 56 2	62 13 40,85	40,78	40,82	10	10	1,60	4,85	+ 0,53	— 0,67	6508
1058	Lira	6	18 57 41	47 51 28,97	29,18	29,08	10	10	1,22	5,00		— 0,94	6516
1059	16 Lira	5	18 57 55	46 45 30,21	30,66	30,44	10	11	1,23	4,95		— 2,26	6520
1060	49 Dragone . .	6	18 58 15	55 28 47,62	47,69	47,65	10	10	1,06	4,98		+ 4,50	6522
1061	Dragone . .	6	18 59 11	52 4 48,00	48,25	48,13	10	11	1,05	5,12		— 1,54	6530
1062	Lira	6	19 0 11	31 33 32,04	31,96	32,00	10	10	1,03	5,21		— 12,05	6534
1063	Lira	6.5	19 1 40	28 25 59,47	59,77	59,62	9	10	1,00	5,28		+ 4,27	6547
1064	51 Dragone . .	6.5	19 2 6	53 12 18,92	18,93	18,92	11	12	1,07	5,37		+ 1,22	6551
1065	Dragone . .	6	19 2 7	61 54 23,91	23,81	23,86	10	10	1,57	5,44	— 0,39	+ 1,42	6555
1066	17 Lira	5.6	19 2 42	32 18 20,18	20,20	20,19	10	10	1,03	5,36		— 1,40	6553
1067	ι Lira	5	19 2 51	35 54 19,08	18,67	18,88	11	10	0,99	5,42	— 0,81		6556
1068	19 Lira	6	19 6 58	31 4 32,66	32,70	32,68	13	10	0,95	5,84	— 1,45	— 7,62	6571
1069	Volpetta . .	6	19 7 14	21 20 42,03	42,24	42,14	12	10	1,54	5,80		— 0,93	6574
1070	Cigno . . .	6	19 8 51	49 36 21,13	20,80	20,97	13	10	0,99	5,93		— 13,51	6579
1071	53 Dragone . .	6.5	19 9 18	56 38 49,14	49,46	49,30	10	10	0,96	6,02	+ 0,85	+ 0,30	6583
1072	η Lira	4.5	19 9 30	38 55 55,10	—	55,10	17	—	1,20	6,04	— 0,16	— 2,34	6581
1073	1 Volpetta . .	5.4	19 10 51	21 10 14,81	14,99	14,90	10	11	1,04	6,16	— 1,48	— 6,07	6589
1074	Lira	6.5	19 11 34	40 8 29,23	—	29,23	16	—	1,69	6,16		— 3,19	6593
1075	54 Dragone . .	5.6	19 11 41	57 29 24,11	24,16	24,14	10	10	1,57	6,09		— 0,73	6601
1076	θ Lira	4.5	19 12 2	37 54 43,21	—	43,21	16	—	1,06	6,19	— 0,96		6599
1077	Cigno . . .	6	19 12 3	49 51 4,36	4,00	4,18	10	11	1,05	6,20		+ 1,55	6603
1078	2 Volpetta . .	6	19 12 26	22 48 6,70	6,53	6,62	10	11	1,09	6,20		— 1,93	6602
1079	κ Cigno . . .	4	19 14 13	53 8 18,22	18,12	18,17	11	11	1,07	6,48	— 0,85		6623
1080	Lira	6	19 14 47	40 7 50,32	—	50,32	15	—	1,20	6,43		— 0,05	6624
1081	Cigno . . .	6	19 15 18	49 20 18,02	17,83	17,93	11	11	1,19	6,47	— 0,68	+ 2,64	6626
1082	Cigno . . .	6.7	19 16 50	54 8 37,94	37,83	37,88	10	10	0.95	6,60		+ 8,16	6635
1083	3 Volpetta . .	5.6	19 17 44	26 1 25,29	25,24	25,27	10	10	1,03	6,68	— 0,69	— 2,98	6637
1084	Dragone . .	6	19 17 58	57 24 33,12	33,27	33,20	10	9	1,20	6,69		+ 2,18	6640
1085	2 Cigno . . .	5	19 19 12	29 22 40,69	40,87	40,78	10	12	1,00	6,84		— 1,74	6648

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.		Epoca media 1875 +		Greenwich	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse		+	1872·		
			h m s										
1086	Lira.	6	19 19 59	43° 8′ 42″,03	—	42″,03	16	—	1,19	6″,85		— 2″,43	6656
1087	Volpetta . .	6.5	19 20 15	24 41 18,01	17″,95	17,98	11	10	1,01	6,24	— 0″,05	+ 0,51	6657
1088	4 Cigno. . . .	5	19 21 39	36 4 5,31	5,56	5,44	9	11	0,99	7,04		— 4,23	6667
1089	α Volpetta . .	4.5	19 23 30	24 24 46,84	47,10	46,97	17	10	0,94	7,05	— 0,70	— 1,35	6674
1090	8 Volpetta . .	5.6	19 23 44	24 30 43,93	43,94	43,94	8	11	0,98	7,06		+ 4,68	6676
1091	ι¹ Cigno. . . .	6	19 24 22	52 3 60,01	59,80	59,90	10	10	0,97	7,18	+ 0,19	— 0,77	6687
1092	β Cigno. . . .	3	19 25 41	27 41 54,22	54,35	54,29	11	10	0,99	7,34	— 0,06		6690
1093	ι² Cigno. . . .	4	19 26 33	51 27 50,80	50,73	50,77	12	10	0,97	7,50	— 0,31		6697
1094	8 Cigno. . . .	5.4	19 27 7	34 11 16,25	16,35	16,30	10	11	1,01	7,49	— 2,01	— 4,40	6698
1095	Dragone . .	6	19 29 7	58 19 57,59	57,50	57,55	9	11	1,25	7,61		— 25,25	6712
1096	Cigno. . . .	6	19 29 15	38 29 25,84	—	25,84	16	—	1,22	7,61		+ 1,76	6711
1097	9 Cigno. . . .	6	19 29 53	29 11 20,60	20,87	20,73	10	10	1,55	7,62		+ 1,33	6714
1098	Cigno. . . .	6	19 30 15	48 59 25,93	25,70	25,81	10	11	1,58	7,70		+ 0,11	6717
1099	Cigno. . . .	6	19 30 37	42 8 21,92	—	21,92	32	—	1,10	7,73		— 0,11	6718
1100	Cigno. . . .	6	19 30 47	43 40 18,09	—	18,09	16	—	1,69	7,73		+ 1,44	6720
1101	Cigno. . . .	6	19 31 6	47 53 33,26	33,24	33,25	8	11	1,63	7,77		— 4,42	6721
1102	Cigno. . . .	6	19 31 6	50 58 8,79	8,79	8,79	10	11	1,76	7,66	— 0,63	— 6,11	6723
1103	11 Cigno. . . .	6	19 31 19	36 40 6,02	6,25	6,14	10	10	1,58	7,82	+ 0,12	— 2,11	6722
1104	Cigno. . . .	5.6	19 32 34	43 25 36,58	—	36,58	16	—	1,30	7,88		— 0,12	6728
1105	Cigno. . . .	7	19 32 34	49 57 33,06	32,87	32,96	9	12	1,63	7,90		+ 2,73	6730
1106	Cigno. . . .	6	19 32 46	44 25 8,20	—	8,20	16	—	1,72	7,90		— 6,68	6731
1107	θ Cigno. . . .	5.4	19 33 5	49 55 56,89	56,67	56,78	10	10	1,03	8,14			6734
1108	φ Cigno. . . .	5	19 34 26	29 51 58,74	59,08	58,91	9	11	0,97	8,09	+ 0,12	— 0,03	6740
1109	Cigno. . . .	5.6	19 34 29	48 59 33,88	33,60	33,74	8	11	1,17	7,91		+ 6,61	6741
1110	14 Cigno. . . .	6	19 35 22	42 31 47,34	—	47,34	16	—	1,17	8,17		— 3,82	6745
1111	Cigno. . . .	6	19 35 52	54 40 53,83	53,68	53,75	11	13	1,05	8,14		+ 5,19	6748
1112	Cigno. . . .	6.5	19 36 58	45 13 45,28	—	45,28	17	—	1,63	8,23		+ 5,26	6754
1113	c Cigno. . . .	6.5	19 38 30	50 14 8,23	8,33	8,30	8	10	1,11	8,21		— 2,77	6763
1114	10 Volpetta . .	6	19 38 31	25 28 26,33	26,72	26,52	11	11	1,02	8,35	— 0,30	+ 4,24	6758
1115	Cigno. . . .	6	19 38 46	38 22 28,60	—	28,60	15	—	1,72	8,38		+ 0,27	6765
1116	Volpetta. . .	6	19 38 49	26 50 16,10	15,94	16,02	10	10	1,10	8,38		— 2,81	6762
1117	Cigno. . . .	6	19 39 34	41 28 25,66	—	25,66	17	—	1,71	8,45		+ 0,73	6769
1118	15 Cigno. . . .	5.6	19 39 46	37 3 12,15	12,64	12,39	11	11	1,07	8,48			6771
1119	Cigno. . . .	5	19 40 47	57 43 7,78	7,64	7,71	9	9	1,58	8,54		+ 3,09	6780
1120	δ Cigno. . . .	3	19 41 4	44 49 35,32	—	35,32	15	—	1,01	8,58	— 0,70		6779

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Declinazione media 1875,0 Osservazioni riflesse	Declinazione media 1875,0 medio	Osservazioni Num. dirette	Osservazioni Num. riflesse	Osservazioni Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	Differenza coi Cataloghi B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
1121	Cigno . . .	6.7	19 41 12	34 42 32,42	32,61	32,51	10	11	1,15	8,42		+ 8,74	6777
1122	χ' Cigno. . . .	5.6	19 41 41	33 26 15,10	15,41	15,26	11	11	1,02	8,19	— 1,65	— 4,38	6784
1123	Cigno . . .	6	19 43 48	47 35 56,57	56,70	56,64	10	10	1,24	8,78		— 1,08	6799
1124	Cigno. . . .	var	19 44 4	33 7 31,29	31,36	31,32	11	11	1,06	8,78		+ 1,78	6800
1125	Cigno . . .	6	19 45 2	38 23 46,86	—	46,86	16	—	1,24	8,75		+ 4,79	6806
1126	12 Volpetta . .	5	19 45 41	22 17 37,33	37,17	37,25	11	10	1,03	8,97	— 0,02	— 6,55	6810
1127	Dragone . .	6	19 46 1	59 6 18,15	18,15	18,15	10	10	1,25	8,95		+ 9,21	6818
1128	19 Cigno . . .	6	19 46 8	38 24 6,04	—	6,04	16	—	1,64	9,08		+ 0,52	6813
1129	Cigno. . . .	6	19 46 20	40 16 57,25	—	57,25	16	—	1,74	8,98		— 1,14	6817
1130	d Cigno. . . .	5.6	19 47 29	52 40 17,78	17,98	17,88	10	10	1,05	9,02		— 2,09	6824
1131	13 Volpetta . .	5.4	19 48 9	23 45 17,41	17,57	17,49	11	11	0,95	9,19	— 0,31	— 2,80	6827
1132	Cigno . . .	6	19 48 26	47 36 36,65	36,10	36,38	11	11	1,61	9,14		+ 1,96	6830
1133	Dragone . .	6	19 48 26	60 53 15,87	15,69	15,78	10	10	1,29	9,14	— 0,37	+ 4,45	6834
1134	23 Cigno . . .	5.6	19 50 43	57 11 45,88	45,92	45,90	10	10	1,06	9,32		— 1,60	6847
1135	Dragone . .	5.6	19 51 22	59 22 42,52	42,66	42,59	10	10	1,62	9,36		— 11,09	6852
1136	22 Cigno. . . .	5.6	19 51 24	38 9 18,26	—	18,26	17	—	1,06	9,37	— 1,70	— 2,20	6849
1137	η Cigno. . . .	4.5	19 51 37	34 45 7,13	7,08	7,11	10	10	1,57	9,34	— 2,21	+ 1,45	6851
1138	ψ Cigno. . . .	5	19 52 24	52 6 27,92	27,76	27,84	11	10	0,76	9,43	— 0,53		6856
1139	Dragone . .	6	19 52 41	60 29 32,23	32,48	32,36	9	9	1,66	9,47	— 1,14	+ 0,16	6861
1140	Cigno . . .	6.5	19 52 53	40 1 56,96	—	56,96	16	—	1,66	9,49		— 1,08	6857
1141	Cefeo. . . .	6	19 52 53	57 55 12,90	12,81	12,86	10	10	1,63	9,49		— 4,97	6863
1142	Cigno. . . .	6	19 53 1	38 7 20,20	—	20,20	16	—	1,69	9,44		+ 1,39	6860
1143	Cigno, . . .	6	19 53 20	50 34 2,57	2,96	2,77	10	11	1,70	9,52		+ 2,67	6865
1144	Cefeo. . . .	6.5	19 53 33	58 30 46,79	—	46,79	10	—	1,50	9,52		+ 2,43	6867
1145	14 Volpetta . .	6.5	19 53 49	22 45 44,04	44,37	44,21	6	10	1,62	9,53	— 0,81	+ 3,33	6866
1146	25 Cigno . . .	6.5	19 55 15	36 42 3,48	3,64	3,56	9	8	1,64	9,75	— 0,82	— 5,34	6875
1147	Cigno . . .	6	19 55 24	45 25 54,65	—	54,65	14	—	1,68	9,68		— 0,90	6876
1148	Cigno . . .	6	19 55 56	51 42 50,24	50,01	50,13	9	6	1,14	9,67		+ 2,59	6881
1149	15 Volpetta . .	5	19 55 57	27 24 33,37	33,70	33,53	14	10	1,68	9,80	+ 0,20	— 4,45	6879
1150	Volpetta . .	5	19 56 27	24 27 16,78	17,07	16,93	10	10	1,25	9,80		— 2,87	6882
1151	16 Volpetta . .	5	19 56 43	24 35 20,42	20,49	20,46	11	12	1,08	9,87		— 1,80	6883
1152	e Cigno . . .	6.5	19 57 49	49 45 27,35	27,48	27,41	11	10	1,02	9,85	+ 0,40	+ 3,33	6895
1153	17 Volpetta . .	5.6	20 1 31	23 15 18,25	18,56	18,41	10	9	0,65	10,16	— 1,26	— 3,31	6912
1154	b^1 Cigno . . .	6.5	20 1 43	35 37 44,58	44,31	44,45	9	11	1,55	9,75		— 0,43	6915
1555	Cigno. . . .	6	20 1 43	51 28 52,41	52,61	52,51	9	10	1,09	10,16		+ 3,11	6918

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni		Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″	″	″			+	″	″	
1156	Cigno	6	20 2 31	55 58 49,07	48,88	48,97	10	10	1,26	10,21	+ 5,18	6924
1157	Cigno	6.5	20 2 56	52 47 49,59	49,76	49,68	10	11	1,28	10,25	+ 2,54	+ 18,47	6928
1158	66 Dragone . .	6	20 3 33	61 37 58,83	59,21	59,02	10	8	1,64	10,35	+ 0,16	+ 1,05	6932
1159	b^3 Dragone . .	5	20 4 47	36 28 21,00	21,11	21,06	10	10	1,07	10,50	— 0,61	— 7,16	6937
1160	18 Volpetta . .	6	20 5 20	26 32 6,08	6,15	6,12	11	10	1,09	10,52		— 6,26	6940
1161	19 Volpetta . .	6	20 6 35	26 26 14,00	13,62	13,81	11	8	1,10	10,57	— 1,10	— 7,24	6943
1162	20 Volpetta . .	6	20 6 46	26 6 23,22	23,29	23,26	10	10	1,03	10,56	— 1,89	— 4,62	6944
1163	Cigno	6	20 9 3	51 5 15,99	16,09	16,04	10	10	1,11	10,70		— 0,86	6959
1164	21 Volpetta . .	6.5	20 9 6	28 19 1,05	1,29	1,17	10	10	1,06	10,63	— 1,36	+ 0,17	6957
1165	o^1 Cigno	5	20 9 22	46 26 17,04	17,01	17,03	11	9	1,62	10,74	— 2,00	— 2,60	6962
1166	Cigno	6.7	20 9 30	43 0 2,95	—	2,95	17	—	1,76	10,74		— 0,03	6963
1167	68 Dragone . .	6	20 9 32	61 42 1,80	2,00	1,90	8	10	2,12	10,80	+ 0,14	+ 0,87	6970
1168	o^2 Cigno	4	20 9 42	46 21 47,15	47,16	47,15	21	10	1,08	10,75	— 0,03		6965
1169	b^3 Cigno	5	20 9 51	36 25 28,89	29,17	29,03	10	9	1,67	10,89		— 0,63	6967
1170	Volpetta . .	5	20 9 58	25 12 40,36	40,36	40,36	10	9	1,61	10,78		— 4,92	6966
1171	22 Volpetta . .	6	20 10 6	23 7 40,56	40,63	40,60	10	10	1,97	10,80		— 2,78	6968
1172	33 Cigno	4.5	20 10 30	56 11 9,07	8,95	9,01	12	5	2,13	10,87			6976
1173	23 Volpetta . .	5	20 10 35	27 25 54,24	54,40	54,32	13	10	2,16	10,88	— 0,65	— 4,24	6973
1174	18 Freccia . . .	6	20 10 50	21 13 57,70	57,66	57,68	11	12	2,31	10,84		— 4,72	6975
1175	Dragone . .	6	20 11 10	60 15 31,83	31,88	31,85	11	10	1,72	10,87	+ 0,07	+ 5,93	6980
1176	24 Volpetta . .	6	20 11 26	24 17 13,87	14,22	14,04	11	10	1,51	10,86			6979
1177	32 Cigno	4.5	20 11 36	47 19 51,25	51,20	51,23	10	10	1,60	10,98	— 0,84	— 3,60	6983
1178	Cigno	6	20 12 5	49 50 54,63	54,47	54,55	9	10	1,11	10,93		+ 1,28	6985
1179	Cigno	6	20 12 29	39 58 45,28	—	45,28	15	—	1,81	10,95		+ 1,31	6986
1180	34 Cigno	5	20 13 11	37 38 42,80	43,03	42,92	10	10	1,09	11,04		— 2,48	6990
1181	Cigno	6.7	20 13 41	40 20 35,62	—	35,62	16	—	1,73	11,08		— 1,60	6996
1182	36 Cigno	6.5	20 13 48	36 36 34,75	34,88	34,82	11	10	1,63	11,11		— 1,36	6997
1183	35 Cigno	5.6	20 13 51	34 35 35,34	35,33	35,34	11	10	1,63	11,08	— 0,33	+ 1,12	6998
1184	Cigno	6	20 14 24	38 36 48,55	—	48,55	15	—	1,77	11,10		+ 0,07	7001
1185	Cigno	6	20 15 43	39 0 34,02	—	34,02	17	—	1,67	11,20	— 1,99	— 1,86	7008
1186	25 Volpetta . .	6	20 16 41	24 2 54,98	55,28	55,13	10	10	0,66	11,31		— 2,89	7013
1187	γ Cigno	3.2	20 17 44	39 51 27,20	—	27,20	16	—	1,17	11,36	— 0,16		7022
1188	Cigno	6	20 18 19	40 37 37,35	—	37,35	16	—	1,14	11,38		— 1,85	7027
1189	39 Cigno	5	20 18 52	31 47 15,46	15,32	15,39	10	11	1,61	11,47		— 4,01	7029
1190	Cigno	6	20 19 47	54 16 13,21	13,13	13,17	10	10	1,11	11,49		+ 0,13	7035

eclinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875.0	Declinazione media 1875.0			Osservazioni		Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni		medio	Num.			Greenwich	B.A.C.	
				dirette	riflesse		dirette	riflesse		1872		
			h m s	° ′ ″		″			+			
1191	Cigno. . . .	6	20 21 4	42 11 46,76	—	46,76	25	—	0,65	11,58		+ 1,31	7041
1192	Cigno. . . .	6	20 21 33	39 59 34,95	—	34,95	15	—	1,77	11,61		+ 1,40	7048
1193	Cigno. . . .	6	20 22 18	54 16 31,21	31,19	31,20	7	9	1,11	11,66		— 0,28	7055
1194	Cefeo. . . .	6	20 22 29	59 11 29,84	29,75	29,80	10	10	1,63	11,68		+ 0,13	7060
1195	40 Cigno. . . .	6	20 22 56	38 1 50,07	—	50,07	16	—	1,63	11,68	— 0,70	+ 1,39	7061
1196	ω^1 Cigno. . . .	5	20 23 13	48 58 9,73	9,44	9,59	10	10	1,69	11,76	— 0,63	+ 1,56	7062
1197	Cigno. . . .	6	20 23 22	56 13 37,62	37,85	37,73	10	10	1,61	11 74		+ 1,79	7064
1198	41 Cigno. . . .	4.5	20 24 17	29 57 7,72	7,84	7,78	10	10	1,38	11,82	— 1,34	— 0,68	7067
1199	42 Cigno. . . .	6	20 24 35	36 2 18,20	18,48	18,34	10	10	1,61	11,86		— 2,86	7073
1200	Cigno. . . .	6.7	20 25 51	45 30 15,14	—	15,14	16	—	1,31	11,92		+ 10,22	7083
1201	ω^2 Cigno. . . .	5	20 26 11	48 31 55,16	54,93	55,05	10	10	1,63	11,96	— 0,97	— 0,87	7085
1202	44 Cigno. . . .	6	20 26 15	36 30 55,97	56,23	56,10	11	9	1,23	12,02	— 0,41	— 7,18	7084
1203	Cigno. . . .	6	20 26 20	55 38 57,66	57,74	57,70	10	11	1,14	11,95		— 0,60	7086
1204	ω^3 Cigno. . . .	5	20 27 27	48 47 56,18	55,92	56,05	10	10	1,64	12,00		— 1,88	7091
1205	9 Cefeo. . . .	4	20 27 29	62 34 27,89	28,13	28,01	12	10	1,34	12,03	+ 0,26		7098
1206	Cigno. . . .	6	20 28 31	42 45 57,04	—	57,04	15	—	1,13	12,11		— 0,26	7100
1207	Cigno. . . .	6	20 28 33	41 2 48,86	—	48,86	14	—	1,82	12,11		+ 2,63	7101
1208	Cefeo. . . .	6	20 28 44	56 21 20,50	20,76	20,63	11	10	1,18	12,15		— 2,84	7105
1209	47 Cigno. . . .	6	20 29 3	34 49 25,75	25,60	25,67	10	13	1,10	12,09	— 0,30	+ 5,02	7103
1210	Cigno. . . .	6	20 29 49	46 14 55,42	55,32	55,37	10	10	1,14	12,20		— 0,13	7112
1211	Cigno. . . .	6.7	20 30 5	40 40 5,65	—	5,65	16	—	1,77	12,21		+ 1,73	7114
1212	Cigno. . . .	6	20 30 50	41 27 29,91	—	29,91	16	—	1,28	12,27		+ 1,19	7119
1213	27 Volpetta . .	6.5	20 31 45	26 1 40,08	40,05	40,07	10	10	1,03	12,34	— 1,19	— 3,25	7126
1214	29 Volpetta . .	5	20 32 57	20 45 48,54	48,46	48,50	11	10	1,18	12,43		— 1,20	7140
1215	28 Volpetta . .	5.6	20 33 5	23 40 42,04	42,21	42,13	10	10	1,18	12,44		— 0,69	7143
1216	Cigno. . . .	6	20 33 40	52 30 14,10	13,85	13,98	11	10	1,10	12,46		0,00	7153
1217	Cigno. . . .	6	20 33 51	29 53 50 34	50,41	50,37	10	9	1,13	12,31		+ 5,47	7152
1218	Cigno. . . .	6	20 34 59	40 8 16,87	—	16,87	16	—	1,26	12,55		— 1,35	7158
1219	Cefeo. . . .	6	20 35 46	55 33 53,89	53,95	53,92	10	10	1,60	12,60		— 1,93	7166
1220	49 Cigno. . . .	6	20 35 59	31 51 49,41	49,32	49,37	11	10	1,26	12,65	— 0,59	— 3,80	7164
1221	α Cigno. . . .	2.1	20 37 10	44 50 4,11	—	4,11	22	—	0,34	12,70	— 0,72		7171
1222	Cigno. . . .	6	20 37 25	41 16 11,92	—	11,92	16	—	1,71	12,72		+ 0,57	7174
1223	Cefeo. . . .	6	20 37 38	60 3 15,17	15,26	15,21	9	5	1,65	12,74		+ 13,56	7176
1224	51 Cigno. . . .	6.5	20 38 22	49 53 30,67	30,40	30,53	10	10	1,15	12,74	— 0,09	+ 4,03	7182
1225	30 Volpetta . .	6.5	20 39 28	24 49 27,75	27,82	27,78	11	11	1,07	12,68	— 0,16	— 0,17	7188

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				+ ″	″	″	
1226	Cefeo	6	20 39 59	60 9 4,26	4,67	4,47	10	10	1,13	12,89	— 0,36	— 1,83	7193
1227	Cigno. . . .	6	20 40 28	46 50 38,30	38.37	38,34	10	10	1,66	12,92		+ 0,69	7198
1228	52 Cigno. . . .	4.5	20 40 30	30 15 50,51	50,61	50,56	10	9	1,14	12,94		+ 3,04	7194
1229	ε Cigno. . . .	3.2	20 41 9	33 30 10,76	10,57	10,66	11	10	1,05	13,29	— 0,71		7204
1230	6H Cefeo. . . .	5.4	20 42 15	57 7 53,71	53,64	53,68	10	10	1,15	12,79			7215
1231	λ Cigno . . .	5.4	20 42 32	36 1 55,57	55,66	55,61	12	12	0,67	13,06	— 0,34		7213
1232	Cigno . . .	6.7	20 42 44	52 32 27,55	27,45	27,50	10	10	1,13	13,08		— 8,85	7218
1233	η Cefeo. . . .	4.3	20 42 45	61 21 12,90	13,10	13,00	10	10	1,69	13,89	— 0,73		7220
1234	Cigno. . . .	6	20 43 3	45 7 16,59	—	16,59	16	—	1,71	13,10		— 0,11	7219
1235	55 Cigno. . . .	6.5	20 44 41	45 39 3,79	—	3,79	16	—	1,16	13,22	— 0,73	— 0,75	7233
1236	56 Cigno. . . .	5.6	20 45 38	43 35 21,47	—	21,47	16	—	1,14	13,40		+ 0,84	7241
1237	Cigno. . . .	6	20 45 40	50 19 8,42	8,39	8,40	11	10	1,06	13,27		+ 0,88	7243
1238	31 Volpetta . .	5	20 46 46	26 37 48,59	48,78	48,69	12	11	1,00	13,33	+ 0,40	— 4,99	7246
1239	57 Cigno . . .	5.6	20 48 49	43 54 34,02	—	34,02	16	—	1,01	13,49		+ 1,05	7253
1240	Cigno. . . .	6	20 48 56	44 42 31,96	—	31,96	16	—	1,27	13,48		+ 0,85	7254
1241	32 Volpetta . .	5.6	20 49 14	27 34 59,95	59,74	59,84	10	11	1,11	13,50	— 0,18		7256
1242	Cigno. . . .	6	20 49 42	40 13 41,08	—	41,08	16	—	1,18	13,53		+ 0,08	7260
1243	Cigno. . . .	6	20 52 10	44 26 39,70	—	39,70	15	—	1,12	13,69		— 0,85	7273
1244	Cigno. . . .	6	20 52 27	50 14 56,60	56,84	56,72	10	10	1,12	13,71		+ 0,78	7278
1245	ν Cigno . . .	4	20 52 51	40 41 12,01	—	12,01	16	—	0,62	13,71			7277
1246	33 Volpetta . .	6.5	20 52 41	21 50 36,65	36,48	36,56	11	10	1,10	13,80	+ 0,46	— 8,08	7275
1247	Cefeo. . . .	5	20 52 56	56 24 24,49	24,62	24,56	9	10	1,29	13,71		+ 0,97	7281
1248	Cigno. . . .	6	20 54 30	49 58 37,23	36,97	37,10	10	10	0,99	13,83	— 2,05	+ 4,35	7294
1249	Cigno. . . .	6	20 55 7	39 45 52,70	—	52,70	17	—	1,11	13,88	+ 0,23	+ 13,75	7297
1250	f^1 Cigno. . . .	5.6	20 55 34	47 2 0,09	0,13	0,11	10	10	1,65	13,90	— 1,65	— 1,41	7301
1251	60 Cigno. . . .	6	20 56 49	45 39 55,89	—	55,89	16	—	1,15	13,95		+ 3,41	7306
1252	Cigno. . . .	6	20 57 33	39 1 0,67	—	0,67	17	—	1,06	13,99	— 0,44	+ 2,27	7313
1253	Cigno. . . .	6	20 57 56	44 17 53,62	—	53,62	21	—	1,13	14,06		— 1,58	7317
1254	Cigno. . . .	6	20 59 11	41 8 4,73	—	4,73	17	—	1,08	14,09	— 0,43	— 1,45	7326
1255	Cigno. . . .	6	20 39 58	52 47 20,08	20,01	20,04	11	11	1,06	14,18		+ 2,10	7332
1256	ξ Cigno. . . .	4	21 0 23	43 25 47,12	—	47,12	18	—	0,60	14,20	— 1,33		7333
1257	61^1 Cigno. . . .	5.6	21 1 18	38 8 8,55	—	8,55	17	—	1,08	17,48	— 0,74		7336
1258	61^2 Cigno. . . .	6	21 1 20	38 7 39,37	—	39,37	17	—	1,63	17,22	— 1,29		7337
1259	f^2 Cigno. . . .	5.6	21 2 17	47 8 48,04	48,00	48,02	14	10	1,10	14,33		— 1,86	7345
1260	Cigno. . . .	6	21 6 24	53 3 12,97	12,96	12,96	20	11	1,00	14,52	+ 0,53	+ 3,53	7365

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	Declinazione media 1875,0 medio	Osservazioni Num. dirette	Osservazioni Num. riflesse	Osservazioni Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	Differenza coi Cataloghi B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
1261	ζ Cigno	3	21 7 37	29 42 54,63	54,61	54,62	10	10	1,08	14,58	— 0,10		7368
1262	Cigno	6.7	21 8 26	36 7 4,98	5,21	5,10	10	10	1,13	14,71		— 2,70	7373
1263	3415 Groomb. . .	6.5	21 8 37	59 28 22,92	23,32	23,12	11	11	0,64	14,69			7377
1264	Cefeo	6	21 9 37	59 34 57,57	57,42	57,50	9	12	1,34	14,74		+ 2,22	7387
1265	τ Cigno	4	21 9 48	37 30 45,80	45,57	45,69	28	10	0,74	15,22	— 0,24		7385
1266	σ Cigno	4.5	21 12 30	38 52 17,28	—	17,28	18	—	0,69	14,87	— 0,66		7398
1267	υ Cigno	4.5	21 12 47	34 22 21,90	21,79	21,85	10	10	1,07	14,97		— 2,35	7399
1268	Cefeo	5.6	21 13 30	55 16 24,40	24,42	24,41	10	12	1,10	14,88		+ 7,97	7401
1269	A Cigno	6	21 13 47	43 25 15,53	—	15,53	16	—	1,26	15,00		— 1,20	7402
1270	Cigno	5.6	21 15 10	48 58 55,29	55,05	55,17	9	10	1,64	15,09		+ 0,05	7411
1271	Pegaso . . .	6	21 15 25	23 19 49,53	49,80	49,66	17	11	0,97	15,10	— 0,39	— 13,05	7410
1272	α Cefeo	3.2	21 15 36	62 3 22,79	22,66	22,72	10	10	1,74	15,12	— 0,56		7416
1273	Cefeo	6	21 15 48	58 5 42,81	42,79	42,80	9	9	1,22	15,12	— 0,53	— 34,70	7417
1274	Cefeo	6	21 17 22	60 13 32,11	32,08	32,10	10	10	1,17	15,22		— 47,86	7430
1275	Cigno	6.5	21 17 39	48 51 13,39	13,12	13,25	11	10	1,29	15,21		+ 4,93	7431
1276	Volpetta . .	6	21 18 21	23 44 17,00	17,19	17,09	10	10	1,08	15,33	— 0,09	— 3,46	7437
1277	Volpetta . .	6	21 19 1	25 38 16,03	16,26	16,15	10	10	1,13	15,19		+ 7,31	7444
1278	Cigno	6	21 19 46	51 7 12,37	12,53	12,45	11	10	1,12	15,35		— 0,35	7448
1279	Cefeo	6	21 19 48	63 41 25,46	25,40	25,43	7	9	1,74	15,48	+ 0,67	— 2,91	7449
1280	69 Cigno	6	21 20 41	36 7 41,22	41,43	41,33	12	10	1,59	15,41		— 2,33	7453
1281	35 Volpetta . .	6.5	21 22 10	27 3 53,73	53,64	53,69	13	7	1,19	15,55	— 1,88	— 4,33	7461
1282	70 Cigno	6.5	21 22 15	36 34 27,16	27,40	27,28	12	10	1,16	15,57	— 30,10	— 0,48	7462
1283	Cefeo	6.7	21 23 59	59 12 22,33	22,25	22,29	10	10	1,09	15,58		— 0,29	7476
1284	2 Pegaso . . .	5	21 24 17	23 5 30,92	31,09	31,00	6	4	1,25	15,62	— 0,09	— 1,07	7474
1285	Cigno	6	21 24 31	43 47 30,24	—	30,24	18	—	1,25	15,61		+ 0,19	7477
1286	g Cigno	5	21 24 50	45 59 23,49	23,87	23,68	12	10	0,80	15,74			7480
1287	Cigno	6	21 26 10	52 24 30,60	30,63	30,61	10	10	1,13	15,70		+ 0,15	7483
1288	Cigno	6	21 27 4	51 38 36,20	36,16	36,18	12	10	1,69	15,76		+ 6,46	7488
1289	Cigno	6	21 27 15	52 4 8,00	8,10	8,05	10	10	1,25	15,76		+ 1,08	7489
1290	Cefeo	6	21 27 33	59 54 30,71	30,60	30,65	9	11	1,15	15,78		+ 0,59	7495
1291	ρ Cigno	4.5	21 29 17	45 2 22,75	—	22,75	17	—	1,06	15,82		— 4,13	7503
1292	72 Cigno	5	21 29 40	37 58 28,17	27,81	27,99	11	10	1,18	16,01	— 0,55	— 0,59	7505
1293	Cigno	6.7	21 30 9	51 8 31,86	31,89	31,87	10	12	1,11	15,91		+ 1,55	7512
1294	74 Cigno	5	21 31 56	39 51 9,20	—	9,20	27	—	0,85	16,02			7521
1295	Cefeo	6	21 33 29	53 28 48,39	48,12	48,25	10	12	1,20	16, 09		— 0,24	7530

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″			
1296	Cefeo	6	21 33 51	61 44 7,17	7,14	7,15	10	9	1,34	16,11		+ 0,02	7533
1297	9 Cefeo	5.6	21 34 34	61 31 6,57	6,70	6,63	11	10	1,80	16,17	— 0,42	— 1,41	7542
1298	13 H Cefeo . . .	6.5	21 35 5	56 55 27,32	27,31	27,31	10	9	0,90	16,16			7545
1299	75 Cigno. . . .	6.5	21 35 17	42 42 24,40	—	24,40	15	—	0,69	16,22	— 1,35	— 2,18	7544
1300	Cigno. . . .	6	21 35 40	49 6 58,14	57,77	57,96	8	9	1,19	16,21		+ 0,68	7548
1301	76 Cigno. . . .	6	21 36 33	40 14 16,84	—	16,84	14	—	1,32	16,21		— 0,51	7554
1302	Cefeo	6	21 36 35	54 18 14,97	15,01	14,99	11	11	1,24	16,25		— 0,39	7555
1303	77 Cigno. . . .	6	21 37 21	40 30 25,96	—	25,96	15	—	1,70	16,27		+ 3,72	7559
1304	π' Cigno. . . .	5.4	21 37 39	50 37 11,46	11,39	11,42	10	10	1,24	16,29	— 0,09	+ 1,72	7560
1305	Cigno. . . .	5.6	21 38 4	40 35 2,93	—	2,93	16	—	1,68	16,35		— 0,12	7565
1306	79 Cigno. . . .	5.6	21 38 16	37 42 43,21	43,43	43,32	10	10	1,72	16,34		— 0,38	7566
1307	μ Cigno. . . .	4.5	21 38 33	28 10 42,31	42,16	42,24	10	10	1,22	16,14		— 3,46	7568
1308	$\varkappa$ Pegaso . . .	4	21 38 59	25 4 15,92	15,93	15,93	10	11	1,21	16,41	— 1,09		7571
1309	Cefeo	6.5	21 39 41	58 12 25,66	25,44	25,55	10	12	1,18	16,42		— 1,42	7582
1310	12 Pegaso . . .	6.5	21 40 19	22 22 23,73	23,91	23,82	9	10	1,18	16,50		— 6,50	7585
1311	Cigno. . . .	6	21 40 48	51 41 32,43	32,41	32,42	10	9	1,11	16,46		+ 0,97	7589
1312	Cigno. . . .	6	21 41 19	42 28 59,17	—	59,17	16	—	1,25	16,50		— 1,15	7593
1313	ν Cefeo	5	21 41 51	60 32 39,35	39,18	39,27	10	10	1,77	16,50	— 0,91	+ 0,92	7595
1314	π^2 Cigno. . . .	4.5	21 42 11	48 43 53,98	53,95	53,96	18	11	0,28	16,52			7598
1315	Cigno. . . .	6	21 43 8	38 22 34,11	—	34,11	12	—	1,17	16,58	— 0,54	+ 1,42	7602
1316	12 Cefeo	6	21 43 44	60 6 46,07	46,15	46,11	10	9	1,19	16,59		+ 2,61	7605
1317	14 Pegaso . . .	5	21 44 19	29 35 33,84	34,11	33,98	10	10	1,19	16,63		— 1,30	7607
1318	Cefeo	6	21 45 36	52 6 49,58	49,48	49,53	10	10	1,15	16,70		— 1,51	7612
1319	Cigno. . . .	6	21 45 54	38 57 7,65	—	7,65	16	—	1,18	16,72		+ 2,47	7614
1320	15 Pegaso . . .	6.5	21 46 55	28 12 31,61	31,93	31,77	10	10	1,09	16,72		— 3,15	7623
1321	16 Pegaso . . .	5.6	21 47 23	25 20 16,07	15,80	15,93	10	10	1,22	16,78	— 0,37	— 1,30	7627
1322	Cefeo	6	2148 55	55 37 25,54	25,37	25,45	14	8	0,71	16.63		+ 17,10	7636
1323	Cefeo	6	21 50 33	53 20 27,81	27,77	27,79	11	9	1,11	17,03		+ 2 20	7642
1324	μ Cefeo	6	21 50 41	56 1 10,48	10,61	10,54	11	9	1,23	16,90		+ 1,55	7643
1325	Cefeo	6	21 51 7	52 39 2,52	2,56	2,54	11	10	1,21	16,97		+ 0,95	7646
1326	Cefeo	6	21 51 36	60 56 56,29	56,44	56,36	10	10	1,14	16,98	— 1,20	+ 0,57	7651
1327	Cefeo	6.5	21 53 8	63 1 50,00	50,06	50,03	15	10	1,16	17,04	— 1,00	+ 0,68	7658
1328	Cigno. . . .	6	21 57 36	42 12 40,00	—	40,00	39	—	0,67	17,26		+ 0,15	7679
1329	14 Cefeo	6	21 57 52	57 22 51,80	51,68	51,74	11	10	1,16	17,28		— 0,83	7683
1330	Cigno. . . .	6	21 57 54	44 2 51,32	—	51,32	16	—	1,20	17,27		— 1,59	7681

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″			
1331	15 Cefeo	6	21 59 50	59 12 32,88	32,76	32,82	10	10	1,23	17,36		+ 1,62	7696
1332	23 Pegaso . . .	6.5	21 59 55	28 21 26,33	26,73	26,53	10	10	1,55	17,40	— 0″,51	— 3,64	7693
1333	Cigno	6	21 59 59	46 37 37,19	37,17	37,18	10	10	1,35	17,36		+ 3,84	7695
1334	18 Cefeo	5	22 0 6	62 30 43,53	43,73	43,63	10	10	1,40	17,37	+ 0,23	+ 3,92	7699
1335	Cefeo	6	22 0 8	59 15 40,35	40,28	40,31	10	10	1,70	17,31		+ 4,86	7698
1336	Lucertola. .	6.5	22 0 57	44 24 23,64	—	23,64	11	—	1,47	17,31		+ 2,84	7705
1337	ι Pegaso . . .	4	22 1 12	24 44 7,03	7,08	7,06	10	10	1,26	17,45	— 0,44		7706
1338	20 Cefeo	6	22 1 12	62 10 33,89	33,89	33,89	10	10	1,79	17,45	— 1,03		7707
1339	19 Cefeo	6.5	22 1 18	61 40 20,67	20,78	20,72	10	10	1,21	17,40	+ 0,28	+ 0,85	7708
1340	25 Pegaso . . .	6	22 1 58	21 5 42,34	42,13	42,2	11	10	1,40	17,44		— 4,25	7712
1341	π' Pegaso . . .	5	22 3 41	32 33 44,52	44,93	44,72	8	7	1,20	17,52	— 0,43		7721
1342	Lucertola. .	6	22 3 44	47 19 20,32	20,33	20,33	10	10	1,26	17,55		— 0,95	7727
1343	Cefeo	6	22 4 23	58 40 37,23	37,36	37,30	10	7	1,23	17,56		— 16,38	7736
1344	π^2 Pegaso . . .	4	22 4 26	32 33 55,44	55,83	55,63	11	13	1,21	17,55	— 1,27		7731
1345	28 Pegaso . . .	6	22 4 36	20 21 51,50	51,35	51,43	10	10	1,80	17,57		— 0,20	7733
1346	Lucertola. .	6	22 5 52	42 24 56,58	—	56,58	13	—	1,25	17,62		— 1,97	7743
1347	Lucertola. .	5.6	22 6 17	50 12 22,86	22,75	22,80	10	11	1,23	17,64		+ 2,90	7746
1348	ζ Cefeo	4.3	22 6 31	57 35 8,41	8,26	8,34	10	11	1,16	17,64	— 0,23		7749
1349	λ Cefeo	6.5	22 7 16	58 47 54,42	54,15	54,28	10	10	1,20	17,63		+ 2,03	7755
1350	Pegaso. . . .	6	22 7 18	56 13 4,91	5,16	5,03	10	10	1,37	17,82		+ 1,77	7754
1351	Cefeo	6	22 7 53	60 8 28,20	28,57	28,38	10	11	0,71	17,70		+ 6,19	7759
1352	Pegaso . . .	6	22 7 56	27 59 22,10	22,40	22,25	8	11	0,72	17,61		+ 4,16	7757
1353	Cefeo	6	22 8 29	62 40 24,91	25,07	24,19	11	8	1,74	17,77	— 0,32	— 4,01	7766
1354	Lucertola. .	5	22 8 32	39 5 43,16	—	43,16	11	—	1,43	17,57	+ 0,01	+ 7,46	7765
1355	Lucertola. .	6	22 9 29	42 20 3,72	—	3,72	16	—	1,25	17,77		— 0,93	7770
1356	ε Cefeo . . .		22 10 26	56 25 14,60	14,47	14,53	8	10	1,17	17,85	— 0,32	— 0,27	7778
1357	1 Lucertola. .	5.4	22 10 31	37 7 35,54	35,67	35,61	11	11	1,25	17,83	— 1,45	— 2,29	7777
1358	Cefeo	5.4	22 13 48	52 1 48,33	48,47	48,40	20	12	0,78	17,94		+ 0,53	7787
1359	25 Cefeo	6	22 14 8	62 10 40,99	41,05	41,02	12	10	1,23	17,95	— 1,41	— 0,28	7789
1360	Cefeo	6.7	22 15 31	56 17 23,42	23,23	23,33	10	10	1,36	18,02		— 0,41	7799
1361	32 Pegaso . . .	5	22 15 33	27 42 5,78	6,04	5,91	10	10	1,70	18,04		— 3,15	7798
1362	2 Lucertola. .	5.4	22 15 52	45 54 26,87	26,97	26,92	10	9	1,16	18,04		— 1,88	7800
1363	Lucertola. .	6	22 16 42	43 6 56,26	—	56,26	17	—	1,84	18,05		— 1,89	7803
1364	Cefeo	5.6	22 18 23	56 39 10,14	10,35	10,25	11	12	0,74	18 11		+ 0,22	7812
1365	Cefeo	6	22 18 26	55 19 53,33	53,63	53,48	10	10	1,74	18,03		+ 6,68	7813

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B.A.C.
			h m s	° ′ ″	″	″				″	″	″	
1366	β Lucertola..	4.5	22 18 39	51 36 11,58	11,42	11,50	9	10	1,13	17,93			7815
1367	4 Lucertola..	5	22 19 27	48 50 34,93	34,65	34,79	10	10	1,43	18,14		— 0,28	7820
1368	Lucertola..	6	22 20 22	49 46 1,08	1,23	1,15	10	11	1,12	18,12		+ 4,08	7825
1369	Cefeo....	6	22 21 36	62 41 34,78	34,95	34,86	9	10	1,16	18,27	+ 1,74	+ 0,18	7829
1370	38 Pegaso...	6.5	22 24 19	31 55 58,71	59,03	58,87	20	11	0,76	18,45	— 1,97	— 14,54	7843
1371	5 Lucertola..	5	22 24 21	47 4 2,34	2,27	2,31	10	11	1,21	18,35		— 2,00	7845
1372	Cefeo....	6	22 24 28	53 36 24,03	23,67	23,85	10	9	1,20	18,34		+ 0,02	7846
1373	δ Cefeo....	4var	22 24 32	57 46 33,16	32,99	33,08	10	10	1,23	18,32			7848
1374	6 Lucertola..	5	22 25 6	42 28 58,71	—	58,71	16	—	1,21	18,37		— 0,92	7850
1375	α Lucertola..	4	22 26 9	49 38 25,03	25,46	25,24	10	10	1,16	18,38	+ 0,05		7855
1376	Lucertola..	6	22 26 55	39 8 13,33	—	13,33	16	—	1,16	18,43	— 1,79	— 2,00	7858
1377	Cefeo....	6	22 28 50	55 58 43,68	43,65	43,66	14	10	1,04	18,48		+ 3,20	7871
1378	Cefeo....	6.7	22 29 24	61 7 57,32	57,32	57,32	10	10	1,73	18,51	— 0,13	+ 2,54	7875
1379	8 Lucertola..	6	22 30 18	38 59 17,22	—	17,22	16	—	1,21	18,52		+ 2,65	7880
1380	Lucertola..	6	22 30 42	49 25 25,67	25,33	25,50	10	11	1,20	18,55		+ 0,77	7882
1381	9 Lucertola..	5	22 32 15	50 54 0,38	0,71	0,55	16	12	0,72	18,52		— 1,62	7888
1382	10 Lucertola..	5	22 33 39	38 24 0,08	—	0,08	16	—	1,08	18,63	— 0,84		7901
1383	30 Cefeo....	5.6	22 34 13	62 56 5,42	5,27	5,35	10	10	1,14	18,63			7902
1384	11 Lucertola..	5	22 35 2	43 37 26,64	—	26,64	16	—	1,67	18,71	— 0,79	— 0,88	7906
1385	o Pegaso...	5	22 35 53	28 39 20,01	20,22	20,12	11	10	1,66	18,71	— 1,16	— 2,10	7914
1386	12 Lucertola..	6	22 35 53	39 34 23,85	—	23,85	16	—	1,75	18,71	+ 0,66	+ 3,66	7915
1387	Lucertola..	6	22 36 0	40 53 39,88	—	39,88	15	—	1,81	18,72		+ 4,79	7917
1388	η Pegaso...	3.4	22 37 9	29 34 4,46	4,69	4,58	11	10	1,68	18,73	— 0,54		7923
1389	Lucertola..	6	22 38 26	38 48 39,50	—	39,50	16	—	1,30	18,79		— 0,73	7931
1390	13 Lucertola..	6	22 38 31	41 9 49,02	—	49,02	16	—	1,19	18,81			7932
1391	λ Pegaso...	4	22 40 31	22 54 30,01	29,84	29,93	10	11	1,20	18,85	+ 0,06		7945
1392	Lucertola..	5.6	22 40 37	43 53 14,89	—	14,89	17	—	1,15	18,86		+ 2,53	7948
1393	Cefeo....	6.7	22 42 25	57 49 25,78	25,85	25,81	13	16	0,77	18,99	+ 0,76	— 3,55	7953
1394	μ Pegaso...	4	22 43 58	23 56 31,15	31,26	31,20	10	13	0,75	18,93	— 0,42		7958
1395	Cefeo....	5	22 44 36	55 11 25,03	24,66	24,85	11	12	1,25	18,98		+ 2,03	7961
1396	14 Lucertola..	6	22 44 44	41 17 30,38	—	30,38	15	—	1,66	18,98		— 0,87	7962
1397	15 Lucertola..	6	22 46 24	42 38 53,07	—	53,07	15	—	1,80	19,04	— 1,18	— 0,57	7972
1398	Cefeo....	6	22 46 29	61 1 56,38	56,64	56,51	11	13	1,14	19,11	— 0,86	— 1,52	7973
1399	Lucertola..	6	22 47 29	39 30 11,14	—	11,14	16	—	1,19	19,06		— 1,70	7978
1400	Lucertola..	6	22 48 5	44 5 5,60	—	5,60	15	—	1,16	19,08		— 0,02	7983

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Osservazioni Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +	Variazione annua in declinazione +	Differenza coi Cataloghi Greenwich 1872	B.A.C.	Num. del B. A. C.
			h m s	° ′ ″		″				″	″	″	
1401	Lucertola. .	6	22 48 22	39 42 38,41	—	38,41	17	—	1,69	19,08	— 0,76	+ 3,17	7984
1402	16 Lucertola. .	6	22 50 41	40 56 34,03		34,03	18	—	1,79	19,15		— 0,14	7994
1403	Lucertola. .	6.7	22 51 33	48 0 59,14	59,00	59,07	10	10	1,12	19,17	— 1,05	— 1,59	7999
1404	Cefeo	6	22 54 2	59 8 41,47	41,62	41,55	10	10	1,03	19,23		— 1,17	8013
1405	o Andromeda.	4.3	22 56 10	41 39 16,29	—	16,29	35	—	0,80	19,25	— 0,63		8023
1406	2 Andromeda.	6	22 56 51	42 5 9,88	—	9,88	18	—	1,07	19,32		— 1,51	8028
1407	β Pegaso . . .	2.3	22 57 43	27 24 18,17	18,52	18,35	11	10	1,17	19,46	— 0,37		8032
1408	3 Andromeda.	6	22 58 35	49 22 22,35	22,51	22,43	10	10	1,58	19,46		+ 5,85	8036
1409	56 Pegaso . . .	5	23 1 2	24 47 38,47	38,55	38,51	12	10	0,78	19,40	— 0,27	— 1,08	8052
1410	1 Cassiopea. .	5	23 1 20	58 44 40,84	40,91	40,87	10	10	1,15	19,39		+ 1,93	8054
1411	4 Andromeda.	6	23 1 57	45 42 44,74	44,57	44,65	11	11	1,45	19,38		+ 1,53	8058
1412	5 Andromeda.	6.7	23 2 5	48 36 54,89	54,74	54,81	10	10	1,68	19,54		+ 1,30	8059
1413	60 Pegaso . . .	6	23 3 45	26 10 20,71	20,80	20,75	14	10	0,77	19,42	— 0,39	— 4,02	8079
1414	7 Andromeda.	5	23 6 49	48 43 24,31	24,66	24,48	11	10	1,13	19,60		+ 1,29	8082
1415	3077Bradley. . .	6	23 7 16	56 28 41,78	42,01	41,90	11	10	1,14	19,79	— 1,28		8083
1416	61 Pegaso . . .	6	23 9 40	27 34 0,45	0,33	0,39	12	11	0,68	19,62	— 0,24	— 4,31	8097
1417	Cassiopea. .	6	23 11 1	52 32 23,32	23,41	23,36	8	11	0,79	19,32	+ 0,29	+ 1,19	8107
1418	Andromeda.	6	23 11 24	44 29 2,32	—	2,32	15	—	1,19	19,60		— 4,26	8110
1419	8 Andromeda.	5.6	23 11 57	48 19 55,59	55,33	55,46	12	10	1,68	19,63		— 1,76	8114
1420	Andromeda.	6	23 12 4	44 48 24,95	—	24,95	16	—	1,80	19,62		— 0,02	8115
1421	9 Andromeda.	6	23 12 28	41 5 29,02	—	29,02	18	—	1,86	19,64	— 0,29	— 1,35	8118
1422	Andromeda.	6	23 13 9	44 27 12,75	—	12,75	16	—	1,24	19,64		— 1,42	8120
1423	11 Andromeda.	6	23 13 41	47 56 22,60	22,38	22,49	9	10	1,72	19,68		+ 1,33	8125
1424	Andromeda.	6	23 13 49	47 41 46,22	46,22	46,22	11	10	1,41	19,69	— 0,20	+ 0,50	8126
1425	10 Andromeda.	6	23 13 56	41 23 56,72	—	56,72	16	—	1,89	19,70		+ 15,85	8128
1426	τ Pegaso . . .	5.4	23 14 27	23 3 23,11	23,14	23,13	9	11	1,79	19,64	+ 0,17		8131
1427	Andromeda.	6.7	23 14 49	43 25 58,54	—	58,54	16	—	1,80	19,67		— 1,97	8135
1428	12 Andromeda.	6	23 14 52	37 30 1,47	1,35	1,41	10	10	1,78	19,62		— 0,55	8136
1429	64 Pegaso . . .	6	23 15 49	31 7 39,45	39,66	39,56	10	12	1,20	19,70	— 1,05	— 3,83	8141
1430	Cassiopea. .	6.7	23 16 58	59 26 53,67	53,68	53,68	9	10	1,08	19,71		— 0,50	8153
1431	Cassiopea. .	6	23 18 27	56 50 57,41	57,04	57,22	10	10	1,18	19,71		+ 1,54	8158
1432	67 Pegaso . . .	6	23 18 45	31 41 54,92	55,15	55,04	11	10	1,25	19,78		— 3,71	8159
1433	υ Pegaso . . .	5.4	23 19 8	22 42 58,90	58,93	58,92	11	10	1,22	19,76	+ 0,31		8160
1434	4 Cassiopea. .	6	23 19 18	61 35 47,84	47,92	47,88	10	10	1,21	19,73	— 0,54		8162
1435	13 Andromeda.	6	23 21 6	42 13 27,99	—	27,99	20	—	0,79	19,82		— 0,84	8171

Declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle da + 20° a + 64°.

Numero	NOME DELLA STELLA	Grandezza	AR media approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0			Osservazioni			Variazione annua in declinazione	Differenza coi Cataloghi		Num. del B. A. C.
				Osservazioni dirette	Osservazioni riflesse	medio	Num. dirette	Num. riflesse	Epoca media 1875 +		Greenwich 1872	B.A.C.	
			h m s	° ′ ″	″	″				+	″	″	
1436	Cassiopea. .	5	23 24 16	57 51 36,40	36,19	36,30	10	11	1,08	19,84		+ 0,10	8188
1437	14 Andromeda.	6	23 25 9	38 32 57,82	—	57,82	16	—	1,15	19,78	— 1,72	— 3,19	8195
1438	72 Pegaso. . .	6	23 27 45	30 38 7,91	8,19	8,05	10	11	0,74	19,83			8206
1439	73 Pegaso. . .	6	23 28 27	32 48 21,98	21,83	21,90	11	11	1,14	19,92		— 1,34	8211
1440	15 Andromeda.	6	23 28 31	39 32 50,28	—	50,28	16	—	1,17	19,84	— 0,93	+ 0,19	8212
1441	Andromeda.	6.7	23 31 26	43 44 16,39	—	16,39	16	—	1,15	19,90	— 0,18	+ 0,47	8223
1442	λ Andromeda.	4	23 31 27	45 46 51,67	51,54	51,61	10	10	1,25	19,44			8224
1443	ι Andromeda.	4	23 32 1	42 34 34,36	—	34,36	16	—	0,73	19,93	— 0,22		8229
1444	18 Andromeda.	6.5	23 33 5	49 46 46,34	46,11	46,22	11	10	1,17	19,89		+ 2,36	8231
1445	x Andromeda.	4	23 34 15	43 38 31,31	—	31,31	17	—	1,13	19,94			8237
1446	Andromeda.	6.7	23 36 5	44 17 55,92	—	55,92	16	—	1,69	19,94		— 1,38	8245
1447	78 Pegaso. . .	5	23 37 42	28 40 9,24	9,63	9,43	10	10	0,81	19,97	— 0,31	— 4,11	8256
1448	ψ Andromeda.	5	23 39 51	45 43 34,70	35,54	34,62	11	9	1,17	19,97		+ 0,18	8261
1449	τ Cassiopea. .	5	23 40 57	57 57 20,01	19,65	19,83	12	10	1,28	20,05		— 0,29	8268
1450	6 Cassiopea. .	6	23 42 46	61 31 10,69	10,79	10,74	10	6	1,34	20,04	— 1,28	— 4,51	8279
1451	Cassiopea. .	6	23 43 4	58 16 7,50	7,49	7,49	10	10	1,15	19,98	— 0,20	— 0,47	8282
1452	79 Pegaso. . .	6	23 43 20	28 8 47,53	47,76	47,65	10	10	1,22	20,05	— 0,60	— 1,66	8284
1453	Cassiopea. .	6	23 44 8	50 55 38,50	38,78	38,64	11	12	1,29	19,97		+ 2,04	8289
1454	ρ Cassiopea. .	5	23 48 9	56 48 13,42	13,66	13,54	11	11	1,15	20,02			8310
1455	Cassiopea. .	6	23 50 51	55 0 36,85	36,54	36,70	11	10	1,16	19,99		+ 3,64	8322
1456	ψ Pegaso. . .	5	23 51 24	24 26 47,99	47,93	47,96	10	10	1,18	20,03	+ 0,14	— 1,65	8324
1457	Cassiopea. .	6	23 51 47	49 44 36,05	35,97	36,01	9	10	1,24	20,13		+ 11,11	8326
1458	σ Cassiopea. .	5	23 52 41	55 3 33,31	33,09	33,20	10	10	1,83	20,02		+ 3,35	8330
1459	Cassiopea. .	6.7	23 55 15	60 31 35,54	35,80	35,67	10	10	1,34	20,04	— 1,20	— 0,07	8344
1460	Andromeda.	6	23 55 20	41 40 16,49	—	16,49	17	—	0,75	20,05		— 1,10	8345
1461	85 Pegaso. . .	6	23 55 39	26 25 13,19	12,90	13,05	10	10	1,62	19,10	— 1,04	— 4,18	8350
1462	9 Cassiopea. .	6	23 57 48	61 35 29,51	29,68	29,60	10	10	1,17	20,07		— 1,57	8359
1463	Cassiopea. .	6	23 58 39	60 37 4,13	4,28	4,20	11	10	1,35	20,05	— 0,72	+ 1,33	8366

Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili.

Memoria del dott. C. F. PARONA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

I.

Le due catene di rilievi montuosi, che costituiscono le chinate est ed ovest del bacino del lago d'Orta, si incurvano verso mezzogiorno ad anfiteatro e vengono a congiungersi colle loro pendici. Nel punto di incontro è situato il borgo di Gozzano e termina il piano alluvionale morenico, sul quale, con rilevante grado di ascesa, sale dal basso piano novarese la ferrovia, che pure pone capo a questo paese (met. 347 livello ferroviar.). Di là si discende alla bassura del lago.

Nei dintorni di Gozzano, in mezzo agli abbondantissimi depositi morenici che ammantano non solo il piano sottostante, ma anche i colli che vi fanno corona, si elevano diversi affioramenti calcari. Il primo di essi verso sud è il più alto e costituisce il poggio su cui è edificata la chiesa parrocchiale con parte del borgo suddetto; gli altri che seguono poi vanno grado grado abbassandosi e se ne perde ogni traccia prima di giungere a Bolzano, villaggio situato sulla chinata di est, a poca distanza di Gozzano.

Questi affioramenti sono diretti secondo una linea sud-sud-ovest — nord-nord-est, ed, a quanto sembra, rappresentano i capi stabili di una formazione unica sepolta sotto i depositi morenici.

La roccia è un calcare rosso-giallastro, assai compatta, in istrati di qualche decimetro di potenza, inclinati verso nord-est (?); è ricca di geodi a bellissimi e nitidi cristallini di calcite. Qua e là si sfuma, prevalentemente nella parte superiore, in banchi poco estesi e lenticolari di una breccia in cui abbondano gli elementi calcari, ma pur compaiono interclusi dei frammenti, generalmente piccoli, di schisto talcoso-micaceo assai alterato, e dei pezzi talvolta grandiosi e più o meno alterati di quello stesso porfido, che costituisce le potenti colate nei colli e nelle montagne circostanti. Altrove si osserva una struttura spatica ed un colorito bianchiccio, ed in questo caso la massa calcare si può dire costituita per intiero da spoglie di crinoidi.

In un piccolo colle, formato dalla stessa roccia e che si eleva a levante di Gozzano, a lato della strada che conduce ad Arona, è aperta una cava, dalla quale si estrae attivamente il calcare, impiegato nella parte più pura per ottenere della calce, ed il resto come ottimo *petriscio* per la manutenzione delle strade. Pei lavori di

questa cava il colle venne denudato in uno de' suoi fianchi, che ci presenta opportuno ed assai istruttivo spaccato. Da esso rilevasi facilmente che l'intiera formazione nella serie delle vicende geologiche dovette subire quasi un fratturamento ed una successiva cementazione, eseguita da altro calcare bianco di aspetto spatico. In certi punti della parete rocciosa, questi spostamenti si manifestano ancora più evidentemente con salti e scontinuità degli strati, per modo da risultarne talora delle cavità, riempite in parte da calcare terroso verdastro. Tale sistema di fratture rende invero assai incerta la determinazione della pendenza degli strati, già difficile a definirsi per la poca estensione di questi lembi calcari e per la copiosa vegetazione, che riveste i depositi morenici, abbondantemente dispersi, come già notai su questi colli.

La roccia, tanto nella parte puramente calcare quanto nella parte brecciata, è riccamente fossilifera; e ne è prova il catalogo unito a questi cenni (1). Predominano i brachiopodi ed i crinoidi, ma non mancano i lamellibranchi, gasteropodi e le ammoniti. I brachiopodi oltre essere più abbondanti sono anche i meglio conservati. Essi trovansi a preferenza laddove la massa calcare è più pura, e si staccano il più delle volte con molta facilità dalla roccia, lasciando di solito molta porzione del guscio, che rimane a tappezzare la impronta abbandonata: non è raro però il caso che qualche modello ci si presenti ancora rivestito da gran parte della conchiglia. I modelli sono d'ordinario completi e raramente cavi, e la cavità rivestita da cristallini di carbonato di calce. Gli altri molluschi fossili, che in complesso si distinguono per la meschinità del loro sviluppo in confronto di quello dei brachiopodi, generalmente si riscontrano in quelle parti del deposito dove abbondano i frammenti degli steli dei crinoidi; e quivi, per essere meno uniforme e più spatico il calcare, meno facilmente si ponno staccare dalla matrice.

Dagli scritti dei geologi, che si occuparono delle prealpi Pennine, si ponno trarre scarse e poco precise notizie su questo interessante giacimento. Il prof. Sismonda (2), descrivendo la formazione in discorso, la riferisce al giura e la distingue in due piani; il superiore composto dalla brecciola porfirica; l'inferiore dal calcare rosso di mattone, contenente fossili (cita 4 specie), nei quali, secondo lui, è a lamentare la mescolanza di specie riferibili a diversi piani. Rimarca poi giustamente la analogia tra questo giacimento e quello di Arzo nel territorio Varesino. Anche il signor L. Pareto (3) descrive il giacimento di Gozzano come composto di due zone delle quali la inferiore sarebbe costituita da un *grès* rossastro mal determinato, che dubita sia da riferirsi,

(1) La collezione paleontologica che forma oggetto di questo studio, è costituita da esemplari raccolti in posto, nella descritta cava, per la maggior parte dallo scrivente e per altra parte dal dott. Ugo Migliavacca. Mi fu anche dato, per squisita gentilezza dal signor cav. prof. P. Calderini, di studiare una piccola raccolta di tali fossili, classificati in parte dall'egregio sig. prof. F. Sordelli, che si conserva nel Museo di Varallo. Approfitto di buon grado di questa occasione per ringraziare questi miei buoni amici dell'aiuto prestatomi.

(2) A. Sismonda, *Osservazioni mineralogiche e geolog. per servire alla formazione della C. geologica del Piemonte* (1840, Mem. Acc. sc. Torino Ser. 2ª tom. II.). — *Notizie e schiarimenti sulla costituzione delle Alpi piemontesi* (Ibid. tom. IX. 1848).

(3) L. Pareto, *Sur les terrains du pied des Alpes dans les environs du lac Majeur et du lac de Lugano* (Boll. d. l. Soc. géol. de France, tom. 6, ser. 2.ª 1858-59).

se ben ho compreso, alla arenaria o breccia triassica, che altrove si stende tra la dolomia e la formazione porfirica. Per la zona superiore descrive con molta esattezza il calcare rosso che riferisce al calcar rosso giurese, che altrove contiene molte ammoniti (liass sup.?); sincronizzandolo però col calcare dolomitico di Arona (Dolomia triassica a *Gyroporelle*). L'ing. Gerlach (1) riscontrò la alternanza del conglomerato rossastro col calcare a terebratule liassiche; ripetendo pure per parte sua l'idea che tale calcare sia sincrono con quello bianco dolomitico che ricopre il porfido rosso di Arona. Il prof. Gastaldi (2) ammise dapprima il calcare di Gozzano riferibile all'infralias, ma in seguito lo ascrisse al liass. Per ultimo lo scrivente (3), basandosi sul risultato della determinazione dei fossili rinvenuti, dimostrava l'analogia della fauna del giacimento gozzanese con quella degli strati a *Terebratula Aspasia* Menegh. di Sicilia, dell'Apennino centrale e dell'Ampezzano nelle Alpi venete.

Ciò premesso, vediamo quali sono i fatti che ponno guidare alla determinazione cronologica di questo giacimento liassico. Come risulta dalla descrizione topografica, data in principio di questo scritto, esso trovasi in tale posizione da tornare impossibile lo stabilirne stratigraficamente l'epoca. Infatti la morena che lo avvolge da ogni parte impedisce di rilevare quali sieno i suoi rapporti coi porfidi, che emergono a breve distanza e che sono le sole roccie mesozoiche dei dintorni. Per cui bisogna limitarsi alla determinazione paleontologica.

Uno sguardo al quadro comparativo, che chiude il catalogo dei fossili, tosto persuade del carattere liassico di questa fauna e della analogia che la lega alle altre degli strati a *Terebratula Aspasia* Menegh. della Sicilia (4) e dell'Apennino centrale. Qualche carattere distintivo tuttavia vi si può rilevare. Così le specie del calcare di Gozzano, in confronto di quello delle due faune citate, mostrano uno sviluppo di dimensione molto maggiore. Altro fatto interessante si è che la fauna gozzanese, pure presentando tanta somiglianza con quella siciliana, manca della *Terebratula Aspasia* Menegh., che per la sua abbondanza nei depositi di Palermo e di Trapani meritò di essere assunta quale specie caratteristica del piano geologico a cui appartiene; mentre invece offre in numero stragrande, in confronto a quello degli esemplari delle altre specie, la *Rhynconella Scherina* Gemm.

L'analogia suaccennata induce dunque a riferire la fauna di Gozzano al liass medio piuttosto che all'inferiore. È bensì vero che in essa si hanno alcune forme riferibili con maggiore o minore sicurezza ad altre riscontrate negli strati del liass inferiore di Hierlatz (5) e Sospirolo (6): ma d'altra parte non si rimarca alcuna

(1) H. Gerlach, *Die Penninischen Alpen* (Mem. d. Soc. svizz. di sc. natur. vol. 22). Boll. 7, 8 d. r. Comit. geol. d'Italia, 1870.

(2) B. Gastaldi, *Studi geologici sulle Alpi occidentali* (Mem. d. r. Comit. geol. d'Italia, 1870-74.)

(3) C. F. Parona, *Appunti geologici sul bacino del lago d'Orta* (ved. sunto nei Rend. d. r. Istit. lomb. di sc. e lett., marzo 1880). Novara - Soc. Archeol.

(4) G. Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani,* 1874.

(5) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des untern Lias* (Zeitschrift d. Deutschen geol. Gesellschaft, 1861).

(6) V. Uhlig, *Uber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno.* (LXXX - B. d. Sitzb. d. K. Akad. d. Wifsensch. 1. Abth. Oct. - Heft. Jahrg. 1879).

comunanza di specie colla fauna del liass inferiore dell'Apennino centrale, illustrato recentemente dal signor dott. M. Canavari (1), mentre, ripeto, una tal quale somiglianza si nota colle faune del liass medio dell'Apennino centrale (2) e dell'Ampezzano (3) nelle Alpi venete, anch'esse caratterizzate dalla *Terebratula Aspasia* Menegh. Per ciò, ad onta della mancanza di questo brachiopodo, il riferimento del calcare di Gozzano al piano mediano del liass sembra il più probabile: e tra i due piani, inferiore e superiore, del liass medio sembrerebbe preferibile il meno antico, in riguardo alla presenza nel calcare di Gozzano del *Harpoceras Algovianum* Opp. sp.; il quale, come è noto, è specie assai diffusa negli strati superiori del liass medio, nonchè in quelli inferiori del liass superiore. È da riconoscersi tuttavia la necessità di indagini stratigrafiche, le quali sole potranno togliere i leggieri dubbî che ponno per avventura rimanere sull'età di questi lembi liassici. E poichè, come dimostrai, i dubbî in ordine stratigrafico non si ponno quivi sciogliere per la breve estensione del deposito e per la mancanza di rapporti colle roccie mesozoiche più recenti, ne risulta la convenienza di studiare in ordine a queste idee i potenti depositi liassici di Arzo e di Saltrio. Questi infatti sono somiglianti a quelli di Gozzano, come già riscontrò il prof. Sismonda e come credo di poter confermare anche per parte mia basandomi sulla corrispondenza di alcune specie, della fauna da me studiata, con quelle poche provenienti da Arzo e Saltrio, che si conservano nel Museo geologico della R. Università ticinese. Notisi però che si può fin d'ora rimarcare un carattere differenziale tra le due faune di Gozzano e di Arzo e Saltrio, per quanto è lecito argomentare colla scarsità di materiali che finora mi venne dato raccogliere di queste due ultime località: e la differenza consiste nel fatto che le specie predominanti in un deposito sono diverse da quelle predominanti nell'altro. Nel territorio Varesino lo studio del liass medio potrà addivenire a più sicuri risultati, non solo perchè l'estensione stessa del terreno presenta maggiore campo alle ricerche, ma anche perchè vi si potranno rilevare i rapporti non soltanto stratigrafici ma altresì di fauna, che ponno sussistere coi calcari ammonitici del liass inferiore e superiore, già da tempo riscontrati in questa regione. La possibilità poi di un rinvenimento più abbondante di cefalopodi negli strati del liass medio di Arzo e Saltrio lascia anche la speranza di poter avere, per mezzo di essi, criterî cronologici più attendibili di quelli che si deducono dalla presenza di brachiopodi. Poichè, come è dimostrato, possedendo le forme tipiche giuresi dei brachiopodi stessi una persistenza cronologica assai maggiore di quella dei cefalopodi, ne risulta che essi sono meno opportuni di questi nello stabilire le suddivisioni in zone dei varî piani.

(1) M. Canavari, *Sui fossili del liass inferiore nell'Apennino centrale* (Atti Soc. tosc. di sc. natur. vol. 4 fasc. 2, 1879).

(2) Zittel, *Geolog. Beobach. aus den Central-Ap.* nelle *Geogn.-Pal. Reitz* di Benecke, 1869. — Ved. anche a questo proposito la Memoria del dott. M. Canavari, presentata alla R. Acc. dei Lincei contemporaneamente alla presente.

(3) E. Mojsisovics, *Die dolomit.-Riffe von Südtirol und Venetien*, 1879. (La fauna a brachiopodi del liass medio rinvenuta nell'Ampezzano, studiata dal signor Neumayr, risultò composta delle seguenti specie: *Terebratula Aspasia* Menegh., *Terebr. Taramellii* Gemm., *Terebr. Piccininii* Zitt., *Terebr. rudis* Gemm.; *Waldheimia securiformis* Gemm.; *Rhynchonella Briseis* Gemm., *Rhynch. flabellum.* Menegh., *Rhynch.* cfr. *Meneghinii* Zitt.).

Ad ogni modo se il presente lavoro non potrà portare il desiderato vantaggio di sciogliere qualcuno dei dubbî stratigrafici, che ancora rimangono in riguardo al liass medio delle Prealpi piemontesi e lombarde, mi sembra tuttavia che esso potrà considerarsi almeno come utile ed opportuno contributo alla migliore conoscenza di quella interessantissima fauna a brachiopodi, che da qualche tempo si va scoprendo, sia nelle Alpi come nell'Apennino, entro gli strati del liass medio e inferiore. Moltissimi dei brachiopodi rinvenuti a Gozzano si dovettero descrivere come nuovi, e sono sfortunatamente in ristretto numero quelli riferibili a specie già note, e per le quali non occorse manifestare qualche dubbio sulla esattezza del riferimento.

A questo punto sento il dovere di rendere pubblicamente grazie all'illustre comm. prof. G. Meneghini, per i preziosissimi suggerimenti datimi per la miglior riuscita di questo studio.

II.

GANOIDI

Lepidotus Agass.

Lepidotus sp.

Tav. III. fig. 13.

Un sol dente. Il signor prof. F. Bassani, cui comunicai il pezzo, non potè annettergli alcun valore paleontologico.

BRACHIOPODI

Spiriferina D'Orbigny.

Spiriferina angulata Opp.

1861. Spiriferina angulata: Oppel, *Ueber die Brachiopoden des untern Liass* (Abdruck. a. d. Zeitschr. der deutschen geologischen Gesellschaft) p. 541 tav. XXI. fig. 7 *a, b;* 8 *a, b, c, d, e.*

1874. Spiriferina cfr. angulata: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, pag. 56 tav. X. fig. 6, 7.

1879. Spiriferina cfr. angulata: V. Uhlig., *Ueber d. liasis. Brachiopodenf. von Sospirolo bei Belluno* (Sitzb. d. K. Akad. d. Wiss.)

Grande valva = altezza 16^{mm}, larghezza 22^{mm}
Piccola valva = » 17^{mm} » 25^{mm}

I pochi esemplari corrispondono assai alla descrizione ed alle figure dell'Oppel; vi si riscontrano proporzionali le misure; il seno della grande valva profondo ed originantesi sino dall'apice; il margine della stessa disposto a zig-zag, il deltidio si stende in triangolo a lati laterali assai allungati ed incontrantisi all'apice in angolo acutissimo; l'ampia area è trasversalmente segnata da abbondantissime strie:

le linee di accrescimento, di cui talune più distintamente rilevate delle altre, hanno un andamento sinuoso ed ondulato in relazione con quello dei margini. La piccola valva, che l'autore non descrive, è assai più compressa della maggiore, dal che ne consegue che i suoi margini, per adattarsi a quelli della valva opposta, non si dispongono a linea spezzata ma semplicemente sinuosa; dall'apice poi, piuttosto adunco, al bordo frontale si riscontra una convessità corrispondente alla depressione della grande valva, sulla quale le linee di accrescimento si fanno più grossolane. Sulla superficie di ambedue le valve rimarcansi costicine radianti dall'apice; carattere questo del quale il signor Oppel dice priva questa specie. Esse sono numerosissime e nei punti di contatto colle linee di accrescimento si rilevano in piccoli noduletti; esse però sono esilissime, talchè non sempre si ponno scorgere ad occhio non armato di lente, ed in taluni punti non si scorgono affatto, il che dà a questo carattere una impronta di incertezza da non permettere assolutamente di distinguere questa forma da quella del prof. Oppel.

Riferisco con dubbio a questa specie due altre valve; una grande (alt. 19^{mm}, largh. 22^{mm}) ed una piccola (alt. 22^{mm} largh. 24^{mm}), le quali, per quanto sembra, si assomigliano rispettivamente alle figure 6 e 7 *b* del prof. Gemmellaro (op. e tav. cit.). Queste valve si distinguono dalla forma tipica per la maggior altezza proporzionale; di più nella grande valva si nota assai meno demarcato il seno, e corrispondentemente nella piccola valva è meno marcata la convessità frontale più sopra accennata nella descrizione della corrispondente valva della forma tipica.

Spiriferina Münsteri Dav. sp.

1851. Spirifer Münsteri: Davidson, *Monograph of Brith. Oolit. and Lias. Brachiop.*, pag. 26 tav. 3. fig. 4-6.

1854. Spirifer Münsteri: Suess, *Ueber die Brachiopoden der Kössener Schichten*, pag. 22 tav. 2. fig. 1-5.

1860-65. Spirifer Münsteri: Stoppani, *Paléont. Lomb., Monogr. des fossiles de l'Azzarola*, pag. 87 tav. 17. fig. 11, 15.

1874. Spiriferina Münsteri: Gemm., *Sopra i fossili della zona con* Terebrat. Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, p. 57 tav. X. fig. 8 (*a, b, c*).

Grande valva = lungh. 9^{mm}, largh. 11^{mm}.

Un unico e poco ben conservato esemplare di grande valva, il quale corrisponde assai alla forma illustrata dal signor prof. Gemmellaro; lateralmente al seno si contano 6 pieghe molto distinte.

Spiriferina rostrata Schl. sp. (1)

Tav. I. fig. 1, 2 (*a*, *b*).

1851. Spirifer rostratus: Davidson, *Monograph of Brith. Oolit. and Lias. Brachiopod.*, pag 20 tav. II. fig. 1, 21; tav. III. fig. 1.

1854. Spirifer rostratus: Suess, *Ueber die Brachiopoden der Kössener Schichten*, pag. 19 tav. 2. fig. 8.

(1) Questa specie venne già riscontrata nel calcare di Gozzano dai signori Sismonda e Pareto (opere cit.).

1857. Spirifer rostratus: Stoppani, *Studî geologici e paleont. sulla Lombardia.* part. 3ª pag. 239 n. 102 e p. 401.

1858. Spirifer rostratus: Quenstedt, *Der Jura*, p. 144 pag. 181 tav. XVIII. fig. 6-15; tav. XXII. fig. 20, 25 (*Mittl. Lias*).

1861. Spiriferina rostrata: Zittel, *Geol. Beobacht. aus den Central-Apenninen*, pag. 130.

1874. Spiriferina rostrata: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, p. 58 tav. X. fig. 4.

1876. Spiriferina rostrata: Davidson, *A Monogr. of the British fossil Brachiopoda. - Suppl. to the jurass. and trias. spec.*, pag. 95 tav. XI fig. 6.

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	45mm	36mm	35mm	22mm
Larghezza	40mm	35mm	33mm	21mm
Spessore	?	22mm	20mm	14mm

La *Spiriferina rostrata* Schl. del calcare di Gozzano mantiene, sino circa alle dimensioni medie, una forma somigliantissima a quella figurata ed illustrata dal prof. Gemmellaro; l'apice piuttosto adunco è mediocremente sviluppato, il seno mediano della grande valva manca od è appena accennato, la superficie delle valve è liscia, e la punteggiatura è sempre distinguibile colla lente. Col crescere nell'età assume forme irregolari (fig. 1. lung. 39mm, largh. 35mm, spess. ?); l'apice nella grande valva diventa più pronunciato e l'accrescimento ai margini invece di mantenere lo stesso piano si fa incurvandosi rapidamente al basso, e per questo *lembo,* che forma un angolo colla restante superficie, la valva diventa come gibbosa. Di più sopra questa fascia le linee di accrescimento sono assai più grossolane, e l'accrescimento stesso si mostra più rapido al margine frontale che non sui laterali, di guisa che la forma della conchiglia si fa più allungata.

Da questa forma generale si distinguono due esemplari; essi presentano un seno distinto, alquanto dissimetrico in uno di essi (III. fig. 2), prodotto da un rilievo nella piccola valva, che si fa distinto ad un terzo circa dall'apice, e da una corrispondente e poco profonda depressione nella grande valva. Sonvi distinte le linee di accrescimento, le quali, sulla piccola valva, si intersecano a grazioso reticolato con sottili e numerose costicine, che dipartendosi dalla regione dell'apice irradiano verso i margini, dove la distanza media che si riscontra fra tali costicine è di 2mm.

Terebratula Lhwyd.

Terebratula Taramellii Gemm.

Tav. I. fig. 3. (*a, b, c*).

1874. Terebratula Taramellii: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, pag. 61 tav. XI. fig. 5 e 6.

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	14mm	13mm	12mm	10mm	8mm
Larghezza	14mm	13mm	12mm	10mm	8mm
Spessore	8mm	7mm	?	5mm	3mm

Di questa piccola specie si conservano oltre quaranta individui, la maggior parte dei quali furono trovati in un piccolo pezzo di calcare. Per gli esemplari di maggior dimensione riscontrasi sufficientemente esatta la descrizione data dall'autore: osservando però le forme più adulte e discendendo ad esemplari che non superano in lunghezza i 3^{mm} i caratteri specifici esposti dal prof. Gemmellaro si modificano alquanto. Così la piccola valva si riduce quasi piana, lo spessore della conchiglia si fa minore; l'apice è meno ricurvo, per cui appare più evidente il deltidio e ne risulta di qualche cosa proporzionalmente maggiore la lunghezza della conchiglia. La curvatura dell'apice aumenta gradatamente col crescere dell'età dalla conchiglia, ma per verità non raggiunge mai quel forte grado quale è accennato per la forma dei depositi siciliani, quindi nel loro complesso i rappresentanti della *T. Taramellii* Gemm. del calcare di Gozzano ci si presentano col contorno della loro parte posteriore disposto ad angolo alquanto più acuto in confronto della forma tipica.

Terebratula cfr. Andleri Opp.

Tav. I. fig. 4 (*a*, *b*, *c*).

1861. Terebratula Andleri: Oppel, *Ueber die Brachiopoden des untern Lias* pag. 536 tav. X. fig. 4 (*a*, *b*, *c*).

Lunghezza 19^{mm} Larghezza 16^{mm} Spessore 12^{mm}

Conchiglia più lunga che larga, a contorno sub-triangolare arrotondato ai fianchi, troncato alla fronte: la superficie è liscia ed a struttura finissimamente punteggiata. Delle due valve la grande è più connessa della piccola; il suo apice è molto alto e curvato, lascia però vedere un deltidio stretto, ha il forame rotondo e piccolo e gli spigoli laterali saglienti e leggermente carenati. Questi spigoli perdono dopo breve decorso la carena e sembrano continuare affievolendosi verso la fronte, per modo che ne risulta una sorta di fascia o *lembo*, che forma un leggero angolo colla parte convessa della valva. In causa di tale lembo la grande valva si incontra sotto un angolo ottuso colla piccola valva, la quale pure presenta una analoga fascia, ma molto più stretta, poco distinta e rimarcabile solo alla parte anteriore dei lati ed alla fronte. La linea commissurale corre senza inflettersi lungo la fronte e sulla parte anteriore dei fianchi, e soltanto nella parte posteriore di questi si piega leggermente verso la piccola valva.

Sopra questa stessa valva si scorgono per trasparenza 4 linee oscure longitudinali radianti dall'apice, che potrebbero essere le traccie dei 4 *sillons* longitudinali, più o meno pronunciati, ove si attaccano i seni venosi palleali, i quali distinguono le terebratule della sezione delle *Epithygris*, di cui il descritto esemplare avrebbe altresì il carattere della piccolezza del forame.

Si distingue dalla forma illustrata dal signor Oppel per avere uno spessore proporzionalmente alquanto maggiore, l'apice della grande valva più grande e la fronte meno troncata.

Terebratula Meneghinii n. sp.

Tav. I. fig. 5 (*a*, *b*, *c*).

Lunghezza 22^{mm} Larghezza 23^{mm} Spessore 13^{mm}

Conchiglia appena più larga che lunga, a contorno sub-rotondo; la punteggiatura

della superficie è rimarcabile con forte lente; le poche linee di accrescimento visibili suddividono le superficie delle valve in zone di ineguale larghezza; esse sono anche intersecate da linee esilissime e non molto numerose che irradiano dall'apice ai margini. Le valve hanno una convessità pressochè uguale e si incontrono sotto un angolo mediocremente acuto. La commessura disegna una linea ondulato-spezzata: essa forma sui fianchi una inflessione diretta verso la grande valva, poi da ciascuna parte del margine frontale forma una insenatura rivolta verso la piccola valva ed infine verso la parte di mezzo piega bruscamente ad angolo inflettendosi verso la grande valva. Le due flessuosità laterali al margine frontale sono accompagnate corrispondentemente da due rilievi sulla piccola valva e da due depressioni sulla grande, ed il seno mediano ingenera alla sua volta una depressione nella piccola valva ed un rilievo nella opposta, modificato pure da un lieve avvallamento nella sua parte di mezzo, corrispondentemente ad un piccolo rialzo nella depressione accennata della piccola valva. Queste pieghe, queste depressioni, che modificano la superficie della conchiglia, sulla piccola valva si mantengono distinte sui due terzi anteriori, quindi la superficie si fa uniformemente convessa, mentre invece sulla grande valva si spingono su tutta la sua superficie, sino alla parte apiciale. La grande valva presenta un apice ricurvo fortemente carenato ai lati, e la carena non si sfuma se non a metà dei fianchi; il deltidio poco evidente, sembra piccolo; il forame pur esso poco distinto, sembra piccolo e rotondo.

L'esemplare descritto è l'unico rappresentante di questa bella specie trovato finora nel calcare di Gozzano. Essa trovasi anche nel calcare di Saltrio e mi consta, per gentile comunicazione del signor prof. G. Meneghini, che si rinviene altresì nell'Apennino centrale.

Terebratula Gemmellaroi n. sp.

Tav. I. fig. 6. (*a*, *b*, *c*).

Lunghezza 8^{mm} Larghezza 7^{mm} Spessore 4^{mm}

Conchiglia alquanto più lunga che larga, a contorno sub-triangolare, la sua superficie è liscia, con qualche linea di accrescimento visibile al margine frontale. Delle due valve la grande è la più convessa; esse si incontrano sotto un angolo piuttosto acuto e la linea di commessura si sviluppa lievemente incurvata verso la piccola valva sui bordi laterali, si piega bruscamente verso la grande valva alle due estremità della fronte e dopo aver quivi formato una stretta ma profonda insenatura si inflette fortemente verso la piccola valva. Questa stessa valva è convessa regolarmente sino a più di tre quarti dall'apice, tronca quindi il suo piano regolare di sviluppo in declive e si piega all' insù per congiungersi al margine corrispondente della grande valva; per modo che essa alla sua parte anteriore, a tre quarti circa dell'apice, porta una distinta piega rientrante trasversale, la quale si sfuma lateralmente con altre due depressioni ingeneratesi per la ripiegatura quivi assunta dalla linea commessurale verso la valva opposta. Per contrario la superficie della grande valva si presenta meno accidentata; chè solo due rilievi, corrispondenti alle due depressioni ai lati della fronte della piccola valva e che dopo breve tragitto si sfumano prima di toccare la parte mediana della valva, rompono l'uniforme sua convessità. La grande valva

presenta un apice piccolo e poco ricurvo, a fianchi rotondeggianti, deltidio indistinto e forame di grandezza mediocre e rotondo.

L'esemplare suddescritto è l'unico sinora raccolto.

Terebratula cfr. pyriformis Suess.

Tav. I. fig. 7 (*a, b, c*).

1854. Terebratula pyriformis: E. Suess, *Ueber die Brachiopoden der Kössener Schichten*, (Dentkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch.) p. 41 tav. III. fig. 6, 7.

Lunghezza 32^{mm} Larghezza 26^{mm} Spessore 16^{mm}

Conchiglia piu lunga che larga, depresssa, a contorno pentagonale arrotondato; la superficie è segnata da una punteggiatura appena visibile ad occhio nudo; le linee di accrescimento, poco marcate, sono intersecate da numerosissime strie, non discernibili senza l'aiuto delle lente, che irradiano dall'apice ai margini. Delle due valve la grande è di poco più convessa della piccola; esse si incontrano sotto un angolo alquanto ottuso ai margini laterali ed acuto al margine frontale. La linea di commessura si inflette leggermente ai lati verso la grande valva ed alla fronte si eleva verso la piccola. Da ciascun lato della fronte, all'angolo tra questo ed i lati, si diparte una depressione, poco profonda ma sufficientemente distinta, la quale si mantiene manifesta sino a poca distanza dagli apici, per cui su ambedue le valve la parte mediana più convessa resta come delimitata e divisa dalle laterali alquanto appiattite. L'apice della grande valva è assai alto e poco ricurvo; i suoi lati sono fortemente carenati e le carene corrono parallelamente alla commessura delle valve e non si sfumano se non verso la metà dei lati: il forame di grandezza mediocre tronca il deltidio piuttosto largo ed alto.

Questa forma è rappresentata da un solo individuo completo e da un altro il cui pessimo stato di conservazione non permette di aggiungere ulteriori particolari alla descrizione. Essa in confronto della specie del Suess, mostrasi proporzionalmente alquanto più rigonfia e più breve; il suo contorno ai fianchi è più arrotondato, meno distintamente pentagonale; la regione apiciale della grande valva assai più larga in confronto di quelle della piccola; i lati dell'apice più acutamente carenati e le carene assai più prolungate lungo i fianchi di quanto appare per la *T. pyriformis* Suess; il forame molto più piccolo, il deltidio più largo. La fronte è proporzionalmente più larga e l'inflessione della linea commessurale non è accompagnata da alcuna depressione o rilievo nella porzione frontale delle due valve, che invece quivi mostransi uniformemente convesse; mentre per contrario nella *T. pyriformis*, come appare dalle figure citate, si nota un avvallamento, per verità non molto profondo nella grande valva ed un corrispondente rialzo nella piccola.

Terebratula Gozzanensis n. sp.

Tav. I. fig. 8 (*a, b, c*).

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	40^{mm}	38^{mm} ?	20^{mm}	31^{mm}
Larghezza.	33^{mm}	31^{mm}	16^{mm}	28^{mm}
Spessore	23^{mm}	20^{mm}	9^{mm}	18^{mm}

Conchiglia più lunga che larga a contorno ovale-pentagonale; superficie a punteggiatura finisssima, visibile con forte lente; le poche linee di accrescimento distinte suddividono la superficie delle valve in zone pressochè uguali; esse ordinariamente si fanno numerose e distinte verso i margini laterali e più sulla fronte. L'accrescimento meno regolare nell'età più adulta ingenera una sorta di lembo (*limbe*), per cui nei più grandi esemplari si rende più ottuso l'angolo di commessura delle valve. Dall'apice irradiano verso i margini delle finissime strie. La grande valva è molto più convessa della piccola; il suo apice è poco ricurvo e lascia allo scoperto il deltidio, indistinto negli esemplari finora rinvenuti; i lati dell'apice sono rotondeggianti, ed il forame, distinto solo nel più piccolo esemplare ed in uno di mediocre grandezza, è piccolo e rotondo. La piccola valva è quasi piana ed il suo apice assai depresso. Le valve si incontrano ad angolo acuto, e la linea di commessura cammina flessuosa; ai margini laterali, nella metà anteriore della conchiglia, essa disegna una distinta inflessione verso la piccola valva, per la quale si ingenera in corrispondenza una leggera depressione ai lati della valva opposta; al margine frontale poi si riflette fortemente verso la grande valva.

Questa terebratula per la piccolezza del suo forame e perchè lascia scorgere per trasparenza 3 o 4 linee oscure radianti dall'apice della piccola valva (*sillons*), potrebbe essere riferita alla sezione *Epithyris*.

Conservo parecchi esemplari; di questi figurai il più distinto per regolarità di forme (II), il quale per così dire, raduna in sè ben determinati quei caratteri che negli altri sono o appena accennati o più sviluppati o sviluppati meno simmetricamente. Così in due esemplari di mediocre dimensione la ripiegatura della linea commessurale verso la grande valva è ancora più pronunciata che non nella figura data come tipo di questa specie, e da ciò deriva alla conchiglia una minore lunghezza ed una apparenza più globosa alla piccola valva; in un altro il seno è più profondo sulla parte destra che non sulla sinistra; nel maggior esemplare il grossolano disporsi delle linee di accrescimento sui lati e sulla fronte rende incerto il regolare contorno ovale-pentagonale.

Terebratula Sismondai n. sp.

Tav. I. fig. 9 (*a*, *b*, *c*)

	I.	II.	III.
Lunghezza	36^{mm}	39^{mm}	33^{mm}
Larghezza.	33^{mm}	?	31^{mm}
Spessore	21^{mm}	23^{mm}	20^{mm}

Conchiglia più lunga che larga, a contorno sub-rotondo, poco depressa; la superficie, a punteggiatura visibile colla lente, è ornata da minutissime e assai numerose strie di accrescimento, intersecate da linee esilissime che irradiano dall'apice ai margini. La grande valva è più convessa della piccola; l'apice suo è piuttosto ricurvo, in modo però da lasciar scoperto buona parte del deltidio, il quale è più largo che alto, concavo e troncato superiormente dal forame di mediocre grandezza ed ovale di forma; i lati dell'apice sono rotondeggianti. Le valve si incontrano sotto un angolo acuto, e la linea di commessura si svolge ondulata ai margini laterali, inflettendosi leggermente alla fronte verso la grande valva.

Anche questa specie lascia vedere per trasparenza qualche linea oscura (*sillons*) irradiante dall'apice della piccola valva, carattere questo che, insieme agli altri della piccolezza del forame e della mancanza di carene all'apice, rende probabile il suo riferimento alla sezione *Epithyris*.

L'esemplare descritto e figurato è il solo completo finora rinvenuto; ne conservo due altri incompleti, dei quali il più grande si presenta proporzionalmente più acuto nella regione apiciale; ambedue poi, e singolarmente il più piccolo hanno più forte il seno delineato dalla commessura verso la grande valva.

Questa specie è affine alla *Terebr. subnumismalis* Dav. (1) e più alla *Terebr. Sinemuriensis* Opp. (2). Dalla prima differisce oltrechè per le dimensioni anche per avere le valve non ugualmente convesse, la commessura frontale leggermente inflessa verso la grande valva e non verso la piccola, per la mancanza di carene laterali all'apice, stretto. Dalla seconda differisce per la diversità nelle proporzioni, per lo sviluppo molto minore della regione dell'apice e per la forma del deltidio più largo e meno alto, per l'andamento della commessura flessuosa ai fianchi e rivolta alla grande valva sulla fronte. Nel calcare di Saltrio trovasi una forma assai simile alla *T. Sismondai*, quantunque di dimensioni minori.

Waldheimia King.

Waldheimia Gastaldii n. sp.

Tav. I. fig. 10 (*a*, *b*). — Tav. II. fig. 4 (*a*, *b*).

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	18mm	19mm	17mm	19mm
Larghezza	18mm	17mm	17mm	18mm
Spessore.	12mm	14mm	13mm	13mm

Conchiglia lunga quanto larga od appena più lunga che larga; a contorno subpentagonale troncato alla fronte, la quale è assai larga. La superficie è punteggiata in modo straordinariamente fine e segnata da strie di accrescimento in qualche esemplare ben rilevate. Delle due valve la più grande è la più convessa; questa ha l'apice assai basso e largo, provvisto di carene ottuse ai lati e terminante con un forame piccolissimo. Lungo i fianchi si osserva un appiattimento che in taluni esemplari si cambia in una depressione più risentita verso la regione dell'apice. Ai lati lungo questo appiattimento si rileva la linea commissurale, la quale si inflette leggermente, sebbene non sempre, verso la grande valva; alla fronte le valve si incontrano sotto un angolo acuto, più o meno tagliente. Il setto mediano è evidente.

L'esemplare figurato alla tav. II. (fig. 4) sebbene diversifichi alquanto dalla forma tipica suddescritta, pel contorno della piccola valva più acuto posteriormente e più rotondeggiante alla fronte, sembra tuttavia più naturale associarlo a questa specie, cui è collegato per forme intermedie, anzichè riferirla alla *W. Catharinae* Gemm. (3),

(1) Deslongchamps, *Paléont. Franç.*, *Terr. Iurass.*, *Brachiop.*, pag. 124, 1863 tav. 28.
(2) Oppel, *U. d. Brachiopod. d. unt. Lias*, 1863 pag. 534 tav. X. fig. 2 *a*, *b*. *c*.
(3) Gemmellaro, op. cit., pag. 65 tav. X. fig. 12, 13.

da cui si differenzia specialmente per la diversità di spessore della piccola valva e per la forma dell'appiattimento ai lati.

La *Waldh. Gastaldii,* anche per consenso del signor prof. Meneghini, differisce dalla *W. mutabilis* Opp. (1), per la diversità nelle proporzioni, per la regione frontale assai più dilatata e quindi per la figura del contorno, per la conformazione dell'apice meno alto, pel minore sviluppo del deltidio e per l'andamento della commessura laterale. Anche questa specie ha rappresentanti nel calcare di Saltrio.

Waldheimia Paretoi n. sp.

Tav. II. fig. 1 (*a*, *b*, *c*).

	I.	II.
Lunghezza	17mm	17mm
Larghezza	13mm	14mm
Spessore	11mm	11mm

Conchiglia più lunga che larga a contorno sub-pentagonale col margine frontale o rettilineo o leggermente arcuato all'infuori. La sua superficie è finissimamente punteggiata e porta forti linee di accrescimento sulla sua metà anteriore. Le due valve sono rigonfie e meno la piccola che la grande, la quale è quasi gibbosa. L'apice della grande valva è poco alto, acuto e poco ricurvo; il suo forame è piccolissimo, le sue carene laterali assai acute si sfumano presto coi fianchi; il deltidio è basso e largo. Ai fianchi la conchiglia è appiattita, ed una depressione accompagna le carene dell'apice; lungo i fianchi la commessura delle valve è alquanto flessuosa; alla fronte invece l'incontro delle valve si fa ad angolo più o meno acuto.

Il setto mediano è assai evidente.

Questa specie, totalmente diversa dalla *W. Gastaldii* Par., è affine alla *W. stapia* Opp. (2), e più che alla forma tipica di Hierlatz rassomiglia alla forma dei depositi siciliani che il signor prof. Gemmellaro (3) riferisce a questa specie. Dall'una e dall'altra differisce tuttavia per le proporzioni diverse e specialmente pel forte spessore della grande valva, pel maggior appiattimento ai fianchi e per l'andamento non rettilineo della commessura ai fianchi stessi.

Waldheimia n. sp.

Tav. II. fig. 2 (*a*, *b*).

Lunghezza 19mm Larghezza 18mm Spessore 15mm

Conchiglia rigonfia a contorno sub-pentagonale, troncato alla fronte, appena più lunga che larga; le due valve sono assai convesse, ed in maggior grado la grande che la piccola, e leggerissimamente concave nella regione frontale. L'apice della grande valva è molto basso e curvo per modo da nascondere affatto il deltidio; il suo forame è piccolissimo. Lateralmente alle due valve scorgesi una depressione che va gradatamente scomparendo verso l'avanti, unitamente alle carene laterali dell'apice

(1) Oppel, op. cit., pag. 538 tav. X. fig. 7 *a*, *b*, *c*, *d*.
(2) Oppell. op. cit., pag. 539 tav. XI. fig. 2.
(3) Gemmellaro, op. cit., pag. 67 tav. X. fig. 14.

che la delimitano. In questa depressione, specialmente costituita dal lembo della grande valva, scorre in rilievo la linea commessurale lievemente ondulata. Alla fronte le valve si incontrano sotto un angolo acuto e la linea di commessura s'incurva alquanto all'indietro. La superficie della conchiglia è finamente punteggiata e porta visibili linee di accrescimento specialmente ai fianchi e sulla fronte. Il setto mediano è visibilissimo.

Questa specie è affine alla forma siciliana che il signor Gemmellaro (1) associò alla *W. Enghelhardti* Opp.; dalla quale si differenzia oltrechè per l'apice più basso anche per la diversità nelle misure proporzionali e per l'andamento laterale ondulato e non rettilineo della commessura.

Waldheimia cfr. Ewaldi Opp.

Tav. II. fig. 3 (*a, b, c*).

1861. Waldheimia Ewaldi: Oppel, *Ueber die Brachiopoden des untern Lias*, pag. 539 tav. XI. fig. 1 (*a, b, c, d*).

1874. Waldheimia Ewaldi: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, p. 69 tav. XI. fig. 7, 8.

	I.	II.
Lunghezza	13^{mm}	8^{mm}
Larghezza	14^{mm}	8^{mm}
Spessore	11^{mm}	5^{mm}

Questa specie nel calcare di Gozzano è rappresentata da pochi esemplari a dimensioni più grandi e proporzionalmente più larghi della forma tipica di Hierlatz. Tale circostanza può ingenerare un dubbio sull'esattezza del riferimento. L'apice è piccolo e rivolto all'ingiù, ed i suoi orli, salienti dapprima, sfumano dopo breve decorso parallelo alla commessura delle valve. È distintissimo il mediano avvallamento della piccola valva, il quale comincia a manifestarsi sensibile e stretto a poca distanza dall'apice per diventare assai largo e profondo al bordo frontale. Le due valve, e più la grande, sono assai rigonfie nella regione apiciale e la linea di commessura disegna una curva a convessità verso la piccola valva sui lati ed un'altra a convessità rivolta verso la grande sulla fronte, in modo affatto somigliante a quanto si scorge sulla figura del prof. Gemmellaro.

Rhynchonella Fischer.

Rhynchonella undata n. sp.

Tav. II. fig. 5 (*a, b*).

Larghezza 27^{mm} Lunghezza 29^{mm} Spessore 15^{mm}

Conchiglia di poco più larga che lunga, appiattita a contorno arrotondato-irregolare; la superficie è finissimamente fibrosa; le linee di accrescimento, distinte solo ai margini, sono numerosissime ed esilissime e soltanto qualcuna si presenta rimarcabile ad occhio nudo. Le valve, ugualmente convesse, sono ornate da pieghe ottuse

(1) Gemmellaro, op. cit., pag. 68 tav. X. fig. 15.

che irradiano dall'apice; se ne contano dieci nella regione apiciale, delle quali circa la metà solamente tocca il margine frontale, allargandosi di molto nell'ultimo tratto del loro decorso; le altre si sfumano di poco oltrepassato la parte mediana delle valve. A ciascun lato della fronte della piccola valva si nota un profondo solco, il quale attenuandosi longitudinalmente, scompare prima di raggiungere l'apice: corrispondentemente sulla valva opposta si eleva un rilievo il quale pure si sfuma prima di toccare l'apice. Per cui ne deriva che la piccola valva nella sua regione frontale si eleva al di sopra delle parti laterali, e che nella valva opposta la corrispondente parte mediana resta depressa fra le laterali, risultandone un seno non molto profondo a convessità rivolta verso la piccola valva. La conchiglia lateralmente porta una porzione appiattita (*méplat*), che si stende con forma ovale allungata dagli apici lungo i fianchi; ivi sono assai manifeste le linee di accrescimento, e nella parte di mezzo, leggermente depressa, si disegna in rilievo la linea commessurale delle valve. Questa sui fianchi si mantiene retta, mentre volgendosi verso la fronte, dove le valve si incontrano sotto un angolo acuto, seguendo le pieghe e le insenature delle valve, si inflette fortemente ai lati verso la grande valva, per rialzarsi verso la piccola e formare nella parte mediana della fronte parecchie ondulazioni non molto regolari nella loro altezza e larghezza. L'apice della grande valva è poco sviluppato e poco curvo; il cattivo stato di conservazione della regione apiciale impedisce di darne gli altri caratteri.

Di questa specie, assai distinta, di un tipo affine alla *Rhynchonella prona* Opp. (1), non mi venne dato di raccogliere che un solo esemplare.

Rhynchonella Stoppanii n. sp.

Tav. II. fig. 6 (*a*, *b*, *c*).

	I.	II.
Lunghezza	22mm	22mm
Largherza	22mm	26mm
Spessore	14mm	14mm

Conchiglia pressochè larga quanto lunga, a contorno sub-tetragonale, alquanto compressa. La superficie è finissimamente fibrosa e le linee di accrescimento vi si scorgono dovunque numerosissime ma esili; alcune però sono più demarcate e suddividono la superficie stessa in varie zone. Delle due valve la grande è di poco più convessa della opposta; parecchie pieghe poco distinte, assai ottuse, ornano la regione apiciale, e si sfumano prima di raggiungere la parte mediana. Sulla piccola valva ai lati della fronte si notano due marcate depressioni, le quali si dirigono longitudinalmente verso l'apice, ma si attenuano e scompajono prima di toccare la parte mediana; corrispondentemente nella valva opposta si elevano due rilievi, i quali pure si sfumano verso la parte mediana della valva. Da questa disposizione consegue una convessità nella parte mediana frontale della piccola valva ed una depressione in corrispondenza nella valva opposta, risultandone un seno profondo a convessità rivolta verso la piccola valva. La conchiglia lateralmente presenta una compressione (*méplat*)

(1) Oppel, op. cit., tav. XIII. fig. 7.

assai larga poco concava lungo la parte di mezzo, dove si delinea in rilievo la commessura delle valve, che lievemente si incurva verso la più grande di esse. Di fronte la unione si fa ad angolo non molto acuto e la linea di commessura lateralmente si spiega verso la grande valva, seguendo le due insenature e si rialza nella parte di mezzo dove si svolge leggermente ondulata. L'apice della valva maggiore è alto ma poco ricurvo.

Tre sono gli esemplari che esaminai di questa specie; uno è quello figurato, cui mi attenni specialmente per stendere la descrizione; l'altro, più grande di un terzo, è troppo malconcio per offrire altri particolari distintivi; il terzo assai ben conservato, si distingue dagli altri per avere una maggiore larghezza e (II) l'apice più ricurvo e con un forame piccolo e rotondo; di più esso è dissimetrico, poichè presenta la depressione laterale-frontale destra della piccola valva assai più profonda che non la sinistra.

Questa specie è affine alla *Rhynchonella undata* Par.; se ne distingue evidentemente però per il maggior spessore proporzionale, per il suo contorno di diversa figura, per il seno più profondo, per la diversa movenza della linea di commessura al margine frontale e per il maggior sviluppo proporzionale dell'apice della grande valva.

Rhynchonella flabellum Menegh.

Tav. II. fig. 7 (*a*, *b*, *c*); fig. 8 (*a*, *b*, *c*, *d*).

1874. Rhynchonella flabellum: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, pag. 83 tav. XI. fig. 14, 25, 26, 27.

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	19mm	18mm	14mm	14mm	10mm
Larghezza	22mm	21mm	16mm	13mm	9mm
Spessore	?	10mm	9mm	7um	5mm

I rappresentanti questa specie nel calcare di Gozzano corrispondono, assai alla descrizione data dal prof. Gemmellaro: essi, più che ad ogni altra corrispondono alla fig. 25 del succitato autore, e le lievi differenze che vi si ponno rimarcare consistono nel contorno ancora più decisamente triangolare e nella maggiore ottusità delle pieghe.

La figura 8 rappresenta una varietà, di cui si conservano 3 esemplari, che differisce dalla forma tipica per essere più ristretta alla fronte e per essere meno distintamente appiattita ai lati. Nel calcare di Gozzano finora non si rinvennero forme di passaggio da essa al tipo, mentre nell'Apennino centrale, come gentilmente mi comunicò l'illustre prof. Meneghini, essa si trova insieme ad altre intermedie che la collegano alla *R. flabellum* tipica.

Rhynchonella Briseis Gemm.

1874. Rhynchonella Briseis: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, pag. 77 tav. XI. fig. 19, 22

Lunghezza 18mm Larghezza 19mm Spessore 13mm

Conservo di questa specie un solo esemplare, il quale presentasi alquanto più

globoso di quelli figurati dall'autore succitato; le sue dimensioni però non escono dalle misure proporzionali riscontrate in questa forma. Negli altri caratteri corrisponde assai alla descrizione; l'apice curvato di poco ed acuminato manca degli spigoli laterali e la falsa area è invisibile; nel seno della piccola valva sonvi tre pieghe mentre sull'opposto rialzo della grande valva se ne annoverano quattro, e sopra ogni lato quattro altre meno sviluppate delle mediane.

Rhynchonella Scherina Gemm.

Tav. II. fig. 9 (*a*, *b*, *c*); fig. 10 (*a*, *b*, *c*); fig. 11 (*a*, *b*, *c*).

1874 Rhynchonella Scherina: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, p. 81 tav. X. fig. 24.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Lunghezza . . .	40mm	38mm	37mm	33mm	28mm	32mm	26mm
Larghezza . . .	40mm	37mm	40mm	31mm	29mm	33mm	26mm
Spessore. . . .	29mm	27mm	25mm	21mm	22mm	21mm	20mm

La *Rhynchonella Scherina* Gemm. è rappresentata nel calcare di Gozzano da un numero di individui di gran lunga maggiore di quello di ciascun altra specie; infatti gli esemplari finora raccolti sono più di cento, mentre delle altre specie sono poche quelle i cui rappresentanti superano la diecina. Epperò volendo distinguere questa fauna liassica colla specie più ricca d'individui e caratteristica sembrerebbe opportuno a questo scopo la *Rhynchonella Scherina* Gemm.

Come appare dai numeri rappresentanti le dimensioni, la specie del prof. Gemmellaro assume nel deposito gozzanese dimensioni assai maggiori che non nei depositi siciliani, ed in generale il diametro longitudinale invece di essere, come nella forma tipica, alquanto minore del diametro trasversale, mostrasi per contrario esteso di egual misura od anche di qualche cosa più lungo. Questo fatto però non è tale da lasciarci dubbiosi sull'esattezza del riferimento; perocchè siffatta modificazione di carattere, quantunque comune, non è estesa a tutti gli esemplari ed è concomitante allo sviluppo dell'individuo; infatti, come ancora risulta dalle succitate misure, la differenza aumenta col crescere della conchiglia; è meno sensibile negli esemplari di mediocre grandezza e, negli individui di dimensioni prossime a quelle della forma descritta dal prof. Gemmellaro, le differenze nelle misure dei diametri è pressochè insensibile.

In sì gran numero di esemplari distinguo una forma tipica predominante, la quale però per passaggi graduali si modifica in due altre forme derivate. Delle prime figurai l'esemplare più distinto e delle altre gli individui che presentano più spiccate le differenze. La forma predominante (fig. 9 *a*, *b*, *c*) offre un contorno sub-pentagonale e caratteri di ornamentazione pei quali non saprei trovare frasi descrittive migliori di quelle usate dal prof. Gemmellaro nella sua descrizione di questa specie. In quasi tutti gli individui il numero delle pieghe è di 5 nel seno e di 6 nell'opposto rialto e sopra ognuno dei lati da 2 a 3; in qualche esemplare poi sui larghi fianchi esterni delle coste estreme del rialto si rimarca la traccia di un'altra costa, che si sfuma prima di raggiungere il margine frontale.

Tale forma tipica viene modificata o per l'accrescimento o per la diminuzione del numero delle coste, pur mantenendosi invariati gli altri caratteri specifici.

Il caso di diminuzione del numero delle coste ha per estremo grado l'esemplare rappresentato colla fig. 10 (*a*, *b*, *c*). In esso si annoverano solo 4 coste nel seno e 5 nell'opposto rilievo; e ciò perchè sia nel seno che nel rialto opposto le coste, omologhe a quelle che negli esemplari della forma tipica sono le più esterne, in questo individuo si presentano per così dire atrofizzate, chè solo se ne ha qualche traccia sul fianco di quell'altre coste che invece delle mancanti delimitano il seno ed il rialto. Però tale modificazione di forma non si mostra in generale così distinta dalla fondamentale come nell'esemplare suddescritto; giacchè le variazioni si limitano di solito al semplice impicciolirsi delle due coste esterne del seno e del rialto.

L'altra deviazione dal tipo deriva pure dal variare il numero delle coste, che in questo caso si aumenta. Tale aumento si ingenera per lo sdoppiarsi di qualcuna delle coste a qualche distanza dall'apice. Nel seno invece di 5 se ne ponno annoverare 6 ed anche 7 e nell'opposto rilievo 7 e talora persino 8. Il bello esemplare figurato al n. 11 (*a*, *b*, *c*.) rappresenta il massimo sviluppo del numero delle coste, le quali, in confronto di quelle della forma tipica, appajono più strette e meno alte, mantenendosi tuttavia distintamente carenate: di più sul fianco esterno delle coste che delimitano il seno e l'opposto rilievo se ne sviluppano due altre, meno rilevate, le quali, rendendo quasi graduale il passaggio dal rialto alle parti laterali, fanno sì che nella conchiglia venga mascherata la sua forma quasi trilobata a contorno sub-pentagonale caratteristico.

Per quest'ultima forma derivata si stringono sempre più i legami di parentela che il prof. Gemmellaro già rimarcò esistere tra la *Rhynconella Scherina* e la *Rhynchonella serrata* Sow. (1). Quella però si distingue pur sempre da questa per la sua forma assai più acuta posteriormente, per la maggior estensione dell'appiattimento (*méplat*) ai fianchi, pel costante, profondo seno e corrispondente opposto rialto, e pel numero delle coste generalmente molto minore.

Rhynchonella Zitteli Gemm.

Tav. III. fig. 1 (*a*, *b*, *c*).

1874. Rhynchonella Zitteli: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, p. 78 tav. XI. fig. 23.

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	25mm	21mm	22mm	23mm	19mm
Larghezza	29mm	27mm	27mm	26mm	23mm
Spessore	17mm	15mm	14mm	15mm	12mm

La *Rhynchonella Zitteli* Gemm. è piuttosto frequente nel giacimento di Gozzano, dove assume dimensioni maggiori che non nei depositi siciliani. I caratteri però vi sono marcati: il seno nella grande valva è largo e profondo ed il corrispondente rialto nella valva opposta, leggero nei piccoli esemplari, si rende più distinto nei più grandi. Quelli poi che hanno il seno profondo presentano anche un contorno pentagonale piuttostochè triangolare. Nel seno si contano da 5 a 7 pieghe e nel rialto da 6 a 8, e sopra ogni lato da 4 a 6 pieghe laterali. Le pieghe più o meno acute e

(1) Davidson, *British oolitic and liasic Brachiopoda*, part. III. 1852, tav. 15 fig. 1 (forma tipica).

costantemente semplici, sono più salienti di quelle presentate dall'individuo figurato dal prof. Gemmellaro e però sono anche più evidenti nella regione apiciale. L'apice non si mostra molto conservato, tuttavia sufficientemente per lasciar convinti della corrispondenza della sua forma con quella descritta dall'autore succitato; talvolta appare leggermente carenato ai lati, ed in questo caso ne consegue una depressione, debole però, nello appiattimento (*méplat*) laterale, che di solito è piano e stretto.

Mentre è grande la corrispondenza tra la forma gozzanese e quella descritta dal signor Gemmellaro, vi si rimarca per contrario non molta rassomiglianza colla figura data dal prof. Zittel (1) per la *Rhynchonella* cfr. *Friasi* Opp. che l'illustre paleontologo siciliano ritiene doversi associare alla *R. Zitteli* Gemm. Le differenze consistono principalmente nelle dimensioni; infatti la larghezza è proporzionalmente maggiore e lo spessore minore specialmente ai lati. La *Rynchonella Zitteli* Gemm. del calcare di Gozzano differisce poi dalla *R. serrata* Sow. (2) singolarmente per il suo contorno meno rotondeggiante e per la presenza costante del profondo seno.

Rhynchonella Calderinii n. sp.

Tav. III. fig. 2. (*a*, *b*, *c*).

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	23mm	22mm	19mm	21mm
Larghezza	26mm	25mm	21mm	22mm
Spessore	16mm	15mm	14mm	16mm

Conchiglia più larga che lunga, a contorno irregolarmente triangolare, la sua struttura è finissimamente fibrosa e le linee di accrescimento sono affatto indistinte. Le due valve sono ornate da 10 a 12 coste, le quali, poco rilevate od affatto indistinte nella regione apiciale, si fanno molto larghe e rilevate, ma poco carenate alla fronte, dove quelle di una valva si uniscono alternativamente con quelle della opposta. La grande valva ha l'apice basso, poco acuto e poco ricurvo, con spigoli laterali rotondeggianti; l'estremità dell'apice è spatizzata e però il piccolo forame riesce poco distinto. Questa valva a breve distanza dall'apice, generalmente prima di raggiungere la metà anteriore della sua lunghezza, si deprime più o meno bruscamente nella sua parte mediana per lo spazio occupato di solito da 4 coste, ma talvolta anche soltanto da 3, formando alla fronte un profondo seno. La piccola valva, più convessa della opposta, in corrispondenza del seno di questa presenta un rialzo mediano, sempre distinto, ma più o meno saliente a seconda della profondità del seno opposto, ed è costituito da 5 coste e raramente da 4. I fianchi esterni delle coste che delimitano il rilievo della piccola valva e i fianchi interni di quelle che chiudono il seno sono assai estesi. La conchiglia porta nella porzione posteriore dei lati un appiattimento, lungo la cui parte mediana, poco depressa, si rileva la linea commessurale alquanto inflessa verso la piccola valva.

Questa forma, per quanto riguarda i suoi contorni e le sue misure proporzionali, è assai affine alla *R. Zitteli* Gemm., tanto da lasciare sulle prime dubbiosi sulla

(1) Zittel, *Geologischen Beobachtungen aus den Central-Appenninen.* (pag. 130 tav. XIV. fig. 18, *a*, *b*, *c*, *d*, 1876.)

(2) Davidson, opera cit. 1852, tav. XV. fig. 1.

opportunità di riferirla a questa stessa specie. Però dopo un maturo esame degli esemplari, in confronto colle figure e colla descrizione data dal prof. Gemmellaro per la *R. Zitteli* e cogli individui che rappresentano questa stessa specie nel calcare di Gozzano, si riconobbe la necessità di distinguerla quale nuova specie. Infatti le coste nella *Rhynchonella Calderinii* sono in minor numero sia sul rialto come nel seno e nelle parti laterali, ed inoltre sono più larghe e meno acute, il seno ed il risalto sono ancor più distinti e l'appiattimento (*méplat*) laterale è meno incavato nella sua parte mediana e si prolunga maggiormente verso la fronte. Essa è altresì più comune della *Rhynch. Zitteli* Gemm.

Rhynchonella cfr. tetraedra Sow.

Tav. III. fig. 3 *(a, b, c)*

1852. Rhynchonella tetraedra: Davidson, *Monogr. of British Oolitic and Lias. Brachiopoda* (Palaeont. soc.), pag. 93 tav. XVIII. fig. 5, 10.

1858. Rhynchonella tetraedra: Quensted, *Der Jura* (*Mittlerer Lias*), p. 179 tav. XXII, fig. 11.

1878. Rhynchonella tetraedra: Davidson, *Monogr.*, ecc., *Supplement to the jurassic and triassic species* (Palaeont. soc.) pag. 198 tav. XXIX. fig. 6.

	I.	II.	III.
Lunghezza	20^{mm}	22^{mm}	16^{mm}
Larghezza	24^{mm}	24^{mm}	15^{mm}
Spessore	17^{mm}	17^{mm}	12^{mm}

Nel calcare di Gozzano è alquanto comune una forma assai affine a questa specie, ma meno globosa e meno sviluppata nelle dimensioni di quella descritta dal Davidson e dal Quensted; e però questa non esatta corrispondenza nelle proporzionali misure può ingenerare qualche dubbio sulla esattezza del riferimento. Tuttavia conforta a ravvicinare tale forma alla specie del Sowerby e la concordanza sufficiente negli altri caratteri ed il fatto della estensione della *Rhynch. tetraedra* Sow. nel liass medio. Le coste poco salienti, raggiungono in tutti gli esemplari il numero di 22, toccano in alcuni il 29, in altri il 30, ma in generale stanno intorno al 25 o 26. Così varia da 9 a 6 il numero delle coste mediane che nella piccola valva si elevano al di sopra delle laterali a formare il rialto, più o meno pronunciato, ma sempre distinto come il seno della valva opposto. Tale rialto non occupa mai, si può dire in tutti gli individui, la posizione mediana della valva, ma si presenta spostato ora verso destra ora verso sinistra, per modo che la conchiglia resta dissimetrica. In qualche esemplare si rimarca, sull'uno e sull'altro lato del rialto, il fatto che una o due coste non attingono il margine frontale, ma sfumano ad una breve distanza da esso; ed in questo caso è alquanto larga la parte anteriore del fianco esterno delle coste estreme del rialto. In nessun esemplare si notano coste biforcate. I caratteri apiciali corrispondono esattamente a quelli dati dal Davidson; l'apice è basso, ricurvo, carenato lateralmente e lascia vedere alla sua base una piccola e bassa falsa area. L'appiattimento (*méplat*) della porzione posteriore dei lati è concavo ed è ornato dalle ultime costicine laterali (1).

(1) La *Rhynch. tetraedra* Sow. venne già riscontrata nel calcare di Gozzano dal sig. Pareto (op. cit).

Rhynchonella Sordellii n. sp.

Tav. III. fig. 4 (*a*, *b*, *c*).

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	21mm	19mm	20mm	18mm	19mm
Larghezza	25mm	21mm	23mm	20mm	21mm
Spessore	15mm	15mm	14mm	13mm	13mm

Conchiglia di poco più larga che lunga a contorno sub-pentagonale: sulla superficie si rimarca la sua struttura fibrosa: vi si distinguono rare linee di accrescimento e solo al margine frontale. Delle due valve la piccola è alquanto più convessa della grande; ambedue sono ornate da coste in numero di 25 o 27, 28 nell'esemplare più grande, irradianti dall'apice ai margini laterali e frontali; sulla regione apiciale sono esse evidenti ma basse ed ottuse, in seguito si fanno più salienti e carenate, specialmente quelle che si dirigono alla fronte. La grande valva ha l'apice poco alto, mediocremente curvato così da lasciar vedere la base alquanto larga della falsa area, e rotondeggiante sui margini laterali, dove pure si distinguono le costicine; la struttura spatica di questa parte della conchiglia non permette di verificare la forma esatta del forame; si può tuttavia asserire che è piccolissimo. Questa stessa valva, ad un terzo circa della sua lunghezza, per lo spazio di 6 o 7 delle coste mediane, si deprime gradatamente verso la fronte, formando un ben distinto seno, al quale corrisponde nella valva opposta un rialto costituito da 7 a 8 coste. Nella porzione posteriore dei fianchi della conchiglia si rimarca un molto breve e stretto appiattimento (*méplat*), sulla linea mediana del quale si stende la linea di commessura delle valve, la quale assume lungo il suo decorso verso la fronte una disposizione sempre più a zig-zag, a seconda dell'aumentarsi della emergenza delle coste, che si incontrano ai margini disponendosi quelle di una valva alternativamente a quella della opposta. Fra la generalità degli esemplari uno si distingue per avere assai ottuse e pochissimo rilevate tutte le coste.

Questa specie per quanto riguarda la sua forma si avvicina alla *Rhynchonella Orsinii* Gemm., dalla quale però si differenzia per il numero di gran lunga maggiore delle coste e per la diversa forma dei fianchi. Per la sua figura e pel numero delle coste si rassomiglia anche colla forma della *Rhynch. tetraedra* Sow., che si trova nel calcare di Gozzano; tuttavia ponendo mente agli altri caratteri si resta convinti della opportunità di non confondere insieme questi due tipi. Infatti nella *Rh. Sordellii* trovasi uno spessore proporzionalmente minore, il contorno posteriore meno acuto; un seno meno distinto, le coste meno acutamente carenate, l'apice della grande valva meno sviluppato, e l'appiattimento ai fianchi affatto diverso e per estensione e per forma.

Rhynchonella discoidalis n. sp.

Tav. III. fig. 5 (*a*, *b*, *c*).

	I.	II.
Lunghezza	32mm	21mm
Larghezza	37mm	24mm
Spessore	19mm	13mm

Conchiglia di poco più larga che lunga, assai compressa; il suo contorno è ad angolo posteriormente, ed è molto largo e rotondeggiante anteriormente. La sua superficie mostra una struttura finissimamente fibrosa; esilissime sono le linee di accrescimento, le quali si fanno distinte solo alla fronte. Le due valve sono egualmente convesse e dai loro apici irradiano 18 coste, le quali, poco distinte nella regione apiciale, si fanno più larghe, rotondeggianti ed assai poco carenate nella parte anteriore, unendosi ai margini quelle di una valva alternativamente a quelle della opposta. La grande valva ha un apice sviluppato in grado mediocre, con spigoli laterali pure non molto acuti e la estremità spatizzata per modo da mascherare la forma e la misura del forame; nella parte anteriore questa stessa valva presenta la sua porzione mediana, per lo spazio occupato da 9 coste, lievemente depressa a formare un leggero seno, cui corrisponde nella opposta valva un rilievo pure poco distinto costituito da 10 coste. Sui fianchi della conchiglia si rimarca un appiattimento molto distinto, che si stende dalla regione cardinale lungo il fianco per circa due terzi della sua lunghezza; esso è alquanto concavo, e lungo la sua linea mediana si eleva la commessura delle valve, che vi scorre pressochè rettilinea.

Finora di questa specie mi fu dato vedere cinque esemplari; uno dei quali, pur presentando evidenti i caratteri specifici, si allontana alquanto dagli altri per avere un maggior numero di coste, il che dipende dal fatto che due coste ad un terzo della lunghezza delle valve a partire dall'apice si sdoppiano, si differenzia poi anche perchè porta un'apice più grande.

Vista dal di sopra la suddescritta specie presenta una fisionomia assai affine a quella offerta nella identica posizione dalla *Rh. serrata* Sow. (1), dalla quale tuttavia si differenzia per la minor curvatura dell'apice, pel maggior numero di coste, meno salienti, per la sua forma discoidale caratteristica, per la maggior lunghezza dell'appiattimento laterale e perchè le valve si incontrano alla fronte sotto un angolo assai acuto, il che non osservasi nella citata specie del Sowerby.

Rhynchonella n. sp.

Tav. III. fig. 6.

Lunghezza 11^{mm} Larghezza 10^{mm} Spessore 6^{mm}

Conchiglia appena più lunga che larga; il suo contorno è ad angolo acuto posteriormente e rotondeggiante anteriormente; la struttura appare finissimamente fibrosa e la superficie è segnata ai margini da sottili linee di accrescimento. Le due valve sono pressochè ugualmente convesse e portano 22 o 23 costicine piuttosto ottuse che si rimarcano fino sugli apici, d'onde irradiano ai margini. L'apice della grande valva è alto e poco ricurvo: il suo forame non è evidente ed i suoi fianchi sono mediocremente carenati. La conchiglia per breve tratto ai lati verso la regione cardinale porta un appiattimento (*méplat*) poco distinto. Tanto la grande valva come l'opposta presentano il fatto singolare che a partire dalla regione cardinale lungo i fianchi e sulla fronte poco lungi dai margini, ma in ambedue le valve ad egual distanza dai margini stessi, si modifica il loro accrescimento in modo affatto improvviso. Vale a

(1) Davidson, *Monogr*, 1852, cit. tav. XV. fig. 1.

dire, esso si continua su due piani interni a quelli a norma dei quali si erano dapprima sviluppate le due valve; mantenendosi però immutato il posto e la forma delle coste ed il regolare svolgimento della linea commessurale. Per cui queste due porzioni più recenti delle valve sono separate dalle più antiche da una sorta di gradino e nel suo complesso la conchiglia ci offre l'aspetto che presenterebbero due esemplari di una identica specie, compresi l'uno nell'altro e dei quali l'esterno non fosse sufficientemente grande da comprendere esattamente l'interno. Quantunque i caratteri di questa forma siano tali da distinguerla dalle altre affini, pure non mi credo autorizzato ad annoverarla quale specie nuova, in quanto che essa non è finora rappresentata nella mia raccolta se non da un unico esemplare,

Oltre le suddescritte specie conservo parecchie altre forme da esse diverse, che però non posso descrivere per il loro pessimo stato di conservazione.

ACEFALI

Pecten Lamarck.

Pecten convexus n. sp.

Tav. III. fig. 7.

Lunghezza 7^{mm} Larghezza 7^{mm}

Una sola valva sinistra (?), lunga quanto larga, alquanto convessa, equilaterale, acuta verso l'apice, che è ricurvo. Le linee di accrescimento non sono visibili, nemmeno sulle orecchiette, le quali sono uguali (?), assai piccole e segnate trasversalmente da qualche piccola piega. Questo *pecten* va distinto per le sue coste, le quali irradiano già evidenti dall'apice in numero di 13, a cui succedono 2 o 3 altre piccolissime verso le orecchiette. Esse sono strette ma assai rilevate e distinte e separate da un solco assai profondo, della larghezza pressochè uguale a quella delle coste, sono rotondeggianti, e quelle della parte mediana, viste colla lente, mostrano longitudinalmente ai due lati una sorta di doccia.

Una specie che si avvicina alla suddescritta è il *Pecten Humberti* Dum. (') il quale presenta di differente un numero diverso di coste, l'angolo apiciale retto, i solchi frapposti alle coste poco profondi, le orecchiette più grandi e le coste mancanti di docciatura.

Pecten inaequiradiatus n. sp.

Tav. III. fig. 8.

Lunghezza 4^{mm} Larghezza 4^{mm}

Una sola valva sinistra (?), lunga quanto larga, poco convessa, equilaterale, con apice acuto. La superficie è segnata da linee di accrescimento regolarmente concentriche, le quali si fanno più marcate sulle orecchiette eguali e triangolari. Dall'apice irradiono 9 coste principali, salienti, rette e rotondeggianti; lo spazio loro

(') Dumortier, *Étud. paléont.* ecc., *Lias moyen.*, *part. sup.*, pag. 308, tav. XL. fig. 2.

frapposto è maggiore fra quelle che raggiungono il margine frontale. Entro questi spazî e ad una certa distanza dall'apice si rimarcano altre costicine, le quali vanno ingrossandosi verso i margini, assai meno però delle principali. Frammezzo alle coste principali laterali se ne conta una sola e tra le frontali due di queste coste secondarie. In complesso le coste e le costicine raggiungono il numero di 15 o 16.

I caratteri interni sono ignoti, essendo l'esemplare infisso sulla roccia. Esso è affine al *Pecten amaltheus* Opp. (1); se ne distingue per la forma della regione apiciale più acuta, e per la disposizione distintamente diversa delle costicine.

Lima Bruguière

Lima Taramellii n. sp.

Tav. III. fig. 9.

Lunghezza 26^{mm} Larghezza 23^{mm}

Conchiglia ovale, alquanto più lunga che larga, assai rigonfia. L'apice è molto curvo e sporgente dalla linea cardinale, la quale è lunga in proporzione colle dimensioni della valva. Le orecchiette sono pressochè uguali e non molto distinte. La regione boccale è convessa e arrotondata, l'anale invece depressa, per cui la valva risulta più rigonfia dalla parte boccale. La superficie è ornata da rare, ma distinte linee di accrescimento e da costicine in numero di oltre 60. Queste coste sono ben distinte le une dalle altre e separate da solchi di una larghezza pressocchè uguale a quella delle coste stesse; esse irradiano a mala pena distinguibili dall'apice e molte verso la metà del loro decorso od in maggiore prossimità del margine si biforcano. Sulla regione apiciale si presentano liscie, in seguito si fanno gradatamente ma sempre più squammose e le squamme sono come embricate. L'unica valva che posseggo di questa bella specie è infissa sulla roccia, per cui non posso aggiungere i caratteri interni.

La *Lima Taramellii* per la sua forma ed ornamentazione è affine alla *Lima liasina* Gemm. Quest'ultima però mantiene dimensioni ed un numero di coste assai minori che non quella suddescritta, dalla quale inoltre si differenzia per altri caratteri non meno importanti.

Si raccolsero nel calcare di Gozzano non pochi frammenti di altri Acefali, che non posso descrivere perchè troppo incompleti; vi si distinguono tuttavia un *inoceramus* (?), una *tellina* e due *pecten*, di cui uno si avvicina al *Pecten frontalis* Dum. (2).

GASTEROPODI

Chemnitzia d'Orbigny.

Chemnitzia n. sp.

Tav. III. fig. 10.

L'unico esemplare è troppo incompleto per permettere di stabilirne le dimensioni e farne una completa descrizione. La conchiglia è alquanto conica, i giri della spira

(1) Stoliczka, *Ueber die Gasterop. und Aceph. der Hierlatz-Schichten.* (Sitz. d. k. Akad. d. W., 43 B. pag. 198 tav. VI. fig. 7).

(2) Dumortier, *Étud. paléont* ecc., *Lias moyen, part. sup.*, pag. 299 tav. XXXVII. XXXVIII.

rigonfi e ciascuno di essi presenta nella parte anteriore, in prossimità alla sutura una carena, parallelamente alla quale corrono delle sottili linee più o meno evidenti e più abbondanti nella parte anteriore dell'anfratto, le quali intersecano le linee di accrescimento poco marcate ed oblique. Sul maggior anfratto poi e nella sua parte più convessa una di queste linee sembra farsi più distinta. La sutura è assai profonda e non molto obliqua.

Oltre alla suddescritta *Chemnitzia* si raccolsero una *natica* piccolissima, distinta per una larga fascia sulla parte più convessa degli anfratti ed un *trochus* pure piccolissimo; ma il pessimo stato di loro conservazione non permette di tentarne la descrizione.

CEFALOPODI

Harpoceras Waagen.

Harpoceras Algovianum Opp.

1862 — 79. Ammonites Algovianus: Meneghini, *Paléontol. Lombard., Monograf., Les fossil. du calc. rouge ammonit.*, pag. 40 pl. X. fig. 1, 2. — Appendice. *Fossil. de Medolo*, pag. 8 tav. II. fig. 1, 9.

1874. Harpoceras Algovianum: Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Terebratula Aspasia Menegh. *della prov. di Palermo e Trapani*, pag. 105 tav. XII. fig. 27, 28.

Conservo di questa specie pochi frammenti sufficientemente conservati nei loro caratteri specifici. Di essi posso ripetere quanto disse il prof. Gemmellaro a proposito degli esemplari rappresentanti tale specie nei giacimenti siciliani. Le loro dimensioni sono cioè piccole assai e richiamano la forma pure piccola dell'*Harp. Algovianum* Opp., così comune nel calcare del monte Domaro (Medolo) in Val Trompia.

Accompagnano l'*Harpoceras Algovianum* Opp. poche altre piccolissime forme di Ammoniti (*Lytoceras* e *Stephanoceras* (?),) delle quali finora si ebbero esemplari troppo mal conservati per poter essere descritti. Do la figura di una sezione di Ammonite, che rappresenta la forma di maggior dimensione trovata finora nel calcare di Gozzano (tav. III. fig. 11.).

ECHINODERMI

Cidaris Klein.

Cidaris amalthei Quenst. sp.

1858. Cidarites amalthei: Quenstedt, *Der Jura. Mittler. Lias*, pag. 198 tav. XXIV. fig. 42, 44, 45.

1869. Cidaris amalthei: Dumortier, *Étud. paléont., sur les dép. jurassiques du bass. d. Rhone. Lias moyen, part. infér.*, p. 170, *part. supér.* p. 337 pl. 43 fig. 1-4.

Di questo *Cidaris* sono abbondanti dei brevi frammenti di radioli; ve ne hanno di diversi dimensioni, dal diametro di 2^{mm} circa si sale al maggior esemplare che lo presenta di 4^{mm}. Generalmente sono assai erosi; alcuni esemplari tuttavia presentano ancora conservata la superficie esterna ed i tubercoletti che la ornano. Conservasi una *placca* la quale non corrisponde molto alle figure che il Quenstedt ed il Dumortier danno delle placche della forma tipica, ma piuttosto alla fig. 45 della tav. XXIV. del Quenstedt, che rappresenta, secondo questo autore, un tipo più piccolo ed alquanto modificato, non tanto però da poterlo distinguere come forma diversa.

Cidaris sp. ind.

Tav. III. fig. 12.

Frammento di radiolo distinto per la singolare grossezza del diametro che è di circa 20^{mm}; a sezione irregolarmente sub-tetragona; la parte interna spatizzata è biancolucente, e le sezioni trasversali appajono finissimamente striate da linee regolarissime di clivaggio le quali inducono la sostanza calcare a rompersi in romboedri. Sulla sua superficie esterna oltre un grosso ed unico tubercolo si riscontrano longitudinali costicine. Questa ornamentazione esterna, mascherata in tale frammento da incrostazione calcare, è invece evidentissima in un esemplare di minor diametro che sfortunatamente per essere infisso nella roccia non presenta che un fianco. Sopra di esso le costicine stanno alla distanza di 1^{mm} l'una dall'altra, sono diritte, strette, parallele fra loro e rilevate; portano dei tubercoletti che distano l'uno dall'altro di uno spazio minore di quello che corre tra una costicina e l'altra.

La figura rappresenta molto ingrandito un piccolo frammento di superficie del radiolo più conservato.

Pentacrinus Miller.

Pentacrinus scalaris Goldfuss.

1842. Pentacrinus scalaris: Goldfuss, *Petrefacta Germ.*, pag. 173 tav. 52 figura 3.

1858. Pentacrinites scalaris: Quenstedt, *Der Jura* (*Der untere Lias*), pag. 111. tav. XIII. fig. 49-57.

1867-69. Pentacrinus scalaris: Dumortier, *Étud. paléont. sur l. dép. jurass. d. Bass. du Rhône* - 2.^{e} part., *Lias infér., part. inf.*, pag. 83 tav. XIV. fig. 7, 8, 9. - *Lias moyen, part. infér.*, pag. 163 tav. XXIII. fig. 10 a 14.

Conservo parecchi frammenti di stelo riferibili a questa specie, composti da 5 a 8 articoli, i quali vanno distinti per la esiguità della loro altezza. Un esemplare porta una delle faccie articolari sufficientemente ben conservata; ha un diametro di circa 10^{mm} e per la ornamentazione è riferibile in tutto alla fig. 57 della tav. XIII. del Quenstedt (op. cit.). Fra il gran numero di avanzi di crinoidi si rimarcano certi corpi provveduti lateralmente di una spina; essi presentano minor dimensione ma una forma assai analoga a quella figurata dal Quenstedt (op. e tav. cit.) nella illustrazione di questo stesso *Pentacrinus* ai n. 50 e 51, la quale, secondo lo stesso autore, rappresenterebbe l'articolo terminale di una pila di trachiti, da cui si staccano altre diramazioni.

Pentacrinus basaltiformis Miller.

1842. Pentacrinus basaltiformis: Goldfuss, *Petrefacta German.*, pag. 172 tav. LII. fig. 2.

1858. Pentacrinites basaltiformis: Quenstedt, *Der Jura* (*Mittl. Lias*), pag. 195 tav. XXIV. fig. 20, 31.

1869. Pentacrinus basaltiformis: Dumortier, *Étud. paléont., Bass. d. Rhône.* III. *Lias moyen, part. infér.*, pag. 162 tav. XXIII. fig. 15, 16, 17, 41.

1879. Pentacrinus basaltiformis: Meneghini, *Monogr., Les foss. d. calc. roug. amm.* pag. 181, 2

La piccolezza degli esemplari ed il cattivo stato di conservazione non permettono di riscontrare distintamente i caratteri nei frammenti piuttosto abbondanti degli steli di questa specie. Essi mantengono dimensioni meschine, presentansi composti di un numero di articoli non maggiore di 8 e 10, e si distinguono dal *P. scalaris* Gold. per la loro forma ottusamente pentagonale. In complesso per la figura si ponno riferire ai n. 28 e 29 della tav. citata del Quenstedt; le ornamentazioni delle faccie articolari sono raramente distinte e quando lo sono si presentano disposte in modo pure analogo a quello figurato dal succitato autore.

Pentacrinus sp.

Piccolissimi articoli i quali ordinariamente hanno una altezza uguale alla metà (1 o 2^{mm}) del diametro delle faccie articolari; talvolta però superano in altezza la misura del diametro stesso. Essi presentano sopra una delle faccie articolari, nella parte centrale all'intorno del foro, una sporgenza subconica ornata da 2 o 4 tubercoli o denticoli. A questo rilievo corrisponde nella faccia articolare opposta una leggera depressione. Questa forma potrebbe essere avvicinata al *Pentacrinus punctiferus* Quenst. (1).

Millecrinus

Millecrinus Hausmanni Roem. sp.

1858. Mespilocrinus amalthei: Quenstedt, *Der Jura. Mittl. Lias*, pag. 198 tav. XXIV. fig. 38, 41.

1869. Millecrinus Hausmanni: Dumortier, *Étud. paléont., Bass. d. Rhône.* III. *Lias moyen, part. infér.*, pag. 166 tav. XXIII. fig. 18 a 33, *part. supér.*, pag. 340.

1879. Millecrinus Hausmanni: Meneghini, *Monogr., Les foss. d. calc. rouge amm.*, pag. 181 tav. XXX. fig. 14-19.

La maggior parte degli avanzi di millecrini, che si trovano nel calcare di Gozzano, devesi ascrivere a questa specie. Generalmente sono piccolissimi articoli isolati, dei quali il diametro delle faccie articolari è pressochè uguale alla loro altezza; si presentano forati nel centro e lisci sia sulla superficie esterna come

(1) Quenstedt, *Der Jura, Mittl. Lias*, pag. 159 tav. XIX. fig. 53, 55.

sulle faccie articolari. Il più distinto ed il più grande esemplare ha 4^{mm} di diametro ed una altezza incerta perchè sporge solo in parte dalla roccia. Mostra sulla faccia articolare un foro non perfettamente rotondo e le pieghe raggianti periferiche delle quali le più brevi alternano colle più lunghe, per cui trova una esatta figura di confronto nel n. 17 della tav. cit. del signor prof. Meneghini.

Millecrinus cfr. Adneticus Quenst.

1879. Millecrinus cfr. Adneticus: Meneghini, *Monogr., Les foss. de calc. roug. amm.*, pag. 183 tav. XXX. fig. 24.

Sono alquanto numerose anche certe forme cilindriche nel cui centro si rimarca un piccolo foro; all'esterno non sono liscie ma come zigrinate e ricoperte da una sostanza nerissima (ossido di manganese (?)), la quale fa forte risalto col bianco lucente dalla parte interna spatizzata. Ne conservo qualche campione, dei quali uno è formato da due articoli sovrapposti, che hanno il diametro di 8^{mm}, l'altezza di circa la metà e la sutura a quanto pare non denticolata; un altro poi non è rappresentato che da una sola faccia articolare del diametro di 6^{mm}, la quale è completamente ornata da pieghe, radianti dal foro centrale, estremamente fine, così da corrispondere esattamente all'esemplare del calcare di Bicicola fig. al n. 24 della tav. citata del prof. Meneghini.

Quadro Comparativo

	I Fossili del calcare liassico di Gozzano	ITALIA				Austria
		Sicilia	Appennino centrale	Alpi Lombarde	Alpi Venete	
1	Lepidotus sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
2	Spiriferina angulata Opp.	St. a *Ter. Aspasia*	. . .	. . . .	Sospirolo ? (Liass infer.)	(Strati di Hierlatz (Liass infer.)
3	» Münsteri Dav. sp.	St. a *T. Aspasia*	. . .	(Arzo (L. m.) (Azzarola (Infr.)	. . . .	. . . .
4	» rostrata Schl. sp.	St. a *T. Aspasia*	St. a *T. Aspasia*	(Arzo - Saltrio - (Tremona (Liass)	. . . .	. . . .
5	Terebratula Taramellii Gemm.	St. a *T. Aspasia*	. . .	. . . .	Ampezzano (Liass m.)	. . . .
6	» cfr. Andleri Opp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	St. di Hierlatz
7	» Meneghinii n. sp.	. . . . .	St. a *T. Aspasia*	Saltrio	. . . .	. . . .
8	» Gemmellaroi n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
9	» cfr. pyriformis Suess.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
10	» Gozzanensis n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
11	» Sismondai n. sp.	. . . . .	. . .	Saltrio	. . . .	. . . .
12	Waldheimia Gastaldii n. sp.	. . . . .	. . .	Saltrio	. . . .	. . . .
13	» Paretoi n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
14	» n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
15	» cfr. Ewaldi Opp.	St. a *T. Aspasia*	. . .	. . . .	. . . .	St. di Hierlatz
16	Rhynchonella undata n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
17	» Stoppanii n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
18	» flabellum Menegh.	St. a *T. Aspasia*	St. a *T. Aspasia*	Arzo	Ampezzano	. . . .
19	» Briseis Gemm.	St. a *T. Aspasia*	. . .	Arzo	Ampezzano	. . . .
20	» Scherina Gemm.	St. a *T. Aspasia*	. . .	Arzo	. . . .	. . . .
21	» Zitteli Gemm.	St. a *T. Aspasia*	. . .	Arzo e Saltrio	. . . .	. . . .
22	» Calderinii n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
23	» cfr. tetraedra Sow.	. . . . .	. . .	Arzo e Saltrio	. . . .	. . . .
24	» Sordellii n. sp.	. . . . .	St. a *T. Aspasia*	. . . .	. . . .	. . . .
25	» discoidalis n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
26	» n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
27	Pecten convexus n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
28	» inaequiradiatus n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
29	Lima Taramellii n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
30	Chemnitzia n. sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
31	Harpoceras Algovianum Opp.	St. a *T. Aspasia*	St. a *T. Aspasia*	Medolo - Elba ecc. (Liass sup.)	. . . .	. . . .
32	Cidaris amalthei Quenst.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
33	» sp. ind.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
34	Pentacrinus scalaris Gold.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
35	» basaltiformis Mill.	. . . . .	. . .	Arzo - Saltrio	. . . .	. . . .
36	» sp.	. . . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
37	Millecrinus Hausmanni Roem.	. . . . .	St. a *T. Aspasia*	Liass sup.	. . . .	. . . .
38	» cfr. Adneticus Quenst.	. . . . .	St. a *T. Aspasia*	Liass sup.	. . . .	. . . .

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

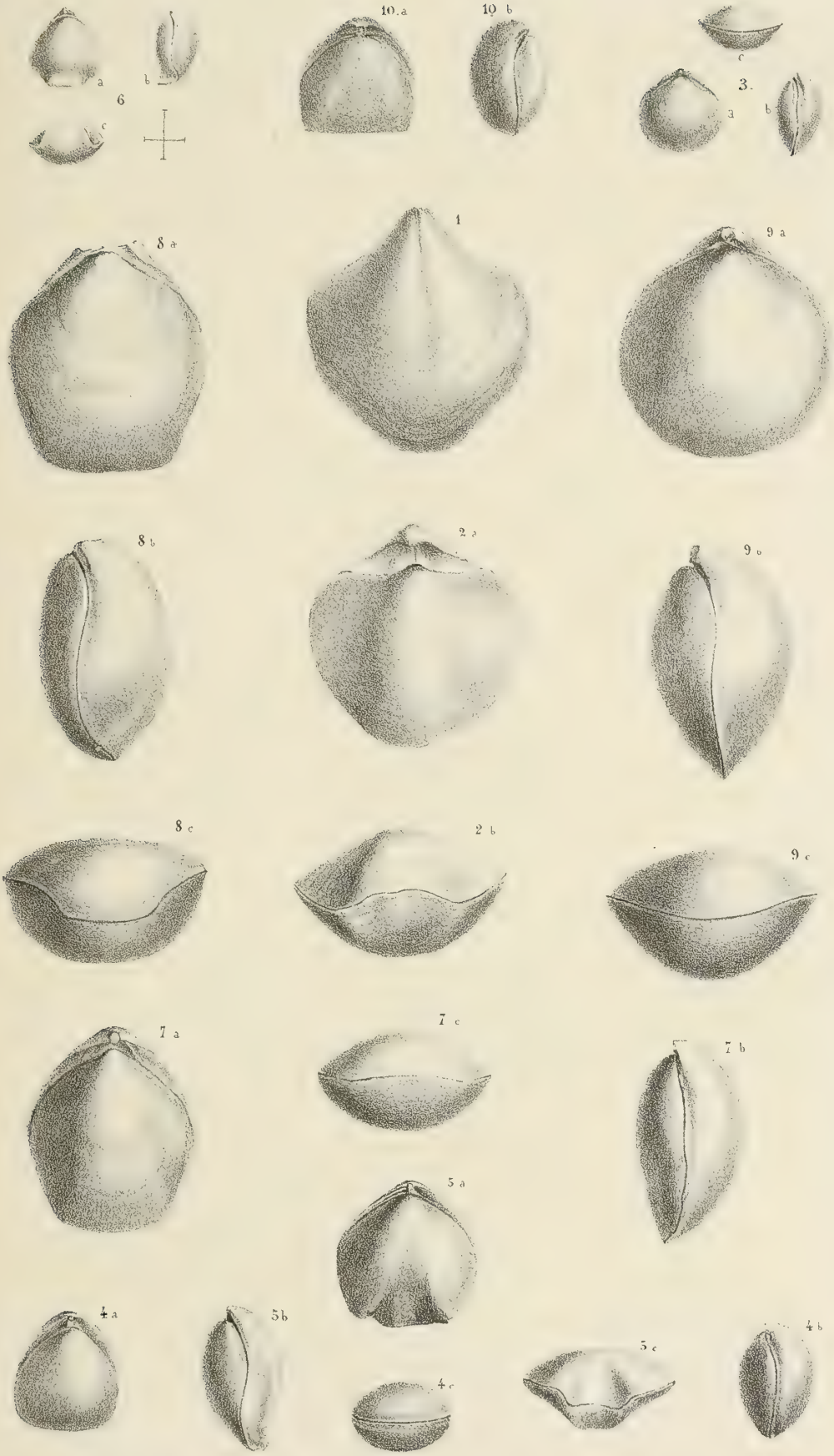
Fig. 1 *Spiriferina rostrata* Schl. sp.
» 2 (*a*, *b*) » »
» 3 (*a*, *b*, *c*) *Terebratula Taramellii* Gemm.
» 4 (*a*, *b*, *c*) » cfr. *Andleri* Opp.
» 5 (*a*, *b*, *c*) » *Meneghinii* n. sp.
» 6 (*a*, *b*, *c*) » *Gemmelaroi* n. sp.
» 7 (*a*, *b*, *c*) » cfr. *pyriformis* Suess.
» 8 (*a*, *b*, *c*) » *Gozzanensis* n. sp.
» 9 (*a*, *b*, *c*) » *Sismondai* n. sp.
» 10 (*a*, *b*) *Waldheimia Gastaldii* n. sp.

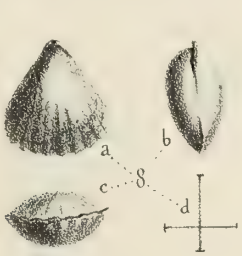
Tavola II.

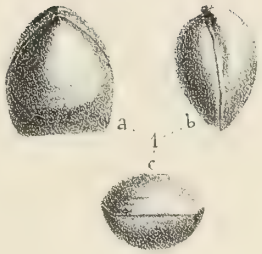
Fig. 1 (*a*, *b*, *c*) *Waldheimia Paretoi* n. sp.
» 2 (*a*, *b*) » n. sp.
» 3 (*a*, *b*, *c*) » cfr. *Ewaldi* Opp.
» 4 (*a*, *b*) » *Gastaldii* n. sp.
» 5 (*a*, *b*) *Rhynchonella undata* n. sp.
» 6 (*a*, *b*, *c*) » *Stoppanii* n. sp.
Fig. 7 (*a*, *b*, *c*) *Rhynchonella flabellum* Menegh.
» 8 (*a*, *b*, *c*) » » »
» 9 (*a*, *b*, *c*) » *Scherina* Gemm.
» 10 (*a*, *b*, *c*) » » »
» 11 (*a*, *b*, *c*) » » »

Tovola III.

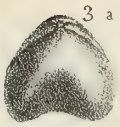
Fig. 1 (*a*, *b*, *c*) *Rhynchonella Zitteli* Gemm.
» 2 (*a*, *b*, *c*) » *Calderinii* n. sp.
» 3 (*a*, *b*, *c*) » cfr. *tetraedra* Sow.
» 4 (*a*, *b*, *c*) » *Sordellii* n. sp.
» 5 (*a*, *b*, *c*) » *discoidalis* n. sp.
» 6 (*a*, *b*, *c*) » n. sp.
» 7 *Pecten convexus* n. sp.
» 8 » *inaequiradiatus* n. sp.
» 9 *Lima Tarantellii* n. sp.
» 10 *Chemnitzia* n. sp.
» 11 *Ammonites* sp.
» 12 *Cidaris* sp. ind.
» 13 *Lepidotus* sp.


6
a
b
c
10 a
10 b
3.
c
a
b
8 a
1
9 a
8 b
2 a
9 b
8 c
2 b
9 c
7 a
7 c
7 b
5 a
4 a
5 b
4 c
5 c
4 b


a
b
c
8.
d


a
b
1
c

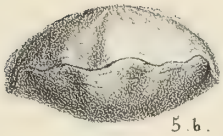
a
7
b
c


3 a

3 c.

3 b

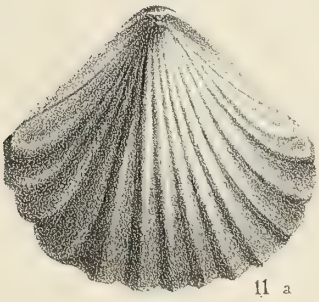
6 b

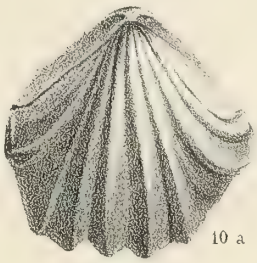

5 b.

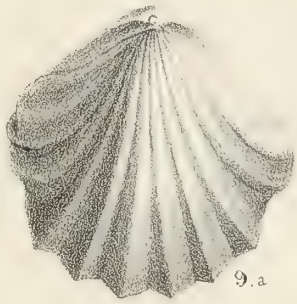
5 a

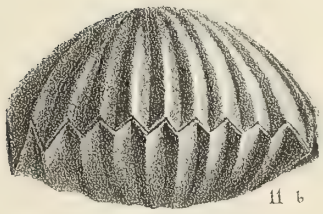
6 a

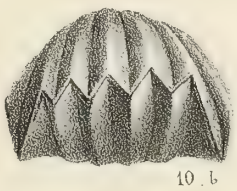
6 c

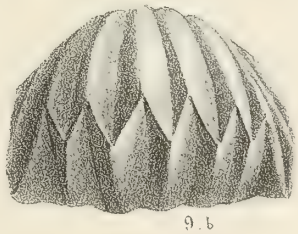

11 a


10 a


9 a


11 b


10 b


9 b

2 a.

2 b

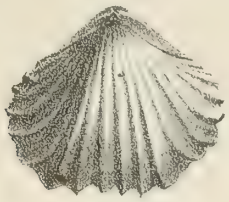
11 c.

10 c.

9 c

4 a.

4 b.

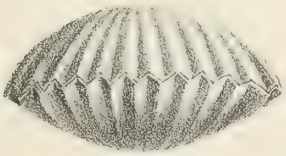


1. a

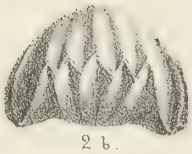
5 a

2. a

1 b

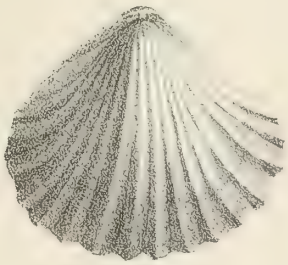


5 b.



2 b.

1. c

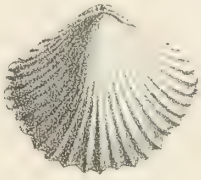


5 c

2 c.

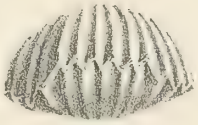
3. a.

9



4. a.

3. b.



4. b.

3. c.

10

11

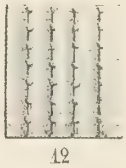
4. c.

6

7

13

8



12

De aequationum differentialium partialium natura disquisitiones quaedam analyticae.

Memoria del prof. G. B. FAVERO

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

1. Quaestio de natura et integratione aequationum differentialium partialium valde in proximis annis commentationibus cl. A. Meyer, S. Lie et aliorum (1) pertractata fuit, ita ut ea omnia, quae ill. Lagrange, Pfaff, Cauchy et Jacobi de eiusmodi aequationibus maximo ingenii acumine disseruere, non tantum novis et simplicioribus solutionis methodis aucta sint, sed ampliores sane et fecundiores de aequationum natura cognitiones in lucem prolatae.

Paesenti commentatione hoc mihi consilium proposui, aliquid de his aequationibus disserere, ita ut earum natura simpliciori perspicientia pateat, et methodus nova (ut puto) de earum integratione per seriem exhibeatur.

In hac disquisitione illa tantum vetus aequationum differentialium notio servatur, secundum quam variabilem quandam z cum m variabilibus $x_1 \ldots x_m$ ea ratione connexam consideramus, ut $x_1 \ldots x_m$ inter se omnino et continuo independentes permaneant. Quae condicio amplissimam illam a cl. Lie praebitam notionem de integratione aequationum primi ordinis in exiguos quosdam fines deducit (2).

Observandum est praeterea, praesenti commentatione de aequationibus partialibus generatim tantum actum esse; casus igitur omnes a priori exclusi putantur, qui seu discontinuitate functionum, seu alia causa quacumque formulas generales irritas et ineptas efficiunt.

Ut faciem formularum multiplicem evitemus, notis quibusdam brevitatis causa uti iuvet, quod non novitatis desiderio, sed eo tantum consilio facere putamus, ut facilioris conspectus auxilio significatio quoque formularum leviori mentis labore percipiatur. Ceterum facillime inventae rationes signis vulgo adhibitis scribi poterunt.

Sumantur numeri naturales

$$1, 2, 3, \ldots, m,$$

et combinationes omnes p^{ariae} cum repetitione perficiantur. Numerentur postea combinationes lege quadam, et sint singulae combinationes ordinatim notis designatae

$$1_p, \quad 2_p, \quad 3_p, \ldots, \lambda_p, \ldots$$

ita ut nota generali λ_p combinatio generalis $p^{aria}\ ab\ldots$ e numeris naturalibus indicata sit.

(1) Math. Ann. III, IV, V, IX, XI, XII, XIII.
(2) Math. Ann. IX, p. 245.

Habeatur nunc quantitas quaedam variabilis z, quae functio sit variabilium $x_1 \ldots x_m$. His positis, notis utemur

$$\frac{\partial z}{\partial x_a} = (a)\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_a \partial x_b} = (ab)\,, \quad \frac{\partial^p z}{\partial x_a \partial x_b \ldots} = (\lambda_p)$$

$$\frac{\partial (\lambda_p)}{\partial x_f} = (f\lambda_p), \quad \frac{\partial (f\lambda_p)}{\partial x_g} = (gf\lambda_p)\,, \text{ etc.}$$

Si $gf \ldots$ combinatio quaedam sit n_1^{aria} et habeatur $n_1 + p = n$, erit $(gf \ldots \lambda_p)$ derivata quaedam ordinis $n.^{mi}$ Notae quoque animadvertendae sunt

$$(0) = (\lambda_0) = z\,, \quad (a\lambda_0) = (a) \text{ et similia.}$$

Si functio quaedam $\varphi(x_1 \ldots x_m\ z\ v_1 v_2 \ldots)$ habeatur, in qua variabiles $x_1 \ldots x_m$ independentes sint, quantitates vero $z\ v_1\ v_2 \ldots$ functiones sint variabilium independentium, derivatas

$$\frac{d\varphi}{dx_a}, \quad \frac{d^p \varphi}{dx_a dx_b \ldots} \quad \text{notis} \quad (a^{\varphi})\,, \ (\lambda_p{}^{\varphi})$$

designabimus, quod tali modo intelligi volumus, ut sit ex. gr.

$$(a^{\varphi}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_a} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_a} + \ldots \quad \text{et similia;}$$

erit quoque

$$\frac{d\,(\lambda_p{}^{\varphi})}{dx_a} = \frac{\partial (\lambda_p{}^{\varphi})}{\partial x_a} + \frac{\partial (\lambda_p{}^{\varphi})}{\partial z}\,(a) + \ldots = (a\lambda_p{}^{\varphi})\,.$$

2. Functio quaedam habeatur variabilium $x_1\ x_2 \ldots x_m$

$$z = \mathrm{F}\,(x_1\ x_2 \ldots x_m)\,,$$

variabiles vero x variabilibus y aequationibus connexae sint.

$$(1) \qquad x_a = \psi_a\,(y_1\ y_2 \ldots y_m) \quad a = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Si z eiusque derivatae (λ_p) ut functiones variabilium x, hae vero ut functiones variabilium y considerantur, pro numero quodam n habebuntur aequationes

$$(2) \qquad \frac{\partial (\lambda_{n-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n-1}) \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} a = 1, 2, \ldots, m \\ y = y_1, y_2, \ldots, y_m \end{cases}$$

in quibus omnes derivatae (λ_p) ordinis $n-1.^{mi}$ et $n.^{mi}$ reperiuntur, et in quibus $\frac{\partial x_a}{\partial y}$ functiones sunt variabilium $y_1\ y_2 \ldots y_m$ ab aequationibus (1) deductae.

Si nunc ex aequatione $z = \mathrm{F}$ derivatae (λ_{n-1}) et (λ_n) deducantur variabilibus $x_1 \ldots x_m$ expressae: et postea in has derivatas valores x_a ex aequationibus (1) desumpti, sufficiantur, aequationes (2) valoribus (λ_{n-1}), (λ_n) tali modo expressis identice satisfactae evadunt.

Si porro in aequationibus (2) valores quantitatum (λ_{n-1}) ideoque etiam quantitatum $\frac{\partial (\lambda_{n-1})}{\partial y}$ variabilibus $y_1\ y_2 \ldots y_m$ exprimantur, quantitates vero $(a\lambda_{n-1})$, idest derivatae (λ_n) ordinis $n.^{mi}$ tanquam incognitae considerentur, valores incognitarum ab ipsis aequationibus (2) determinari necesse est; quoniam, ut ipsis aequationibus (2) identice satisfiat, tantummodo valores (λ_n) ab aequatione $z = \mathrm{F}$ deductos et variabilibus $y_1 \ldots y_m$ expressos adhibere licet. Aequationes (2), quod attinet ad incognitas (λ_n), lineares sunt, et valores qui, aequationibus solutis, obtinentur et qui variabilibus $y_1 \ldots y_m$

expressi evadunt, iidem esse debent, aeque ac si ab aequatione $z = F$ deducti fuissent. Ex hoc patet: Si quantitates (λ_{n-1}) variabilibus $y_1 \ldots y_m$ exprimuntur et quantitates (λ_n) tanquam incognitae considerantur, aequationes (2) systema constituunt aequationum linearium, ex quo valores (λ_n) variabilibus $y_1 \ldots y_m$ expressi determinari possunt.

Sed derivatae (λ_n) ordinis n^{mi} numero sunt

$$N_n = \frac{m\,(m+1)\,..\,(m+n-1)}{1\,.\,2\,..\,n}; \tag{3}$$

ergo systema (2) aequationes omnino inter se independentes numero N_n necessario continere debet.

Si nunc observetur, derivatas ordinis $n-1.^{mi}$, quibus prima membra aequationum (2) efficiuntur, esse numero N_{n-1}, idest

$$\frac{m\,(m+1)\,..\,(m+n-2)}{1\,.\,2\,..\,(n-1)},$$

variabiles vero y esse numero m, facile patebit, systema (2) aequationes numero complecti

$$N'_n = mN_{n-1}.$$

Si igitur habeatur $m > 1$, $n > 1$, erit $N'_n > N_n$, idest numerus aequationum numerum incognitarum superabit. Ex quo efficitur, systema (2) aequationes $N'_n - N_n$ supervacaneas necessario comprehendere.

Quod si ex omnibus aequationibus (2), N_n tantummodo tali ratione seligere velimus, ut ex ipsis incognitae (λ_n) determinari possint, hoc sequenti disquisitione perficere possumus.

Ponatur brevitatis causa

$$(\lambda_{n-1})_h = \frac{\partial(\lambda_{n-1})}{\partial y_h} - \Sigma\,(a\lambda_{n-1})\,\frac{\partial x_a}{\partial y_h}$$

et significantibus h_1 et h_2 duos diversos e numeris naturalibus 1, 2, . . m ex aequationibus (2) hae sumantur, quarum prima membra notis

$$(1\lambda_{n-2})_{h_1},\quad (2\lambda_{n-2})_{h_1},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-2})_{h_1}$$
$$(1\lambda_{n-2})_{h_2},\quad (2\lambda_{n-2})_{h_2},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-2})_{h_2}$$

designata sunt. His quantitatibus functio componatur

$$\sum_a \left\{ (a\lambda_{n-2})_{h_1}\,\frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}} - (a\lambda_{n-2})_{h_2}\,\frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}} \right\}. \tag{4}$$

Valoribus quantitatum $(a\lambda_{n-2})_{h_1}$ et $(a\lambda_{n-2})_{h_2}$ suffectis, culculisque peractis, functio in sequentem evadit

$$\sum_a \left\{ \frac{\partial(a\lambda_{n-2})}{\partial y_{h_1}} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}} - \frac{\partial(a\lambda_{n-2})}{\partial y_{h_2}} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}} \right\}, \tag{5}$$

quae incognitis $(a\lambda_{n-1})$ omnino caret.

Si nunc in aequatione (2), n cum $n-1$ commutetur et valores y_{h_1}, y_{h_2} pro y substituantur, habebuntur aequationes

$$A = \frac{\partial(\lambda_{n-2})}{\partial y_{h_1}} = \sum_a (a\lambda_{n-2})\,\frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}}$$
$$B = \frac{\partial(\lambda_{n-2})}{\partial y_{h_2}} = \sum_a (a\lambda_{n-2})\,\frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}},$$

e quibus facili calculo obtinebimus

$$(6)\qquad \frac{\partial B}{\partial y_{h_1}} - \frac{\partial A}{\partial y_{h_2}} = \sum_a \left\{ \frac{\partial (a\lambda_{n-2})}{\partial y_{h_1}} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}} - \frac{\partial (a\lambda_{n-2})}{\partial y_{h_2}} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}} \right\} = 0 .$$

Ex hoc calculo habetur, functionem (5), et ideo quoque (4), identice nullam fieri. Si ponatur igitur brevitatis causa

$$(\lambda_{n-2})_{h_1 h_2} = \sum_a \left\{ (a\lambda_{n-2})_{h_1} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}} - (a\lambda_{n-2})_{h_2} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}} \right\}$$

simul cum systemate aequationum

$$(7)\qquad (\lambda_{n-1})_h = 0$$

habebitur systema

$$(8)\qquad (\lambda_{n-2})_{h_1 h_2} = 0 .$$

E numeris naturalibus 1, 2, . . , m sumantur porro numeri tres diversi h_1 h_2 h_3, et ex aequationibus (8) considerentur eae, quae notis designantur

$$(1\lambda_{n-3})_{h_1 h_2},\ (2\lambda_{n-3})_{h_1 h_2},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-3})_{h_1 h_2}$$
$$(1\lambda_{n-3})_{h_1 h_3},\ (2\lambda_{n-3})_{h_1 h_3},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-3})_{h_1 h_3}$$
$$(1\lambda_{n-3})_{h_2 h_3},\ (2\lambda_{n-3})_{h_2 h_3},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-3})_{h_2 h_3} .$$

His valoribus componatur functio

$$\sum_a \left\{ (a\lambda_{n-3})_{h_1 h_2} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_3}} - (a\lambda_{n-3})_{h_1 h_3} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}} + (a\lambda_{n-3})_{h_2 h_3} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}} \right\}$$

quam brevitatis causa nota

$$(\lambda_{n-3})_{h_1 h_2 h_3}$$

designare iuvet. Haud difficile est, calculis peractis, demonstrare haberi identice

$$(9)\qquad (\lambda_{n-3})_{h_1 h_2 h_3} = 0 .$$

Simili modo e numeris naturalibus 1, 2, . . , m quattuor numeros diversos sumere possumus h_1 h_2 h_3 h_4, et ex aequationibus (9) eas seligere, quae notis

$$(1\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_3},\ (2\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_3},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_3}$$
$$(1\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_4},\ (2\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_4},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_4}$$
$$(1\lambda_{n-4})_{h_1 h_3 h_4},\ (2\lambda_{n-4})_{h_1 h_3 h_4},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-4})_{h_1 h_3 h_4}$$
$$(1\lambda_{n-4})_{h_2 h_3 h_4},\ (2\lambda_{n-4})_{h_2 h_3 h_4},\ \ldots,\ (m\lambda_{n-4})_{h_2 h_3 h_4}$$

designatae sunt. His valoribus constituatur functio

$$\sum_a \left\{ (a\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_4}} - (a\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_4} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_3}} + (a\lambda_{n-4})_{h_1 h_3 h_4} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_2}} - (a\lambda_{n-4})_{h_2 h_3 h_4} \frac{\partial x_a}{\partial y_{h_1}} \right\},$$

quam brevitatis causa notabimus

$$(\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_3 h_4} .$$

Calculis peractis identice haberi invenitur

$$(10)\qquad (\lambda_{n-4})_{h_1 h_2 h_3 h_4} = 0 .$$

Simili ratione ad formulas subsequentes perveniemus

$$(\lambda_{n-5})_{h_1 h_2 h_3 h_4 h_5} = 0 \quad \text{etc.},$$

quarum est expressio generalis

$$(\lambda_{n-g})_{h_1 h_2 \cdots h_g} = 0 .$$

Haec formularum series, ut facili consideratione patet, haud indefinite continuari potest, sed illa erit earum ultima, per quam $q=n$ aut $q=m$, pro ut sit $n \gtreqless m$ aut $n \gtrless m$. Si igitur $q=r$ valor sit ultimae formulae respondens, habebimus

(11) $$(\lambda_{n-r+1})_{h_1 h_2 \cdots h_{r-1}} = 0$$

(12) $$(\lambda_{n-r})_{h_1 h_2 \cdots h_r} = 0 .$$

In formulis (7), (8), . . , (12) systema igitur aequationum in promptu habemus, quarum numerus finitus est, quibusque derivatae (λ_n) ordinis $n.^{mi}$ semper necessario satisfaciunt.

Nunc est in formula (7) aequationum numerus

$$N'_n = mN_{n-1}$$

ut supra de systemate (2) observatum est: in formula (8) est numerus aequationum, ut facili consideratione deducitur,

$$N''_n = \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,N_{n-2}\,, \quad \text{etc.}\,;$$

denique in formulis (11) et (12)

$$N_n^{(r-1)} = \frac{m\,(m-1)\,..\,(m-r+2)}{1\,.\,2\,..\,(r-1)}\,N_{n-r+1}$$

$$N_n^{(r)} = \frac{m\,(m-1)\,..\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,..\,r}\,N_{n-r}\,,$$

ubi observandum est haberi $N_0 = 1$.

Si nunc animadvertimus aequationum systema (8), a systemate (7) deductum, identice satisfactum evadere, inferemus systema (7) aequationes continere supervacaneas; similiter aequationum systema (9) demonstrat, aequationes supervacaneas in systemate (8) inveniri; etc. Possumus igitur aequationes supervacaneas sequenti ratione eliminare. Aequationum (12) auxilio quarum est numerus $N_n^{(r)}$, numerum plenum N_n^{r-1} aequationum systematis (11) ad numerum

$$N_n^{(r-1)} - N_n^{(r)}$$

reducemus. Postea numerum $N_n^{(r-2)}$ praecedentis systematis ad numerum

$$N_n^{(r-2)} - \left\{ N_n^{(r-1)} - N_n^{(r)} \right\}$$

reducere licebit. Tali ratione numerus plenus N'_n aequationum systematis (7), idest systematis (2), ad numerum reducere possumus

$$K = N'_n - N''_n + \,.\,. - (-1)^r\, N_n^{(r)}$$

hoc est ad numerum

(13) $$K = m\,N_{n-1} - \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,N_{n-2} + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,N_{n-3} - \text{etc.}$$

Sed, denotantibus s et t numeros integros quoscumque, notum est haberi identice

$$(s+t)\,(s+t+1)\ldots(s+t+n-1) = s\,(s+1)\ldots(s+n-1) + nts\,(s+1)\ldots(s+n-2)$$
$$+ n\,(n-1)\,\frac{t\,(t+1)}{2}\,s\,(s+1)\ldots(s+n-3) + \ldots$$

Posito $s = m$, $t = 1-m$, et aequatione per $1.2 \ldots n$ divisa, habebitur

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} - (m-1)\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} + \text{etc.} = 1,$$

idest, ad formulam (3) respectu habito

$$(14) \qquad N_n - (m-1)N_{n-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}N_{n-2} - \text{etc.} = 1.$$

Si $n-1$ in locum n ponatur, habetur

$$(15) \qquad N_{n-1} - (m-1)N_{n-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}N_{n-3} - \text{etc.} = 1$$

et subtractione peracta

$$N_n - mN_{n-1} + \frac{m(m-1)}{2}N_{n-2} - \text{etc.} = 0,$$

quae, si cum (13) conferitur, ad aequationem ducit

$$K = N_n$$

Methodus igitur supra exposita aequationes supervacaneas eliminandi systema (2) ad aequationes numerum N_n reducit, idest ad tot aequationes, quot in ipso systemate inter se omnino independentes adsunt et ad determinandas incognitas (λ_n) necessariae sunt.

3. Ex omnibus aequationibus, quae in systemate (2) continentur, eas nunc considerare liceat, quae usu unius e variabilibus $y_1 \ldots, y_m$ deductae sunt, ex. causa aequationes

$$\frac{\partial(\lambda_{n-1})}{\partial y_k} - \sum_a (a\lambda_{n-1})\frac{\partial x_a}{\partial y_k} = 0$$

idest

$$(16) \qquad (\lambda_{n-1})_k = 0,$$

quae usu variabilis y_k deductae sunt.

In has aequationes inquirere volumus, num omnes tamquam supervacaneae in systemate (2) considerari possint, aut quot ex illis necessariae in systemate sint.

Patet ante omnia omnes aequationes (16) in systemate (2) tanquam supervacaneas nullo modo considerari posse, quia in illis derivatae $\frac{\partial x_1}{\partial y_k}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial y_k}$ continentur, quae in reliquis aequationibus systematis non reperiuntur. Cum autem y_k variabilis sit omnino indipendens, haud possibile est, aequationem quandam ex (16) a reliquis aequationibus systematis (2) deducere.

Si aequationes (16) excipiantur, systema (2) ad sequens reducitur

$$(17) \qquad \frac{\partial(\lambda_{n-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n-1})\frac{\partial x_a}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} a = 1, 2, \ldots, m \\ y = y_1, y_2, \ldots, y_m \ (y_k \text{ excepto}). \end{cases}$$

Sit nunc h_1 quidam e numeris naturalibus 1, 2,.., m (k excepto), et ex aequationibus systematis (2), idest (7), seligantur eae, quarum prima membra notis

$$(1\lambda_{n-2})_k, \ (2\lambda_{n-2})_k, \ \ldots, \ (m\lambda_{n-2})_k$$
$$(1\lambda_{n-2})_{h_1}, \ (2\lambda_{n-2})_{h_1}, \ \ldots, \ (m\lambda_{n-2})_{h_1}$$

indicantur. Simili calculo, quo supra aequatio $(\lambda_{n-2})_{h_1 h_2} = 0$ demonstrata est, inveniemus

(18) $$(\lambda_{n-2})_{kh_1} = 0 \quad h_1 = 1, 2, .., m \,(k \text{ excepto}).$$

Sumantur postea duo diversi e numeris naturalibus 1, 2, .. , m (k excepto), ex. gr. h_1 et h_2, et ex aequationibus (8) considerentur eae, quae notis

$$(1\lambda_{n-3})_{kh_1}\ ,\ (2\lambda_{n-3})_{kh_1}\ ,\ \ldots\ ,\ (m\lambda_{n-3})_{kh_1}$$
$$(1\lambda_{n-3})_{kh_2}\ ,\ (2\lambda_{n-3})_{kh_2}\ ,\ \ldots\ ,\ (m\lambda_{n-3})_{kh_2}$$
$$(1\lambda_{n-3})_{h_1h_2}\ ,\ (2\lambda_{n-3})_{h_1h_2}\ ,\ \ldots\ ,\ (m\lambda_{n-3})_{h_1h_2}$$

designantur, et facile ad aequationum systema perveniemus

(19) $$(\lambda_{n-3})_{kh_1h_2} = 0 \quad h_1,\ h_2 = 1,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ m\,(k \text{ excepto}).$$

Simili modo subsequentia systemata habebuntur

$$(\lambda_{n-4})_{kh_1h_2h_3} = 0$$

. . . . . .

(20) $$(\lambda_{n-r'+1})_{kh_1h_2\cdots h_{r'-2}} = 0$$

(21) $$(\lambda_{n-r'})_{kh_1h_2\cdots h_{r'-1}} = 0\,.$$

Erit praeterea numerus aequationum in systemate (16)

$$N_{n-1}\,,$$

cum tot sint derivatae (λ_{n-1}) ordinis $n-1.^{mi}$; in systemate (18) numerus erit aequationum

$$(m-1)\,N_{n-2};$$

in (19) .... (20) (21) vero

$$\frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\,N_{n-3}$$

. . . . . .

$$\frac{(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r'+2)}{1\,.\,2\,\ldots\,(r'-2)}\,N_{n-r'+1}$$

$$\frac{(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r'+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(r'-1)}\,N_{n-r'}\,.$$

Aequationes systematum (18) ... (21) identice satisfactae evadunt, unde patet in systemate (16) aequationes supervacaneas adesse, si omnes aequationes systematis (17) tamquam datae considerentur. Possumus ergo, aequationum (18) ,.. (21) auxilio numerus N_{n-1} aequationum, quae in systemate (16) continentur, ad numerum $K' < N_{n-1}$ reducere. Simili consideratione, qua usi sumus, ut K determinaretur, ad valorem perveniemus

$$K' = N_{n-1} - (m-1)\,N_{n-2} + \ldots - (-1)^{r'}\,\frac{(m-1)\ldots(m-r'+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(r'-1)}\,N_{n-r'},$$

idest, ut patet ex aequatione (15),

$$K' = 1\,.$$

Ex hac disquisitione habetur, unam tantum ex aequationibus (16) in systemate (2) omnino necessariam esse, ceteras vero aequationes systematis (16) ab hac una et a systemate (17) deduci posse. Aliis verbis: si aequationes systematis (17) et una ex aequationibus systematis (16) datae sint, systema plenum (2), usu formularum (18) ... (21) construere licebit. Si igitur ad systema (17) una aequatio e systemate (16) adiiciatur,

aequationes numero $(m-1)\ N_{n-1}+1$ habebuntur, quarum N_n inter se omnino independentes sunt, quaeque ad determinandas N_n incognitas (λ_n) usui esse possunt. Cum autem adiecta illa aequatio e systemate (16) nullo modo a systemate (17) deduci possit, sequitur systema (17) aequationes numero N_n-1 inter se omnino independentes necessario complecti. Ex hoc propositionem ponere possumus:

Si habeatur

$$\left.\begin{array}{ll} z = F(x_1 x_2 .. x_m) & \\ x_a = \psi_a(y_1 y_2 .. y_m) & \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1, 2, .., m \\ m > 1 \end{array}$$

et e systemate aequationum

$$\frac{\partial(\lambda_{n-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n-1}) \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0\ , \quad y = y_1\ ,\ y_2\ ,\ \cdot\ \cdot\ ,\ y_m$$

omittantur eae, quae usu unius e variabilibus $y_1\ y_2, .., y_m$, ex. causa usu y_k deductae sunt, systema residuum, quod attinet ad quantitates (λ_n), numerum N_n-1 aequationum inter se omnino independentium continebit.

Cum autem systema (17) aequationes numero $(m-1)\ N_{n-1}$ complectatur, sitque generaliter

$$(m-1)\ N_{n-1} > N_n - 1$$

quaestio exsistit, ex omnibus aequationibus systematis (17) numerum earum N_n-1 ita seligere, quae inter se omnino independentes evadant. Ad hoc formulae (8) ... (12) usui esse possunt, si in illis quantitatibus $h_1\ h_2$ ... valores diversi numerorum naturalium $1, 2, .., m$ (k excepto) tribuantur. Valor quantitatis r in formula (12), quae systematum ultimum indicat, erit $r = n$, aut $r = m-1$, pro ut sit $n \gtrless m-1$ aut $n \lessgtr m-1$.

Tali modo systema (8) aequationes numero

$$\frac{(m-1)\ (m-2)}{2} N_{n-2}$$

continebit; systema (9) aequationes numero

$$\frac{(m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{1\ .\ 2\ \ldots\ 3} N_{n-3} \quad \text{etc.};$$

denique systema (12) aequationes numero

$$\frac{(m-1)\ \ldots\ (m-r)}{1\ .\ 2\ \ldots\ r} N_{n-r}.$$

His aequationibus, si eadem methodus adhibeatur qua ad aequationes supervacaneas in systemate (2) eliminandas usi sumus, systema (17) ad numerum aequationum

$$K'' = (m-1)\ N_{n-1} - \frac{(m-1)\ (m-2)}{2} N_{n-2} + \text{etc.}$$

reducitur; idest, ut a (14) habetur, ad numerum

$$K'' = N_n - 1.$$

4. Habeantur nunc functiones duae

$$\left.\begin{array}{ll} F(x_a z) = 0 & \\ \varphi\left(x_a z\ (\lambda_p)\right) = 0 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1,\ 2, .., m \\ p = 1,\ 2, .., n \end{array}$$

quarum prima variabiles independentes $x_1\ x_2 .. x_m$ et variabilem dependentem z contineat; altera vero eas ipsas variabiles et praeterea derivatas $(\lambda_1), (\lambda_2), .., (\lambda_n)$ functionis z.

usque ad ordinem $n.^{mum}$ Habeantur deinde functiones

$$x_a = \psi_a (y_1\, y_2 \,..\, y_m)$$

$$a = 1,\ 2,\ ..\ ,\ m$$

$$z \ = \psi\ (y_1\, y_2 \,..\, y_m)$$

quarum talis natura sit, ut eliminatis variabilibus $y_1\ y_2\ ..\ y_m$ aequatio $F(x_a z) = 0$ obtineatur. Sit y quaedam e variabilibus $y_1\ y_2\ ..\ ,\ y_m$ (y_k excepto), et sequentia constituantur systemata aequationum

$$(E_1)\ \frac{\partial z}{\partial y} - \sum_a (a)\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0$$

$$(E_2)\ \frac{\partial(\lambda_1)}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_1)\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0$$

. . . . . .

$$(E_n)\ \frac{\partial(\lambda_{n-1})}{\partial y} - \Sigma\,(a\lambda_{n-1})\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0\ ,\quad \varphi = 0$$

$$(E_{n+1})\ \frac{\partial(\lambda_n)}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_n)\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0\ ,\quad \left(\overset{\varphi}{\lambda_1}\right) = 0$$

. . . . . .

$$(E_{n+n'-1})\ \frac{\partial(\lambda_{n+n'-2})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n+n'-2})\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0\ ,\quad \left(\overset{\varphi}{\lambda}_{n'-1}\right) = 0$$

$$(E_{n+n'})\quad \frac{\partial(\lambda_{n+n'-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n+n'-1})\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0\ ,\quad \left(\overset{\varphi}{\lambda}_{n'}\right) = 0$$

et cetera.

Consideretur systema $(E_{n+n'})$, quod ex duabus formulis

$$\frac{\partial(\lambda_{n+n'-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n+n'-1})\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0,\ \text{ et }\ \left(\overset{\varphi}{\lambda}_{n'}\right) = 0$$

constat. Derivatae ordinis $(n+n'-1)^{mi}$ sunt numero $N_{n+n'-1}$; cum autem variabilis y valores habere possit $y_1, y_2, .., y_m$ (y_k excepto), erit $(m-1)\ N_{n+n'-1}$ numerus plenus aequationum, quae in formula

$$\frac{\partial(\lambda_{n+n'-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n+n'-1})\ \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0$$

continentur, si omnes valores considerantur, quos y sumere potest. In formula vero

$$\left(\overset{\varphi}{\lambda}_{n'}\right) = 0$$

aequationes numero $N_{n'}$ expressae sunt, quoniam totidem sunt derivatae ordinis $n.'^{mi}$ functionis φ. In systemate $(E_{n+n'})$ habentur igitur simul aequationes numero

$$(m-1)\ N_{n+n'-1} + N_{n'}$$

et in illis derivatae subsequentes (λ_p) usque ad ordinem $(n+n')^{mum}$ continentur.

Functiones nunc $\psi_{\lambda 1}, \psi_{\lambda 2}, .., \psi_{\lambda n+n'-1}$ variabilium $y_1, y_2, .., y_m$ sumere volumus, easque tales esse putamus, ut si in systematibus

$$(E_1),\ (E_2),\ .\ .\ .\ ,\ (E_n),\ .\ .\ .\ ,\ (E_{n+n'-1})$$

functiones $\quad \psi_a\ \ \psi\ \ \psi_{\lambda 1}\ \ \psi_{\lambda 2}\ .\ .\ .\ \psi_{\lambda n+n'-1}$

in locum quantitatum $\quad x_a\ \ z\ \ (\lambda_1)\ \ (\lambda_2)\ .\ .\ .\ (\lambda_{n+n'-1})$

substituantur, aequationes omnium systematum $(E_1)\ldots(E_{n+n'-1})$ identice satisfactae evadant. Has ipsas functiones deinde simili modo in sequenti systemate $(E_{n+n'})$ substitutas

fingimus, in quo non tantum derivatae usque ad ordinem $(n+n'-1)^{mum}$ reperiuntur, sed etiam derivatae $(\lambda_{n+n'})$ ordinis $(n+n')^{mi}$. Substitutione perfecta, eiusmodi derivatas ordinis $(n+n')^{mi}$ tanquam incognitas consideramus, et quaestionem de hoc habere volumus, num systema $(E_{n+n'})$ ad determinandas incognitas usui esse possit.

Numerum incognitarum in systemate $(E_{n+n'})$ habebimus

$$N_{n+n'}$$

cum tot sint derivatae ordinis $(n+n')^{mi}$; numerum vero aequationum, ut dictum est,

$$(m-1)\ N_{n+n'-1} + N_{n'};$$

Sed, ut e propositione praecedentis numeri habetur, in numero $(m-1)\ N_{n+n'-1}$, aequationes tantum

$$N_{n+n'} - 1$$

inter se omnino independentes continentur.

Numerus igitur aequationum inter se omnino independentium, quae in systemate $(E_{n+n'})$ reperiuntur, numero

$$N_{n'} + N_{n+n'} - 1$$

superior esse nequit. Sed hic quoque limes facile ad minorem reduci potest. Aequationibus, quae in formula $\left(\lambda^{\varphi}_{n'}\right)$ continentur, et quae numero sunt $N_{n'}$, possumus sane systemata substituere

$$(22) \qquad \left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0, \quad \left(2\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0, \ \ldots, \ \left(m\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0$$

quae aequationum numerum $mN_{n'-1}$ complectuntur. Sed functiones ψ_a, ψ, ψ_{λ_1}, ..., $\psi_{\lambda_{n+n'-1}}$ tales fictae sunt, ut habeatur identice $\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0$; erit igitur

$$\frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial y} = \sum_a \frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial x_a}{\partial y} + \frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \sum_p\sum_\lambda \frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial(\lambda_p)}\cdot\frac{\partial(\lambda_p)}{\partial y} = 0$$

$$y = y_1, y_2, \ldots, y_m \ (y_k \text{ excepto})$$

$$p = 1, 2, \ldots, n+n'-1$$

aut, si valores

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sum_a (a)\frac{\partial x_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\lambda_p)}{\partial y} = \sum_a (a\lambda_p)\frac{\partial x_a}{\partial y}$$

a systematibus (E) sumptis, substituuntur

$$\frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial y} = \sum_a \left\{\frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial x_a} + (a)\frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial z} + \sum_p\sum_\lambda (a\lambda_p)\frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial(\lambda_p)}\right\}\frac{\partial x_a}{\partial y} = 0.$$

Sed quantitas uncis contenta nihil aliud est quam derivata quantitatis $\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)$ respectu ad variabilem x_a, quam nota

$$\frac{d\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{dx_a} \quad \text{aut} \quad \left(a\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)$$

designatam voluimus (num. 1). Habemus igitur

$$(23) \qquad \frac{\partial\left(\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)}{\partial y} = \sum_a \left(a\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_a}{\partial y} = 0.$$

Cum autem a valores habeat $1, 2, .., m$ et y valores $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (y_k excepto), formula (23) sequens systema aequationum repraesentat

$$\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \left(2\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + .. + \left(m\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_m}{\partial y_1} = 0$$
$$\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \left(2\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + .. + \left(m\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_m}{\partial y_2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \left(2\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + .. + \left(m\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_m}{\partial y_m} = 0$$

in quo aequatio

$$\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \left(2\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial y_k} + .. + \left(m\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)\frac{\partial x_m}{\partial y_k} = 0$$

excepta putatur. Si porro functiones $x_1, x_2, .., x_m$ variabilium $y_1, y_2, .., y_m$ inter se independentes fingimus, e superiori systemate facile sequitur, omnes quantitates

$$\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right), \left(2\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right), \ldots, \left(m\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right)$$

necessario nullas esse debere, si ex illis una tantum nulla sit. E systematis (22) igitur unum tantum retinere sufficiet, ex. gr. systema $\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0$; idest in locum systematis $\left(\lambda^{\varphi}_{n'}\right) = 0$ systema

$$\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0$$

ponere possumus, quod aequationes numero $N_{n'-1}$ continebit.

Hac disquisitione patet, limiti $N_{n'} + N_{n+n'} - 1$, quem supra invenimus, limitem

$$N_{n'-1} + N_{n+n'} - 1$$

substitui posse. Consideretur deinde systema $\left(1\lambda^{\varphi}_{n'-1}\right) = 0$, quod aequationes numero $N_{n'-1}$ in se continet. Huic systemati sequentia substitui possunt

$$(24) \qquad \left(11\lambda^{\varphi}_{n'-2}\right) = 0, \quad \left(12\lambda^{\varphi}_{n'-2}\right) = 0, \ldots, \left(1m\lambda^{\varphi}_{n'-2}\right) = 0$$

quae numerum $mN_{n'-2}$ aequationum complectuntur. Si nunc calculus superiori similis peragatur, facile demonstrabitur haberi

$$\sum_a \left(1a\lambda^{\varphi}_{n'-2}\right)\frac{\partial x_a}{\partial y} = 0$$

et e systematibus (24) unum tantum sufficere, ex. gr. systema

$$\left(11\lambda^{\varphi}_{n'-2}\right) = 0,$$

quod aequationes numero $N_{n'-2}$ continet: ita ut limes $N_{n'-1} + N_{n+n'} - 1$ ad limitem

$$N_{n'-2} + N_{n+n'} - 1$$

reducatur. Disquisitione igitur ad finem peracta, ad conclusionem perveniemus, unam aequationem, ex. gr. $\left(11 .. \lambda^{\varphi}_{o}\right) = 0$, idest

$$\frac{d^{n'}\varphi}{dx_1^{n'}} = 0$$

in locum systematis $\left(\lambda_{n'}^{\varphi}\right) = 0$ substitui posse, et limitem ad $1 + N_{n+n'} - 1$ reduci. Ex hoc sequitur, in systemate $(E_{n+n'})$ aequationes inter se omnino independentes esse numero

$$N_{n+n'},$$

idest tot, quot sunt derivatae $(\lambda_{n+n'})$ ordinis $(n+n')^{mi}$, quae igitur, si tanquam incognitae considerentur, usu systematis $(E_{n+n'})$ determinari et variabilibus y exprimi possunt.

Habemus igitur propòsitionem:

Si functiones ψ_a, ψ, ψ_1, .., $\psi_{\lambda_{n+n'-1}}$ quantitatum $y_1, y_2, .., y_m$ tales sint, quae si in locum quantitatum x_a, z, (λ_1), .., $(\lambda_{n+n'-1})$ in systematis (E_1), (E_2), .., $(E_{n+n'-1})$ substituantur, omnes aequationes systematum identice satisfactae evadant, sintque functiones ψ_a inter se independentes, systema $(E_{n+n'})$ numerum $N_{n+n'}$ aequationum inter se omnino independentes, quod attinet ad derivatas $(\lambda_{n+n'})$, continebit; quarum usu derivatae ipsae $(\lambda_{n+n'})$ ordinis $(n+n')^{mi}$ quantitatibus $y_1, y_2, .., y_m$ expressae obtineri possunt, ita ut habeatur generaliter

$$(\lambda_{n+n'}) = \psi_{n+n'}\ (y_1\, y_2 \,..\, y_m).$$

5. Sit nunc

$$z = F\,(x_1\, x_2) \tag{25}$$

superficies quaedam in spatio trium dimensionum. Si variabiles x_1 et x_2 incrementis Δx_1, Δx_2 augeantur, habemus generaliter

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta x_2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^{\,2}}\Delta x_1^{\,2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2}\Delta x_1\,\Delta x_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^{\,2}}\Delta x_2^{\,2}\right) + \ldots,$$

quam aequationem symbolice sequenti notatione designare iuvet:

$$\Delta z = \sum_k \left(\frac{\Delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\Delta x_2}{\partial x_2}\right)^k \frac{\partial^k F}{1.2\,..\,k} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Sumatur deinde variabilis quaedam y independens, et ponatur

$$x_1 = \psi_1\,(y), \quad x_2 = \psi_2\,(y), \quad z = \psi\,(y), \tag{27}$$

ita ut his aequationibus curva quaedam in spatio trium dimensionum determinetur: quod, ut patet, tali modo fit, ut pro valore quodam y_0, variabili y tributo, punctum $(x_0\ y_0\ z_0)$ ei respondens in spatio habeatur. Ut curva (27) in superficie (25) iaceat, necesse est identice haberi $\psi = F\,(\psi_1\, \psi_2)$; idque fieri fingere volumus.

Hoc posito, si in functionibus derivatis $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^{\,2}}$, ... in locum quantitatum x_1 et x_2 earum valores (27) substituantur, quod notis $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_y$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_y$, $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^{\,2}}\right)_y$, ... designabimus, et sumantur praeterea f_1 et f_2 functiones quaedam variabilis y, ita ut habeatur $\Delta x_1 = f_1\,(y)$, $\Delta x_2 = f_2\,(y)$, formula (26) sequenti modò symbolice designari potest

$$f\,(y) = \sum_k \left(\frac{f_1\,(y)}{\partial x_1} + \frac{f_2\,(y)}{\partial x_2}\right)^k \left(\frac{\partial^k F}{1.2\,..\,k}\right)_y, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

ubi $f\,(y)$ loco Δz scriptum fuit. Hac aequatione puncto cuidam $(x_1\, x_2\, z)$ aequationibus (27) determinatum, punctum $\left(x_1 + f_1\,(y),\ x_2 + f_2\,(y),\ z + f\,(y)\right)$ respondet. Si

autem omnia puncta simul considerantur, quae infinitis valoribus variabilis y usu aequationum (27) gignuntur, patet aequationem (28) tanquam condicionem considerari posse, ut curvae cuidam $x_1 = \psi_1$, $x_2 = \psi_2$, $z = \psi$ in superficie (25) iacenti curva respondeat $x_1 = \psi_1 + f_1$, $x_2 = \psi_2 + f_2$, $z = \psi + f$, quae in ipsa superficie iaceat, et functionibus f_1 et f_2 arbitrario sumptis determinetur; idque tali modo fiat, ut singulis punctis unius ex duabus curvis singula puncta alterius respondeant.

Aequatio (28) huic usui igitur esse potest, ut a curva data in superficie (25) ad curvam ei proximam in ipsa superficie transire liceat. In hoc genere formulae (26) et (28) hanc praebent maximam differentiam. Cum enim usu formulae (26) superficiem (25) ita construere possumus, ut a punto quodam ad punctum proximum transeamus, usu formulae (28) eam contra ita construimus, ut a curva quadam ad curvam proximam transire liceat. Formulam (26) itaque, ex hoc considerandi modo, tanquam explicationem superficiei (25) per puncta, formulam vero (28) tanquam explicationem per curvas accipere possumus. In hac disquisitione condiciones omnes satisfactas esse fingimus, quae necessario consistere debent, ne series (26) et (28) irritae aut ineptae evadant.

Facillime profecto haec omnia ad spatia plurium dimensionum transferri possunt. Sit quidem

$$z = \mathrm{F}(x_1\, x_2 \,..\, x_m) \tag{29}$$

varietas quaedam m dimensionum in spatio $m+1$ dimensionum. Sumatur in ipso spatio varietas ρ dimensionum

$$\begin{cases} x_a = \psi_a(y_1\, y_2 \,..\, y_\rho) \\ z = \psi\ (y_1\, y_2 \,..\, y_\rho) \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, 2, .., m \\ \rho < m \end{cases} \tag{30}$$

quae in varietate $z = \mathrm{F}$ iacebit, si habeatur identice $\psi = \mathrm{F}(\psi_1\, \psi_2 \,..\, \psi_m)$.

Significantibus f_a et f functiones variabilium $y_1\ y_2 \,..\, y_\rho$, a varietate $x_a = \psi_a$, $z = \psi$ ad varietatem ei proximam $x_a = \psi_a + f_a$, $z = \psi + f$ in ipsa varietate $z = \mathrm{F}$ iacentem transire licebit, si functiones f_a, f condicioni

$$f = \sum_k \left(\sum_a \frac{f_a}{\partial x_a} \right)^k \left(\frac{\partial^k \mathrm{F}}{1 \,.\, 2 \,...\, k} \right)_{y_1 y_2 \cdots y_\rho} \quad \begin{cases} a = 1, 2, \ldots m \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{31}$$

satisfaciant. Usu aequationis (31) igitur a varietate (30) ρ dimensionum in varietate (29) m dimensionum iacente, ad varietatem ei proximam in ipsa varietate (29) iacentem transire possumus; ita ut aequationem (31) tanquam explicationem varietatis (29) per varietates ρ dimensionum accipere liceat. Si $\rho = m-1$ habemus aequationem

$$f = \sum_k \left(\sum_a \frac{f_a}{\partial x_a} \right)^k \left(\frac{\partial^k \mathrm{F}}{1 \,.\, 2 \,...\, k} \right)_{y_1 y_2 \cdots y_{m-1}} \tag{32}$$

cuius auxilio a varietate $m-1$ dimensionum

$$\begin{cases} x_a = \psi_a(y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \\ z = \psi\ (y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \end{cases}, \quad a = 1, 2, .., m \tag{33}$$

in varietate $z = \mathrm{F}$ iacente ad varietatem ei proximam transire possumus.

His positis, observetur porro, si punctum $(x_0\, y_0)$ curvae cuiusdam $y = f(x)$ in

plano datum sit, et valores $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ in inf. huic puncto respondentes quoque dati sint, partem finitam curvae in proximitate puncti $(x_0\, y_0)$ tum determinatam evadere, cum praeterea fingimus in puncto $(x_0\, y_0)$ eiusque proximitate functionem $f(x)$ et derivatas subsequentes valorem habere realem, finitum, continuum et a nihilo diversum (1). Formula enim

$$y_0 + k = x_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 h + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 h^2 + \ldots$$

positionem punctorum subsequentium infinite proximorum computare licet.

Condicionibus similibus positis partem finitam superficiei $z = \mathrm{F}(x_1 x_2)$ in spatio trium dimensionum determinatam considerare possumus, si curva $x_1 = \psi_1(y)$, $x_2 = \psi_2(y)$, $z = \psi(y)$ in spatio data sit, per quam superficies transeat, et valores $\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\right)_y$, $\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}\right)_y$, $\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_1^2}\right)_y, \ldots$ huic curvae respondentes noti sint. Revera possumus his valoribus, usu formulae (28), subsequentes curvas infinite proximas determinare, quae superficiei partem constituunt.

Generaliter propositionem simili ratione habemus: Si varietas (33) $m-1$ dimensionum data sit, per quam varietas (29) m dimensionum transire debeat, et valores $(\lambda_1)_{y_1 y_2 \ldots y_{m-1}}$, $(\lambda_2)_{y_1 y_2 \ldots y_{m-1}}, \ldots$ quoque noti sint, qui varietati (33) respondent, pars finita varietatis (29) in proximitate varietatis (33) determinabitur.

Possumus enim varietates subsequentes infinite proximas construere usu formulae (32), quae varietatis $z = \mathrm{F}$ partem finitam constituunt.

6. Data sit aequatio differentialis partialis $n.^{mi}$ ordinis inter m variabiles, quam nota

$$\varphi\left(x_a\, z\, (\lambda_p)\right) = 0 \qquad \begin{cases} a = 1, 2, \ldots, m \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{34}$$

indicabimus. Notum est multas generaliter varietates m dimensionum in spatio $m+1$ dimensionum adesse, quae aequationi (34) satisfaciunt. Sumatur arbitrario varietas quaedam determinata

$$\begin{cases} x_a = \psi_a(y_1 y_2 \ldots y_m) \\ z = \psi\ (y_1 y_2 \ldots y_m) \end{cases} \quad a = 1, 2, \ldots, m \tag{35}$$

idest, eliminatis variabilibus y, $z = f(x_1 x_2 \ldots x_m)$, in eodem spatio, quam litera W_m indicare volumus. Si cuidam e variabilibus y, ex. gr. y_m, valor constans tribuatur, dum ceteris variabilibus y omnes valores tribuuntur, e varietate W_m varietatem V_{m-1} in eodem spatio obtinebimus, quae in ipsa varietate W_m iacebit; ita ut dicere possimus varietatem W_m per varietatem V_{m-1} transire. Sed quaeritur, num quaedam e varietatibus, quae aequationi (34) satisfaciunt, quaeque igitur hac aequatione designantur, per ipsam varietatem V_{m-1} transeat, cum, ut diximus, varietas W_m ideoque etiam V_{m-1} arbitrario sumpta sit.

Condicio, cui satisfieri debet, ut quaedam e varietatibus aequatione (34) designatis, per varietatem V_{m-1} transeat, ea est ut functiones ψ_{λ_1}, $\psi_{\lambda_2}, \ldots$ variabilium

(1) Conf. Bäcklund, Math. Ann. p. 301, 304 IX. vol.

$y_1\, y_2 .. y_m$ reperiri possint, quae sequenti proprietate praeditae sint: Si in sequentibus systematis, ab aequationibus (34) et (35) deductis,

$$(e_1) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} - \sum_a (a) \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0$$

$$(e_2) \qquad \frac{\partial (\lambda_1)}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_1) \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0 \qquad \begin{cases} a = 1, 2, .., m \\ y = y_1, y_2, .., y_{m-1} \end{cases}$$

. . . . . .

$$(e_n) \qquad \frac{\partial (\lambda_{n-1})}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_{n-1}) \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0, \quad \varphi = 0$$

$$(e_{n+1}) \qquad \frac{\partial (\lambda_n)}{\partial y} - \sum_a (a\lambda_n) \frac{\partial x_a}{\partial y} = 0, \quad \left(\lambda_1^{\varphi}\right) = 0$$

. . . . . .

in locum quantitatum x_a, z, λ_1, λ_2, ..., functiones variabilium $y_1\, y_2 .. y_m$ ψ_a, ψ, $\psi_{\lambda 1}$, $\psi_{\lambda 2}$, ... substituuntur, aequationibus omnium systematum identice satisfieri debet. Eiusmodi functiones $\psi_{\lambda 1}$, $\psi_{\lambda 2}$, ..., si reperiri possint, varietatem m dimensionum determinant (num. 4), quae per varietatem V_{m-1} transibit, et quaedam erit e varietatibus aequatione (34) designatis, quoniam aequationes omnes $\varphi = 0$, $\left(\lambda_1^{\varphi}\right) = 0, \left(\lambda_2^{\varphi}\right) = 0, ..$ his functionibus satisfactas fingimus.

Quaestio proposita ad hoc igitur reducitur, num possibile sit, functiones $\psi_{\lambda 1}$, $\psi_{\lambda 2}$, ... ea ratione determinare, ut systematibus aequationum (e_1), (e_2), ... identice satisfiat. Si n sistemata (e_1), (e_2), ..., (e_n) considerantur, numeros sequentes habemus aequationum, quae inter se, quod attinet ad quantitates (λ_p), independentes sunt (num. 3 et 4).

In systemate (e_1) numerum $N_1 - 1$
» (e_2) » $N_2 - 1$
. . . . . .
» (e_{n-1}) » $N_{n-1} - 1$
» (e_n) » N_n

Est igitur numerus plenus aequationum inter se omnino independentium, qui in systematis (e_1), (e_2), ..., (e_n) simul habetur

$$(N_1 - 1) + (N_2 - 1) + .. + (N_{n-1} - 1) + N_n, \text{ idest}$$
$$N_1 + N_2 + ... + N_n - (n - 1).$$

Derivatae vero (λ_1), (λ_2), .., (λ_n), quae in his aequationibus continentur, sunt numero

$$N_1 + N_2 + ... + N_n.$$

Si igitur derivatas (λ_1), (λ_2), .., (λ_n), tanquam incognitas considerare volumus, superabit numerus incognitarum numerum aequationum quantitate $n - 1$. Possunt igitur $n - 1$ functiones incognitae arbitrariis functionibus variabilium y aequari, functiones residuae vero usu systematum (e_1), (e_2), ... (e_n) determinari. Quod tamen hac condicione tantummodo possibile est, ut, ad formam peculiarem aequationum respectu habito, functiones arbitrariae tali selectione sumantur, ut reliquarum incognitarum determinatio fieri possit. Calculatione peracta habebuntur valores derivatarum $(\lambda_1) = \psi_{\lambda 1}$, $(\lambda_2) = \psi_{\lambda 2}$, ... $(\lambda_n) = \psi_{\lambda n}$, variabilibus y expressi et tali proprietate praediti, ut aequationibus omnibus systematum (e_1), (e_2) ..., (e_n) identice satisfiat.

Valores porro subsequentium derivatarum $(\lambda_{n+1}), \ldots$ usu subsequentium systematum $(e_{n+1}), \ldots$ determinati evadunt. Hac disquisitione sequitur possibile esse, functiones $\psi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2}, \ldots$ positae condicioni respondentes determinare; et e varietatibus m dimensionum, quae aequationi (34) satisfaciunt, quandam adesse, quae per varietatem V_{m-1} arbitrario sumptam transit. Si igitur varietas V_{m-1} data sit, possumus valores $(\lambda_1), (\lambda_2), \ldots$, ideoque coefficientes $\left(\frac{\partial^k F}{1.2..k}\right)_{y_1 y_2 \ldots y_{m-1}}$ ei respondentes superiori calculo determinare; et usu formulae (32) varietatem $z = F\,m$ dimensionum, aequationi (34) satisfacientem et per V_{m-1} transeuntem, per varietates $m-1$ dimensionum explicare; ita ut eius partem finitam in proximitate datae varietatis V_{m-1} supputatam habeamus. Hic modus determinandi varietatem m dimensionum tanquam integratio per seriem aequationis (34) considerari potest.

Habeatur ex. gr. aequatio

$$b\,z \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = Q \tag{36}$$

in qua Q functio sit variabilium $x_1\, x_2\, x_3\, z$.

Ex varietatibus trium dimensionum, quae a data aequatione indicatae sunt, quandam determinare nobis proponimus, quae per varietatem duarum dimensionum

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(y_1\, y_2) \\ x_2 = \psi_2(y_1\, y_2) \\ x_3 = \psi_3(y_1\, y_2) \\ z = \psi\ (y_1\, y_2) \end{cases} \tag{37}$$

transeat. Quantitatem y_3 haud indicandam censuimus, cum ei valorem quendam constantem tributum fingamus.

Systema (e_1) duabus tantum aequationibus constituitur

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y_1} - (1)\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - (2)\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - (3)\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} - (1)\frac{\partial x_1}{\partial y_2} - (2)\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - (3)\frac{\partial x_3}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \tag{38}$$

ubi coefficientes $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \ldots$ ab aequationibus (37) deducendi sunt.

In systemate (e_2) habemus in primis aequationes

$$\begin{cases} (1)_1 = \frac{\partial(1)}{\partial y_1} - (11)\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - (21)\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - (31)\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0 \\ (1)_2 = \frac{\partial(1)}{\partial y_2} - (11)\frac{\partial x_1}{\partial y_2} - (21)\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - (31)\frac{\partial x_3}{\partial y_2} = 0 \\ (2)_1 = \frac{\partial(2)}{\partial y_1} - (12)\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - (22)\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - (32)\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0 \\ (2)_2 = \frac{\partial(2)}{\partial y_2} - (12)\frac{\partial x_1}{\partial y_2} - (22)\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - (32)\frac{\partial x_3}{\partial y_2} = 0 \\ (3)_1 = \frac{\partial(3)}{\partial y_1} - (13)\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - (23)\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - (33)\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0 \\ (3)_2 = \frac{\partial(3)}{\partial y_2} - (13)\frac{\partial x_1}{\partial y_2} - (23)\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - (33)\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \tag{39}$$

quae tamen inter se haud omnes omnino independentes sunt, quoniam in hoc systemate $n = m - 1 = 2$; (num. 3), ideoque aequatio habetur

$$(\lambda_0)_{12} = 0$$

idest

$$(1)_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} - (1)_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2)_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - (2)_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + (3)_1 \frac{\partial x_3}{\partial y_2} - (3)_2 \frac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0,$$

ex qua patet, unam e sex aequationibus (39) supervacaneam esse et deleri posse.

In systemate (e_2) praeterea aequatio data quoque comprehenditur, idest

$$b\,z\,(1) + (22)\,(33) - \mathrm{Q} = o \tag{40}$$

Si nunc valor, ex. gr. quantitatis (1), variabilibus y_1 et y_2 expressus, arbitrario sumatur, reliquae incognitae (2), (3), (11), (12), (13), (22), (23), (33) aequationibus (38), (39) et (40) determinantur.

Quo calculo peracto habebimus in systemate (e_3) in primis duodecim aequationes

$$\left\{\begin{array}{l} (11)_1 = \dfrac{\partial(11)}{\partial y_1} - (111)\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} - (211)\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} - (311)\dfrac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0 \\ (11)_2 = \dfrac{\partial(11)}{\partial y_2} - (111)\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} - (211)\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} - (311)\dfrac{\partial x_3}{\partial y_2} = 0 \\ \text{et similiter} \\ (12)_1 = 0 \quad (13)_1 = 0 \quad (22)_1 = 0 \quad (23)_1 = 0 \quad (33)_1 = 0 \\ (12)_2 = 0 \quad (13)_2 = 0 \quad (22)_2 = 0 \quad (23)_2 = 0 \quad (33)_2 = 0 \end{array}\right. \tag{41}$$

Sed, cum in hoc systemate sit $n = 3, m - 1 = 2$ erit $r = 2$, et aequationes consistent

$$(\lambda_1)_{12} = o$$

idest

$$\left\{\begin{array}{l} (1)_{12} = (11)_1\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} - (11)_2\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} + (21)_1\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} - (21)_2\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} + (31)_1\dfrac{\partial x_3}{\partial y_2} - (31)_2\dfrac{\partial x_3}{\partial y_1} = 0 \\ \text{et similiter} \qquad (2)_{12} = 0\,, \quad (3)_{12} = 0 \end{array}\right. \tag{42}$$

unde habetur, tres ex duodecim aequationibus (41) supervacaneas esse. Si porro, aequationibus (42) opportune adhibitis, tres ex (41), ex. causa $(11)_1 = 0$, $(22)_1 = 0$, $(33)_1 = 0$ deleantur, novem aequationes inter se omnino independentes residuas habebimus.

In systemate (e_3) praeterea derivata quoque datae aequationis differentialis comprehenditur, idest aequatio

$$bz\,(11) + b\,(1)^2 + (22)\,(133) + (33)\,(122) - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\,(1) = 0 \tag{43}$$

quae decima erit, ita ut decem quantitates (111), (112), (113), (122), (123), (133), (222), (223), (233), (333) determinari possint.

Simili modo subsequentes quantitates seu coefficientes (1111), (1112), ... variabilibus $y_1\, y_2$ expressi determinabuntur.

Si igitur notis $\zeta, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ coordinatae quaesitae varietatis designantur in proximitate

varietatis (37), et ponatar $f = \zeta - z$, $f_1 = \xi_1 - x_1$, $f_2 = \xi_2 - x_2$, $f_3 = \xi_3 - x_3$ a formula (32) deducemus

$$(44) \quad f = (1) f_1 + (2) f_2 + (3) f_3 + \tfrac{1}{2} \Big\{ (11) f_1^2 + (22) f_2^2 + (33) f_3^2 + 2(12) f_1 f_2 + 2(13) f_1 f_3 + 2(23) f_2 f_3 \Big\} + \frac{1}{2 \,.\, 3} \Big\{ (111) f_1^3 + \text{etc.}$$

Haec aequatio, functione (1) semel selecta, a variabilibus $y_1\, y_2$ independens est. Ergo si $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ datae sint, unus idemque valor ζ ab aequatione habetur, quicumque valores variabilibus $y_1\, y_2$ tribuantur. Formulam (44) igitur tanquam aequationem finitam quaesitae varietatis, per seriem expressam, considerare possumus. Quantitatibus $y_1\, y_2$ talis quoque valor tribuere licebit, ut una aut duae e quantitatibus $f_1\, f_2\, f_3$ evanescant, in quo forma seriei simplicior fit.

Observabimus denique, datam aequationem (36) esse secundi gradus, ita ut, postquam (1) arbitrario sumpta sit, pro unaquaque e quantitatibus (2), (3), (11),... duplex obtineatur valor. Duae igitur habebuntur varietates aequatione (44) designatae.

7. Sed in superiori calculo $n - 1$ e functionibus (λ_1), (λ_2), ..., (λ_n) arbitrario, ut diximus, sumi possunt: patet igitur, e varietatibus m dimensionum, quae aequationi $\varphi = 0$ satisfaciunt, plures adesse, quae per varietatem V_{m-1} arbitrario sumptam, transeunt. Quamobrem inquirere volumus, num e varietatibus V_m, quae aequatione differentiali partiali

$$\varphi\,(x_a\, z\, (\lambda_p)) = 0$$

designantur, quaedam adsint, quae simul per plures varietates datas V'_{m-1}, V''_{m-1},..., $V^{(q)}_{m-1}$ $m-1$ dimensionum transeant.

Sumatur quaedam e datis varietatibus, ex. gr. varietas V'_{m-1}, quae aequationibus determinata sit

$$\begin{aligned} x_a &= \psi'_a\,(y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \\ z &= \psi'\ (y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \end{aligned} \qquad a = 1, 2, .., m.$$

Si valores (λ_1), (λ_2), ..., ut in praecedenti calculo, tali ratione determinatos fingimus, ut varietatem V_m per V'_{m-1} transeuntem et aequationi $\varphi = 0$ satisfacientem habemus, explicatio huius varietatis obtinebitur

$$f = \sum_k \left(\sum_a \frac{f a}{\partial x_a} \right)^k \left(\frac{\partial^k F}{1 \,..\, 2 \,..\, k} \right)_{y_1 y_2 .. y_{m-1}}.$$

Sed cum varietas V_m quoque per varietates $V''_{m-1}, \ldots, V^{(q)}_{m-1}$ transire debeat, quas aequationibus

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} x_a &= \psi''_a\,(y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \\ z &= \psi''\ (y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \end{aligned} \right. \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\left\{ \begin{aligned} x_a &= \psi^{(q)}_a\,(y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \\ z &= \psi^{(q)}\ (y_1\, y_2 \,..\, y_{m-1}) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

determinatas putamus, necesse est, positis

$$\begin{aligned} h''_a &= \psi''_a - \psi'_a & h'' &= \psi'' - \psi' \\ h'''_a &= \psi'''_a - \psi'_a & h''' &= \psi''' - \psi' \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h^{(q)} &= \psi^{(q)}_a - \psi'_a & h^{(q)} &= \psi^{(q)} - \psi' \end{aligned}$$

aequationibus quoque satisfieri

$$(45) \qquad h^{(r)} = \sum_k \left(\sum_a \frac{h_a^{(r)}}{\partial x_a} \right)^k \left(\frac{\partial^k F}{1 \cdot 2 \,..\, k} \right)_{y_1 y_2 \cdots y_{m-1}}$$

quae numero sunt $q - 1$.

Si condicio tantum posita esset, varietatem V_m per varietatem V'_{m-1} transire debere, $n - 1$ e quantitatibus $(\lambda_1), (\lambda_2), \ldots, (\lambda_n)$ arbitrario sumi possint, ut supra demonstravimus. Cum autem praeterea aequationibus (45) satisfieri debeat, ut varietas V_m per varietates $V''_{m-1}, \ldots, V^{(q)}_{m-1}$ quoque transeat, e quantitatibus $(\lambda_1), \ldots, (\lambda_n)$ tantum $n - 1 - (q-1) = n - q$ arbitrario sumere licebit. Si igitur $q < n$, plures (innumerabiles) habebuntur varietates V_m, quae condicionibus omnibus satisfaciunt, si $q = n$ una tantum varietas V_m habebitur (aut earum numerus discretus), quae per omnes datas V_{m-1} transibit; si denique $q > n$, nulla generaliter varietas V_m possibilis est, quae per omnes datas V_{m-1} transeat, et aequationi (34) satisfaciat. Habemus igitur theorema:

Ex omnibus varietatibus V_m, quae aequatione

$$\varphi\left(x_a z\,(\lambda_p)\right) = 0 \qquad \begin{cases} a = 1, 2, \ldots, m \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

designantur, una tantum (aut earum numerus discretus) per n varietates arbitrario datas transit.

Hoc theorema pro $m = 1$, idest pro aequationibus vulgaribus, quoque valet: in quo varietates $V'_0, V''_0, \ldots$ puncta sunt. Proprietas igitur a theoremate indicata aequationibus non modo partialibus, sed vulgaribus etiam communis est. Ex hoc sequitur generaliter:

Ut ex omnibus varietatibus V_m, quae datae aequationi differentiali partiali aut vulgari $n.^{mi}$ ordinis satisfaciunt, una tantum (aut earum numerus discretus) determinetur, condicio adiicenda est, varietatem quaesitam per n diversas varietates datas V_{m-1} transire debere; aut alia condicio quaecumque, cuius analytica significatio idem valeat.

In superiori exemplo, ut ex omnibus varietatibus aequatione (36) secundi ordinis designatis, una varietas (44) determinaretur, condicio posita est, quaesitam V_3 per V_2 aequationibus (37) determinatam transire debere; et praeterea quantitas (1), idest $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ arbitrario sumpta est. Hoc, ut patet, idem est, ac si condicio posita esset, quaesitam varietatem V_3 per duas datas varietates

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1 & x_1 &= \psi_1 + dx_1 \\ x_2 &= \psi_2 & x_2 &= \psi_2 \\ x_3 &= \psi_3 & x_3 &= \psi_3 \\ z &= \psi & z &= \psi + (1)\, dx_1 . \end{aligned}$$

transire debere.

Superiori disquisitione quoque apparet, quaenam indoles condicionum ad limites esse debeat, ut varietas quaedam aequatione differentiali designata, omnino determinetur.

In notissima aequatione (chordae vibrantis) $b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$, condiciones ponere possumus.

$$z = f_1(x_1) \qquad -\infty < x_1 < +\infty \qquad \text{pro} \quad x_2 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2(x_1) \qquad -\infty < x_1 < +\infty \qquad \text{pro} \quad x_2 = 0 .$$

Hoc idem est ac si superficies ab aequatione designata per duas curvas infinite proximas

$$\begin{array}{ll} x_1 = y & x_1 = y \\ x_2 = 0 & x_2 = dx_2 \\ z = f_1(y) & z = f_1(y) + (2)\, dx_2 , \end{array}$$

ubi $(2) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$, transire debeat.

Si contra condiciones ponimus

$$z = f_1(x_1) \qquad 0 < x_1 < l \qquad \text{pro} \quad x_2 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2(x_1) \qquad 0 < x_1 < l \qquad » \quad x_2 = 0$$
$$z = 0 \qquad \text{pro } x_1 = 0 \qquad \text{pro} \quad x_2 \text{ quocumque}$$
$$z = 0 \qquad » \ x_1 = l \qquad » \quad » \quad »$$

duas quoque varietates unius dimensionis infinite proximas determinabimus. Curva revera $z = f_1(x_1)$ ab $x_1 = o$ ad $x_1 = l$ et rectae $x_1 = o$, $x_1 = l$, $x_2 > o$, unam e duabus varietatibus constituunt; alteram ab aequatione $z = f_1(x_1) + f_2(x_1)\, dx_2$ intra datos limites, et ab ipsis rectis determinatur.

8. Sed ad naturam aequationis differentialis partialis $\varphi = o$ altius perspiciendam, quaestionem de numero varietatum instituere iuvet, quas aequatio complectitur. Quaeritur itaque ante omnia, quotne sint varietates diversae m dimensionum, quae omnino in spatio $m + 1$ dimensionum, possibiles sunt; ac deinde quis numerus sit earum, quae aequatione $\varphi = o$ designantur.

Priusquam tamen formulas quasdam explicemus, ut numerus plenus varietatum, quae in spatio plurium dimensionum possibiles sunt, indicetur, animadvertendum putamus, quaestionem de hoc numero ipsa rei natura incertam fieri, quippe quae praecipue mentis cogitationi connectatur, secundum quam quisque sibi de modo notionem constituat, quo varietates diversae in spatio plurium dimensionum gignuntur atque determinantur. Similis est sane quaestio de numero punctorum, quae in linea quadam continentur, ita ut eorum numerus plenus diversis formulis exprimi possit, pro ut diversa methodus seligatur singula puncta in linea determinandi.

In varietatibus gignendis determinandisque concipiendi modum ei similem nunc sequi volumus, secundum quem in linea, in plano, in spatio trium dimensionum etc. puncta numero ∞, ∞^2, ∞^3, etc. inveniri asseritur. Disquisitionis exitum tamen cum eo tantum acceptum desideramus, ut de immani numero varietatum notio praebatur, quae data aequatione differentiali designantur.

His praemissis, ad formulas quaesitas perveniemus, si spatia unius, duarum, trium, . . . dimensionum pedetentim considerabimus.

In spatio S_1 unius dimensionis (in linea) puncta singula habentur, numero semel

infinita. Si punctum quoddam huius spatii nota $S_{1,0}$ designemus, punctorum vero numerum plenum nota $(S_{1,0})$ habebimus

$$(S_{1,0}) = \infty^1$$

In spatio S_2 duarum dimensionum (in superficie) puncta singula habentur ∞^2. Si igitur punctum in spatio duarum dimensionum nota $S_{2,0}$ designetur, eorum numerum plenum vero nota $(S_{2,0})$, habebitur.

$$(S_{2,0}) = \infty^2$$

Sed nunc quaeritur quotne sint varietates diversae unius dimensionis, quae in spatio duarum dimensionum omnino possibiles sunt; aliis verbis quotne sint curvae, quae in superficie quadam (plano quodam) delineari possunt.

Sit curva quaedam C in plano data, et P_1 punctum datum in ipsa curva. Sit deinde $f(x, y) = 0$ aequatio curvae alterius. Si aequatio $f = o$ parametro quodam α praedita sit, hanc generaliter tali ratione determinare licebit, ut curva $f = o$ per punctum P_1 transeat. Si puncta duo P_1 P_2 in curva C data sint, et aequatio $f = o$ parametris duabus α et β praedita sit, hae semper tali ratione determinari possunt, ut curva $f = o$ per puncta P_1 et P_2 transeat. Condicio igitur, cui aequatio $f = o$ subiici debet, ut curva $f = o$ per duo data puncta P_1 P_2 cuiuslibet curvae C in plano datae transire possit, haec est, ut functio f duabus sit praedita parametris indeterminatis. Generaliter asserere possumus, si functio f praedita sit n parametris indeterminatis, has tali modo determinari posse, ut curva $f = o$ n puncta $P_1, \ldots, P_n$ cum curva qualibet C in plano data communia possideat. Numerus porro plenus curvarum, quae aequatione $f = o$, n parametris indeterminatis praedita, gignuntur, nota ∞^n designatur. Cum autem curva qualibet C in plano data numerum semel infinitum punctorum possideat, patet functionem f, si ad limitem pergere liceat, numero parametrum semel infinito praeditam esse debere, ut curva $f = o$ curvam quamlibet C in plano datam contegere possit. Ex hoc sequitur numerum plenum curvarum, quae in plano (aut in superficie quadam) delineari possunt nota ${}_\infty{}^\infty$ designandum esse. Idest erit

$$(S_{2,1}) = \infty^\infty$$

In spatio S_3 habetur, ut notum est,

$$(S_{3,0}) = \infty^3$$

Ut numerum plenum curvarum, quae in spatio trium dimensionum omnino possibiles sunt, determinemus, planum $x\ y$ considerare volumus et in eo omnes curvas delineatas, quarum est numerus ${}_\infty{}^\infty$. Cuique curvae cylindrus, quem plano $x\ y$ perpendicularem fingere possumus, respondet; et in quolibet cylindro (ut in superficie quadam) sunt curvae numero ${}_\infty{}^\infty$. Est igitur numerus plenus curvarum in spatio trium dimensionum ${}_\infty{}^\infty \times {}_\infty{}^\infty$; idest habetur.

$$(S_{3,1}) = \infty^2$$

Ad numerum plenum superficierum deter nandum, quae in spatio trium dimensionum possibiles sunt, superficies quaedam A in ipso spatio sumatur, et in superficie A curva quaelibet C. Sit deinde $f(x, y, z) = o$ aequatio superficiei alterius in eodem spatio. Haud difficile est demonstrare, ex priori considerandi modo, condicionem ut superficies $f = o$ per curvam C, in superficie A arbitrario sumptam, transeat,

hanc esse, ut functio f parametris indeterminatis numero semel infinitis praedita sit. Igitur si superficies $f = o$ per n curvas C, in superficie A arbitrario sumptas, transire debeat, functio f parametris indeterminatis $n.\infty$ praedita esse debet. Si porro in superficie A curvas C numero semel infinitas sumamus, superficies A determinata evadit, quippe quae e numero semel infinito curvarum componi potest. Parametri igitur, quibus functio f praedita esse debet, ut superficies $f = o$ superficiem quamlibet in spatio S_3 arbitrario datam contegere possit, numero esse debent $\infty \times \infty = \infty^2$. Ex hoc, ut supra de curvis in plano dissertum est, facile deducemus, superficies in spatio trium dimensionum esse numero ∞^{∞^2}; scilicet haberi

$$(S_3, _2) = \infty^{\infty^2}$$

Simili disceptatione in spatio quattuor dimensionum obtinebitur

$$(S_4, _0) = \infty^4$$
$$(S_4, _1) = \infty^{3\infty}$$
$$(S_4, _2) = \infty^{2\,\infty^2}$$
$$(S_4, _3) = \infty^{\infty^3}$$

Si eiusmodi argumentationes ad spatia plurium dimensionum extendantur, facile ad formulam perveniemus

$$(S_\mu, _\rho) = \infty^{(\mu-\rho)\,\infty^\rho} \tag{46}$$

quae numerum plenum varietatum ρ dimensionum designat, quae in spatio μ dimensionum possibiles sunt. Formula quoque valet si $\rho = \mu$, et habetur $(S_\mu, _\mu) = 1$, ut eo ipso patet.

In hac dissertatione gravissima est observatio, varietatem quandam $S_{\mu, \rho}$ tanquam spatium S_ρ considerari posse; ita ut numerus varietatum τ dimensionum, quae in varietate determinata $S_{\mu, \rho}$ possibiles sunt, formula

$$\infty^{(\rho-\tau)\,\infty^\tau} \tag{47}$$

exprimitur.

Formulae (46) auxilio facile est inquirere, quis numerus plenus varietatum sit, quae aequatione differentiali

$$\varphi\left(x_a\, z\,(\lambda_p)\right) = 0 \quad \begin{cases} a = 1, 2, .., m \\ p = 1, 2, .., n \end{cases}$$

designantur. Si in spatio S_{m+1} n varietates V_{m-1} arbitrario sumantur, per quas varietates V_m aequatione $\varphi = 0$ designatae transire debeant, una tantum ex his varietatibus V_m (aut earum numerus discretus) positae condicioni satisfaciet (num. 7). Sed, ut e formula (46) habetur, in spatio S_{m+1} varietates V_{m-1} numero $(S_{m+1, m-1}) = \infty^{2\,\infty^{m-1}}$ possibiles sunt. Varietates vero V_{m-1}, quae in varietate quadam $S_{m+1, m}$ possibiles sunt numero habentur $\infty^{\infty^{m-1}}$, ut e formula (47) deducitur. Permutationes igitur

$n.^{ariae}$ omnium varietatum V_{m-1} in spatio S_{m+1} sunt numero $\left(\infty^{2\infty^{m-1}}\right)^n$: permutationes vero $n.^{ariae}$ varietatum V_{m-1} in varietate quadam $S_{m+1,m}$ sunt numero $\left(\infty^{\infty^{m-1}}\right)^n$.

Numerus plenus $S_m^{(n)}$ igitur varietatum V_m in spatio $m+1$ dimensionum, quae aequatione $\varphi = 0$, $n.^{mi}$ ordinis designantur, ratione exprimitur

$$\left(\infty^{2\infty^{m-1}}\right)^n : \left(\infty^{\infty^{m-1}}\right)^n, \text{ idest formula}$$

$$S_m^{(n)} = \infty^{n\infty^{m-1}},$$

quae pro $m = 1$, seu pro aequationibus vulgaribus quoque valet, si ponatur $\infty^0 = 1$, quod cum superioribus congruit notionibus. Ex hoc genere itaque nulla extat indolis differentia inter aequationes vulgares et partiales. Simili consideratione habetur, numerum plenum varietatum, quae aequationi $\varphi = 0$ satisfaciunt, quaeque per q varietates datas V_{m-1} transeunt, nota exprimi posse

$$\infty^{(n-q)\infty^{m-1}}.$$

Varietates quae superiori modo determinavimus, non omnes generaliter sunt, quae aequationi $\varphi = 0$ satisfaciunt. Praeter eas, varietates habentur, quae superiores involvunt, quaeque, si adsint, solutiones singulares, aequationis $\varphi = 0$ constituunt. Sed cum earum numerus quantitas sit infinite parva respectu numeri $S_m^{(n)}$, aeque hunc ipsum tanquam numerum plenum varietatum considerare licebit.

Sopra uno Scheletro Umano dell'età della pietra della Provincia di Roma.

Nota del dott. ANGELO INCORONATO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

Debbo anche questa volta (1) al chiarissimo prof. Pigorini, direttore del Museo preistorico-etnografico di Roma, e gliene rendo vive grazie, la buona occasione di aver potuto studiare gli avanzi di uno scheletro umano, il quale è oltremodo importante, perchè di un individuo, che molto verosimilmente visse all'epoca in cui, nella manifattura delle armi e degli utensili, già cominciava la sostituzione del bronzo alla pietra. Infatti, presso la stazione ferroviaria di Sgurgola, in quel di Anagni, fu scoperta nel travertino una tomba, in cui giaceva uno scheletro umano e, com'era costumanza delle primitive popolazioni, insieme ad esso varî utensili ed armi, fra cui alcune bellissime frecce di silice ed una lama di pugnale di bronzo. Di cotesti oggetti il Pigorini già ha dato sommarie notizie nel Bullettino di paletnologia italiana (2), annunziando che lasciava a me la cura di fare dello scheletro una descrizione.

Lo scheletro non è completo; le ossa che ne avanzano sono le seguenti: otto vertebre, di cui sette dorsali ed una cervicale, delle altre e del sacro frammenti soltanto, che ne ricordano le loro varie parti, fra le quali merita speciale menzione un pezzo, che rappresenta il semi-anello destro di una vertebra cervicale, perchè nell'apofisi trasversa corrispondente si notano due forami e non già un solo, come si trova in quella vertebra cervicale intera, e come suole occorrere nel comune dei casi. Vi sono due pezzi dello sterno, moltissimi di coste, ma di queste nessuna intera, le parti ischiatiche di ambedue le ossa iliache con le corrispondenti cavità cotiloidi, il cranio con la mandibula inferiore, cui mancano le branche verticali, essendovi però tutti i denti, e infine le ossa degli arti.

Tra le osse degli arti superiori sono quasi intere le scapole, all'opposto delle clavicole, ridotte solo alla parte diafisaria; l'omero destro è privo del suo estremo superiore, il sinistro rappresentato dalla sua estremità inferiore, che mostra il foro nella fossa olecranica. Molto meglio conservate sono le ossa degli avambracci, le quali

(1) Gli scheletri umani della caverna delle Arene candide, conservati presso il Museo preistorico-etnografico, furono da me studiati e descritti dietro invito del prof. Pigorini. Veggasi negli Atti della r. Accademia dei Lincei, anno CCLXXV (1877-78), serie 3ª, Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. II. Seduta del 2 giugno 1878.

(2) Bullettino di paletnologia italiana. Anno VI n. 1 e 2 pag. 8 e seg.

offrono pure rilevate impronte d'inserzioni muscolari. Il radio è incurvato notevolmente verso il suo bordo interosseo, per modo, che poggiando sul piano pei suoi estremi corrispondenti al detto bordo, nella sua parte media si discosta da quello per oltre i 12 mill. Vi hanno poche ossa del metacarpo, due del carpo, cioè lo scafoide ed il capitato della mano sinistra, ed alcune falangi.

Tra le ossa degli arti inferiori, il femore destro è completo, lungo 0,410, al sinistro manca il capo articolare superiore; complete sono le tibie, ed una sola fibula, la destra; vi sono poi il calcagno, lo scafoide, l'astragalo, il primo cuneiforme, e nel piede sinistro pure il secondo cuneiforme, quasi tutti i metatarsi e pochissime falangi.

Sul proposito delle tibie osservo, che quella regolare e comune forma di prisma triangolare, propria delle tibie non sfigurate da rachitismo, è accennata appena nell'estremo inferiore; nei loro due terzi superiori, esse sono schiacciate ed appiattite, come una lama di sciabola, *platycnemia*, per una notevole prevalenza di 19 mill., che il diametro antero-posteriore porta sul trasverso, essendo questo di 0,021, mentre l'altro è di 0,040. Le tibie degli scheletri delle Arene candide (1) erano ancora esse appiattite, ma non così esageratamente, poichè fra i due diametri la differenza era solo di 11 mill. in due scheletri, e nel terzo di 14.^{mm} Nel presente caso di platycnemia trovasi un rapporto differenziale fra i diametri antero-posteriore e trasverso anche maggiore di quello presentato dalle tibie dell'Eyzies (2).

Il cranio è benissimo conservato, sebbene la parete laterale sinistra manchi della scaglia del temporale, e nella parete destra vi siano due fori, l'uno per frattura della scaglia del temporale, l'altro per rottura dell'angolo anteriore inferiore del parietale; sono rotte le apofisi mastoidee, ed infine nel vertice del cranio, verso la parte destra del frontale, si nota una fenditura, che evidentemente è stata prodotta nelle operazioni dello scavo. Mancano nella faccia le arcate zigomatiche e tutti i denti della mascella superiore. Non pertanto, nel suo insieme, questo cranio trovasi nelle favorevoli ed opportune condizioni per un esame anche minuzioso; io nondimeno mi atterrò alle più comuni osservazioni, quelle che stimo di maggiore entità, tenendomi strettamente nel campo della osteografia.

Esaminandosi il prospetto, *norma facialis*, e considerando la non molta larghezza dei diametri frontali (il massimo 0,110, il minimo 0,092), la pochissima salienza delle bozze frontali, la leggerissima sporgenza delle arcate sopraorbitarie, che si accentua appena verso la glabella, subito ricorre alla mente la figura di una fronte stretta, sebbene non sfuggente, e pochissimo ondulata, se non quasi pianiforme. In prossimità della sua grande circonferenza, il frontale, proprio nella sua linea mediana, mostra una bozza rilevata. Le tuberosità parietali sporgenti nel contorno trasverso della curva bi-auricolare, come agevolmente vedesi, non sono equidistanti dalla sutura sagittale, essendovi la sinistra più ravvicinata della destra. Tale disposizione rende asimmetrico il cranio, poichè nel lato destro, ove la bozza parietale è più lontana, la parete del cranio ne ascende il vertice con una linea poco arcuata, quasi

(1) Vedi Mem. cit. a pag. 1.

(2) Broca, *Mémoires d'Anthropologie*. Tom. II. p. 175. Paris 1874.

piana, diretta obliquamente, mentre nel lato sinistro la corrispondente tuberosità parietale raggiunge il vertice con una molto accentuata e regolare linea curva (fig. 1).

Nella ispezione dell' occipite, *norma occipitalis,* si osserva, che tutta la parte superiore della regione corrispondente alle ossa parietali è piana, ma nella linea mediana, specialmente lungo il decorso della sutura sagittale, si avverte un vero solco; nella parte inferiore, che corrisponde alla squama dell' osso occipitale, invece una notevolissima sporgenza esageratamente protubera, che si eleva come un comignolo, occupando uno spazio di circa 3 cent. quad. Questa bozza, poichè non trovasi alcuna traccia di tubercolo occipitale e coincide proprio nel posto di esso, potrebbe con molta verosimiglianza ritenersi analoga a questo, ma però eminentemente sviluppato. Infatti, come un vero tubercolo occipitale quella bozza si continua direttamente con leggera ondulazione nella parte superiore della regione in disamina, mentre inferiormente se ne distacca recisamente, facendo una ben distinta sporgenza nettamente delimitata, in guisa che il segmento posteriore della curva orizzontale del cranio, compreso tra l'una e l'altra apofisi mastoidea, coincidente nel culmine di questa bozza occipitale, ha contorno piuttosto angoloso. Fa difetto, insieme al tubercolo occipitale, pure la linea scabra superiore (fig. 2).

Congiungendo le suddescritte regioni con la curva fronto-occipitale della estensione di 0,305, ed esaminandosi il profilo, *norma lateralis,* si rileva, che questo cranio, con un diametro antero-posteriore oltremodo allungato (0,190) e con un indice cefalico di 74,73 per cui occupa un posto molto basso nella serie de' dolicocefali, presenta pure un profilo se non perfetto per lo meno comune, e quindi non disaggradevole nè tampoco caratteristico. Veramente nel suo principio la suddetta linea fronto-occipitale ha un andamento piuttosto rettilineo ed obliquo all'indietro, ma solo per un breve tratto di circa trenta mill., poi prestamente s'inarca e con un tracciato molto ampio svolgendosi, raggiunge il sincipite, percorre tutti i due terzi anteriori della sutura sagittale, ed all'occipite prestamente declina, dove contorna quella suddescritta protuberanza (fig. 3).

Per la mancanza delle arcate zigomatiche non può rendersi alcun conto sul riguardo della loro sporgenza dal contorno cranieno nella ispezione verticale (fig. 4).

Infine, nella base si può rilevare che il foro occipitale ha il diametro antero-posteriore maggiore del trasverso per 16 mill. poichè quello misura 0,048 e questo 0,032. Il mezzo del contorno anteriore di detto forame dista egualmente (0,106) tanto dalla spina del mascellare inferiore, quanto dalla parte posteriore del cranio; sebbene tale risultato debbasi in buona parte attribuire a quella notata sporgenza occipitale. Se attentamente si esamina la regione mastoido-occipitale destra, si vedrà, confrontandola con l'omologa sinistra, che questa è meno protuberante. Ove si rammenti, che nella superficie superiore la parete laterale destra era più appianata si resterà presto convinti che la maggiore ampiezza della regione occipito-mastoidea destra è in compenso della poca sporgenza della omonima bozza parietale. Perchè, l'asimmetria nei craní è un fatto morfologico, che concerne la figura e non la costruzione scheletrica, nel senso, cioè, che lo sferoide cranieno, se in un punto qualunque siasi delle sue varie circonferenze presenta rientramenti o sporgenze, una disposizione affatto inversa, che direi quasi compensativa, si verificherà nel punto diametralmente opposto; per cui ne

risulta l'asimmetria tra parti omologhe, che molto probabilmente non ha alcuna influenza nè sulla capacità craniena, nè tampoco sulla funzionalità cerebrale (').

Le cavità glenoidee molto ampie e poco profonde, massime nella parte anteriore delle loro superficie articolari, danno il presuntivo criterio di movimenti masticatori molto estesi. Infine la volta palatina, lunga circa 0,050, larga 0,048, sprovvista di tutti i denti, e del suo bordo alveolare, essendo interamente eroso, meno nella sua parte anteriore e mediana, non dà idea esatta della sua profondità (fig. 5).

Similmente per la faccia non si possono precisare le dimensioni perchè non contornata dagli archi zigomatici nè dal bordo alveolare, appare più piccina di quello che doveva essere. Ma il diametro bi-zigomatico (0,110) essendo assolutamente uguale al bi-frontale massimo; e questo superando il bi-frontale minimo di oltre 18 mill. risveglia subito la idea di quei tipi di facce larghe, quasi feline, in cui il diametro trasverso uguale a' diametri frontali, se non maggiore di questi, con ogni evidenza dimostra la eccessiva preponderanza della regione zigomo-mascellare, sede degli organi dell'olfatto del gusto e della masticazione, sulla orbito-frontale. Nondimeno il mascellare superiore è poco sviluppato in altezza, discende quasi verticalmente fino al bordo alveolare, ove sporgendo sensibilmente in avanti, produce un prognatismo alveolare abbastanza notevole. Ossa nasali piuttosto piccole, impiantate molto obliquamente sulla spina nasale del frontale, limitano e circoscrivono un'apertura nasale ugualmente piccola e piriforme; infine le orbite a contorno quadrangolare col diametro verticale (0,035), ed il trasverso (0,042) e di giusta profondità, completano la figura di questa faccia, la quale, come il cranio, risulta se non più perfetta, almeno regolare.

Nel mascellare inferiore, sebbene privo delle sue parti verticali, si nota la curvatura del corpo regolarmente parabolica, la superficie esterna del mento spianata ed anche un po' contorta in avanti; all'interno la serie delle apofisi geni aggruppate e fuse in una sola spina oltremodo sviluppata, che fa sporgenza come una vera cresta saliente. Manca l'ultimo dente molare sinistro, andato perduto evidentemente dopo la morte, come si rileva dallo stato del corrispondente alveolo. Gli altri denti sono fortemente incuneati nei loro alveoli, ravvicinatissimi fra loro senza lasciare alcuno spazio; i tre ultimi molari vanno di mano in mano decrescendo in grossezza, dal primo all'ultimo. I loro cuspidi, che sono sensibilissimamente sporgenti dalle superficie masticatorie, e gli orli aguzzi e taglienti dei canini e degl'incisivi, attestando del poco logoramento di quelli, accertano del pari la giovinezza del soggetto. Al quale criterio si può anche aggiungere l'altro della permanenza di tutte le suture del cranio, ed il pochissimo rilievo delle linee d'inserzioni muscolari. Ma la saldatura di tutte le epifisi, d'altra parte, è un criterio non meno certo per persuadere che, se giovane poteva essere l'individuo in disamina, la sua età aveva dovuto raggiungere la virilità e trovarsi nello svolgersi del sesto lustro.

Tutte le ossa di questo scheletro incrostate da depositi calcari sono leggerissime, friabili come vetro; nondimeno in loro non è assolutamente scomparsa la

(') In proposito feci una comunicazione alla r. Accademia di Medicina in Roma, col titolo *Un'anomalia del poligono arterioso cerebrale coincidente con asimmetria del cranio.* Atti della r. Accad. di Medicina di Roma, anno IV, fasc. 2.

sostanza organica, perchè avendosi dovuto, per una circostanza, su cui riferirò tra poco, assoggettare ad analisi chimica un pezzetto dell'osso mascellare superiore si ebbe sufficiente quantità di sostanza organica. Cotesto sarebbe un altro criterio a favore dell' età non avanzata dell' individuo, perchè la quantità di materia organica nelle ossa sta nella ragione inversa dell'età.

La notizia della presenza di sostanza organica in ossa di remota antichità non è assolutamente nuova. Hyrtl, a cui mi riporto, riferisce che Davy, esaminando chimicamente un osso frontale tolto da una tomba di Pompei, ebbe di sostanza organica il 35 p. %; ed in un dente di mummia il 30.5 p. % (1). Simigliantemente, M. Terreil, aiuto naturalista di Chimica inorganica del Museo di storia naturale di Parigi, fece analisi chimica di una falange di piede umano appartenente ad uno scheletro della caverna di Mentone « *epoca paleolitica* » ed ebbe in risultato il 4.07 p. % di sostanza organica e nella parte spongiosa interna del calcagno il 2,49 p. % (2).

Per le quali notizie apprendendo, che materia organica erasi rinvenuta in queste ossa dello scheletro di Sgurgola, non si resta assolutamente sorpresi; ma pure tale fatto non manca d'importanza, perchè, quando la integrità del cranio e delle altre ossa, che ancora sono abbastanza bene conservate, non bastasse da sè sola per provare che quelle ossa non subirono ustione, ne fornirebbe una non dubbia prova il saperle provviste ancora di abbondante materia organica, donde potrebbe dedursi molto presumibilmente, che quelle tribù non avessero il costume di bruciare le ossa dei loro cadaveri. Invece però avevano un'altra usanza, che sebbene frequente ad incontrarsi anche in tribù di selvaggi viventi, non perciò riesce abbastanza strana, ed era quella di colorare le ossa della faccia. Ecco la ragione per cui si fece ricorso all' analisi chimica.

La regione anteriore del frontale, leggermente, ma molto più intensamente tutte le ossa della mascella superiore sono colorate di una tinta cinabrina, la quale, ad onta di sì lungo tempo trascorso, si mostra ancora molto appariscente. Il Pigorini nella sollecitudine di dare le prime notizie, e per la brevità delle stesse, non si occupò, nel suo primo comunicato, di questa circostanza, riserbandosi farne argomento di novella pubblicazione, e dopo essersi accertato della natura di quel colore. A questo esame invitò l'egregio dott. Panebianco Ruggiero, assistente presso il gabinetto mineralogico della romana Università, da cui si ebbe come sicuro risultato di esatte ricerche chimiche, che quel colore dovevasi a cinabro, *solfuro di mercurio*. Stimo superfluo aggiungere che per cotesto medesimo mezzo si ottennero i dati accennanti alla materia organica nelle ossa.

Ora la presenza del cinabro ci pone di fronte due ipotesi, e ben l'osserva il Panebianco; una naturale, accidentale, cioè le infiltrazioni, l'altra puramente artificiale, forse rituale, la colorazione, la quale dovevasi ragionevolmente eseguire dopo la perfetta scomparsa delle parti molli. Escludendo la prima delle due ipotesi per ragioni di fatto e di luogo, potrebbesi ammettere la seconda; e credere quindi che quelle

(1) Hyrtl, *Anatomia dell'uomo*. Versione italiana con note del dott. Giovanni Antonelli. Napoli 1865.

(2) Rivière, *Squelette humaine de l'époque paléolithique dans les cavernes des Baoussé-Rousse*. Paris 1873.

popolazioni usassero, dopo la completa dissoluzione e scomparsa delle parti molli, di colorare le ossa dei loro cadaveri, essendo ciò molto probabilmente una specie di cerimonia dei loro riti funebri.

Per parte mia non mi sembra conveniente di intrattenermi più oltre su questa particolarità paletnografica, sapendo come il Pigorini si sia occupato della materia; e se la comunicazione del suo novello lavoro, con l'annessa relazione del dott. Panebianco, non precederà la presente Memoria di poco la seguirà (1). Del resto ognun sa di quanta e capitale importanza siano, più che la osteografia, gli usi di un popolo per determinare la sua etnografia. Infatti, in questo scheletro nulla vi è di specifico, di tipico, o che già non siasi riscontrato in altri, pur diversi per l'epoca a cui si riferiscono, e per le contrade donde provengono. Per non citare molti esempî mi limito ad un rapido e sommario sguardo comparativo fra i cranî dolicocefali di Cantalupo Mandela, descritti dall'illustre prof. Ponzi, quelli delle Arene candide ed il presente di Sgurgola. In tutti la doliocefalia accompagnavasi alla eccessiva protuberanza occipitale. Ora sarà cotesta una qualifica etnica? Ma i cranî di Cantalupo Mandela l'illustre Professore non si perita di rimandarli all' epoca della pietra rozza (2); quelli delle Arene candide sono evidentemente dell' epoca della pietra polita; il presente senza alcun dubbio è assai più recente, appartenendo all'età del bronzo, la quale presuppone le immigrazioni di altre diverse e più lontane popolazioni. Allora il cranio di Sgurgola presenterà persistenti, in una epoca meno antica, i caratteri osteografici di una razza più vetusta, ad onta di sì lunghi periodi di tempo, e ad onta pure delle immigrazioni e dei possibili incrociamenti quando non voglia dirsi delle possibili dominazioni degli immigranti? A dire il vero non mi pare, rapportando il quesito alla stregua delle mie cognizioni, che esso sia di facile soluzione. Avendo in animo di fare uno studio comparativo di tutti i materiali scientifici sull' argomento, se mi riuscirà di raccoglierli tra i varî avanzi umani di diverse epoche e contrade pur diverse d'Italia, allora sarà il caso di potermi pronunziare con vera cognizione di causa.

(1) Durante il tempo trascorso tra la comunicazione e la pubblicazione della presente Memoria il prof. Pigorini è ritornato su questo importante argomento con un altro lavoro dal titolo: *Avanzi umani e manufatti litici coloriti dell'Età della Pietra.* Bullettino di Paletnologia italiana, anno 6, marzo-aprile 1880.

(2) . . . . . « La volta craniana è convessa e depressa, e si allunga fino all'occipite, il quale si rileva con la sua protuberanza rendendo il capo tanto più doliococefalo » pag. 60. . . . . « Quantunque i cadaveri dolicocefali rappresentino una stirpe che fioriva in età superiore, in quella epoca cioè più vetusta che suol chiamarsi della pietra rozza » pag. 68. Così si esprime il prof. Ponzi nell'appendice osteologica al rapporto *sugli studî e sulle scoperte pateontologiche nel bacino della campagna Romana* del cav. Michele Stefano De Rossi. Roma 1867.

Tabella delle principali misure prese sulle ossa dello Scheletro di Sgurgola.

		Osservazioni
Misure del Cranio	Diametro antero posteriore	0m 190	Tra la glabella ed il mezzo della protuberanza occipitale.
	detto trasverso I.	0m 110	Tra i punti sporgenti delle apofisi orbitarie esterne.
	detto idem II*	0m 092	Tra i punti più rientranti della linea temporale.
	detto idem III*	0m 142	Tra i punti sporgenti delle bozze parietali.
	detto idem IV	0m 130	Tra le apofisi mastoidee, alla loro base.
	Curva fronto-occipitale.	0m 305	Dal mezzo della glabella al mezzo della protuberanza occipitale.
Misure della faccia	detta trasversa	0m 320	Da un foro auditivo all'altro.
	Circonferenza orizzontale	0m 530	
	Altezza della faccia	0m 077	Dal bordo alveolare, in corrispondenza dei denti incisivi, all' impianto sul frontale, delle ossa nasali.
	detta del mascellare superiore .	0m 058?	
	Larghezza della faccia	0m 110?	Tra la parte esistente delle ossa zigomatiche.
	Lunghezza della volta palatina . .	0m 050	
	Larghezza della stessa	0m 040	
	Altezza del corpo del mas. inf. .	0m 130	
	Diametro ant. post. del foro occ. . .	0m 048	
	detto trasverso	0m 032	
	Distanza di detto forame dalla spina anteriore del mascellare superiore	0m 106	
	detta dalla parete post. del cranio	0m 106	
	Diametro verticale delle orbite	0m 035	
	detto trasverso	0m 042	
	Lunghezza del femore	0.m 410	
	detta della tibia	0m 350	
	detta del cubito	0m 250	
	detta del radio	0m 240	
	Indice cefalico	74 73	

Formola dentaria $g.m.\frac{0}{3}+p.m.\frac{0}{2}+c\frac{0}{1}+i\frac{0}{4}+c\frac{0}{1}+p.m.\frac{0}{2}+g.m.\frac{0}{2}$.

Fig: 1

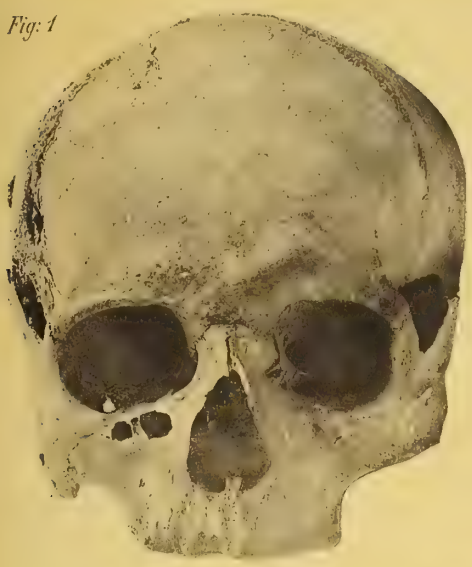


Fig: 2

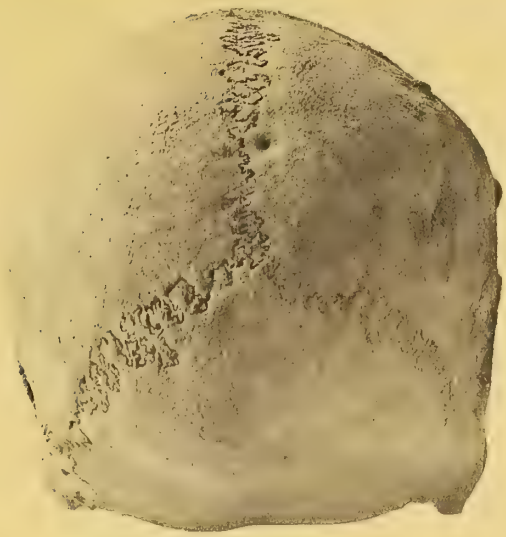


Fig: 3

Fig: 4

Fig: 5

Roma Fototip. Danesi

Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell' Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1879.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 6 giugno 1880.

Ho l'onore di presentare all'Accademia la cinquantottesima effemeride e relativa statistica del fiume Tevere.

Come quelle degli anni precedenti, così questa contiene il registro delle altezze del pelo di acqua del Tevere misurate al mezzodì di ciaschedun giorno del decorso anno 1879 agl'idrometri di Orte e di Ripetta ossia prima e dopo la confluenza dell'Aniene.

Presento del pari l'effemeride e la statistica dell'acqua dello stesso Aniene misurata quotidianamente all'idrometro posto all'imbocco dei cunicoli presso Tivoli. E ciò sempre nello scopo più volte indicato, di determinare cioè dopo una serie di osservazioni sufficientemente estesa la parte che le piene dell'Aniene aggiunte a quelle del Tevere hanno nei danni che risente questa città in occasione delle grandi alluvioni; e quindi nello scopo di potere con fondamento decidere, se e quale vantaggio possa sperarsi dalla deviazione di codesto influente, che taluni vorrebbero portato a sboccare in Tevere al di sotto di Roma.

I suddetti registri o prospetti delle misure numeriche delle altezze sopraindicate sono inoltre corredati, come di consuetudine, dalle rispettive rappresentazioni grafiche o diagrammi.

Esaminando l'effemeride delle altezze quotidiane del Tevere misurate all'idrometro di Ripetta, se riteniamo che quella scala idrometrica rappresenti la magra del fiume fino all'altezza di metri 6, lo stato ordinario dai 6 agli 8 metri, lo stato d'intumescenza dagli 8 ai 12 metri, e lo stato di vera e minacciosa piena al di là dei 12 metri, numerando i giorni in cui il livello delle acque oscillò fra questi limiti, si deduce che il Tevere nel decorso anno 1879 corse in magra per giorni 12; in stato ordinario per giorni 255; in stato d'intumescenza per giorni 95; e presentò vera e minacciosa piena in 3 dì soltanto, e cioè il giorno 4 maggio, ed il primo ed il secondo dì di dicembre; il che però costituisce due sole piene effettivamente distinte l'una dall'altra, appartenendo i due ultimi giorni sopraindicati ad una stessa.

Nella prima delle dette due piene l'altezza di metri 13, 04 segnata al mezzodì del 1° maggio non fu già l'altezza massima, avendo la piena raggiunto il colmo alle ore 5 pomeridiane, segnando metri 13, 12; colmo che mantenne per oltre tre ore.

Del pari nella seconda, nessuna delle due altezze di metri 13, 54 e di metri 12, 90 segnate al mezzodì dei giorni 1 e 2 di dicembre fu l'altezza massima della piena. Il colmo corrispose a metri 13, 75 ; e si verificò alle ore 11 pomeridiane del primo di detti giorni, e si mantenne costante fin oltre le ore 3 antimeridiane del giorno seguente.

Inoltre anche taluni fra quei rigonfiamenti, che giudicati col solo criterio dell'altezza meridiana, debbono annoverarsi fra le semplici intumescenze, debbono invece a stretto diritto classificarsi fra le vere piene se si tiene conto delle altezze segnate nelle ore intermedie tra due osservazioni meridiane consecutive.

Infatti quello che segnava metri 11, 37 al mezzodì del 6 febbraio, e metri 11,60 al mezzodì del susseguente giorno 7, alle ore 11 pomeridiane del giorno 6 toccò l'altezza di metri 12,53, e tale si mantenne fin oltre la prima ora antimeridiana del giorno 7 prendendo così il carattere di vera e minacciosa piena.

Egualmente l'altra intumescenza la quale segnò metri 11, 55 al mezzodì del giorno 26, metri 11, 95 al mezzodì del giorno 27 e metri 11, 65 al mezzodì del giorno 28 dello stesso mese di febbraio, raggiunse col suo colmo l'altezza di metri 12, 24 alle ore 7 antimeridiane del secondo giorno; altezza nella quale si mantenne per ben 3 ore, assumendo così anche questa il carattere di vera ed assoluta piena.

Del resto per poco che si esamini la durata dei sopradetti diversi stati di acqua del Tevere ; di magra cioè, di stato ordinario, d'intumescenza e di piena, ciò che non può passare inosservato è, da una parte lo scarsissimo numero di giorni in cui nell'anno 1879 il Tevere corse in magra (numero che si restringe a soli 12 giorni ossia a soli due quinti di un mese), e d'altra parte il vistoso numero dei giorni in cui, oltrepassato lo stato ordinario, corse intumescente od in piena ; numero che si eleva a ben 98 giorni, ossia ad oltre tre mesi ed un quarto.

Se dunque il Tevere nel decorso anno non presentò piene straordinarie e memorande per altezza, fu però da annoverarsi fra quelli in cui più frequentemente e più lungamente corse abbondante di acque. E ne è prova l'altezza media diurna che gli compete, la quale fu di metri 7,377 ; altezza che nel periodo di ben 58 anni, quanti ne corrono dal 1° gennaio 1822 a tutto il 1879 non fu sorpassata altro che cinque volte soltanto ; e cioè negli anni 1838, 1845, 1853, 1855 e 1860, nei quali l'altezza media giornaliera delle acque del Tevere corrispose rispettivamente a metri 7,449, 7,638, 7,601, 7,629 e 7,407.

Così per riguardo alla durata dei diversi stati di acqua (che già notammo essere stati di giorni 12 per la magra, di giorni 255 per lo stato ordinario, e di giorni 98 in complesso per quello d'intumescenza e di piena), l'anno che consideriamo trova riscontro soltanto nel 1855 in cui si verificò che il Tevere corse in magra durante 11 giorni, in stato ordinario per giorni 255, ed in stato d'intumescenza o di piena, in complesso, per giorni 99.

Ed ora perchè si accrescano gli elementi onde proseguire nello studio iniziato nella effemeride precedente, e cioè sulla corrispondenza delle altezze del colmo di piena ai due idrometri estremi del tronco urbano (Ripetta e Ripagrande) per dedurne in seguito l'influenza al ribassamento delle piene da parte dei lavori di

sistemazione dell'alveo che attualmente sono in corso di esecuzione, aggiungerò qui desumendolo dal registro orario delle altezze del Tevere ai detti idrometri durante le piene avvenute nel 1879 il confronto delle rispettive altezze di colmo, che si compendia così:

Confronto delle altezze di piena del Tevere alle estremità del corso urbano.

EPOCA DELLA PIENA	ALTEZZA DEL COLMO DI PIENA ALL'IDROMETRO		DIFFERENZA
	di Ripetta	di Ripagrande	
Dal 5 all'8 febbraio 1879	12,53	6,28	6,25
Dal 16 febbraio al 2 marzo . . .	12,12	5,89	6,23
Dal 2 al 12 maggio	13,12	6,76	6,46
Dal 29 novembre al 6 dicembre . .	13,75	7,07	6,68

Pongo termine a questa breve Memoria aggiungendo qui il registro delle altezze varie di dette piene misurate ai due idrometri sopraindicati e le rispettive rappresentazioni grafiche o diagrammi.

PIENA DAL 5 ALL' 8 FEBBRAIO 1879

REGISTRO DELLE ALTEZZE DEL PELO D'ACQUA DEL FIUME TEVERE

			Idrometri di Ripetta	*Idrometri* di Ripagrande
5	Feb.	ore 12 mer.		
6	»	» 6 ant.	9,36	
		» 9 »	10,45	4,47
		» 12 mer.	11,37	5,20
		» 3 pom.	11,98	5,75
		» 4 »	12,07	
		» 5 »	12,21	6,00
		» 6 »	12,29	6,08
		» 7 »	12,36	6,16
		» 8 »	12,43	6,22
		» 9 »	12,49	6,26
		» 10 »	12,51	6,28
		» 11 »	12,53	6,28
		» 12 »	12,53	6,28
7	»	» 1 ant.	12,53	6,28
7	Feb.	ore 2 ant.	12,49	6,28
		» 3 »	12,45	6,22
		» 4 »	12,42	6,16
		» 5 »	12,34	6,08
		» 6 »	12,27	6,04
		» 7 »	12,20	6,01
		» 8 »	12,10	5,95
		» 9 »	11,98	5,88
		» 12 mer.	11,60	5,59
		» 3 pom.	11,10	5,13
		» 6 »	10,62	4,73
		» 9 »	10,17	4,29
		» 12 »	9,76	3,92
8	»	» 12 mer.		

PIENA DAL 16 FEBBRAIO AL 2 MARZO

16	Feb.	ore 12 mer.		
17	»	» 2 ant.	10,30	4,28
		» 5 »	10,88	4,84
		» 9 »	11,63	5,52
		» 12 mer.	11,47	5,42
		» 3 pom.	11,14	
		» 6 »	11,10	5,10
		» 9 »	11,10	5,05
		» 12 »	10,98	5,03
18	»	» 3 ant.	10,90	4,99
		» 6 »	10,71	4,88
		» 9 »	10,53	4,76
		» 12 mer.	10,53	4,61
		» 3 pom.	10,29	4,43
		» 6 »	10,14	4,22
		» 12 »	9,76	3,38
19	»	» 6 ant.	9,45	3,60
		» 12 mer.	9,36	3,54
		» 6 pom.	9,63	3,72
		» 12 »	9,80	3,88
20	»	» 6 ant.	9,74	3,87
		» 12 mer.	9,86	3,69
20	Feb.	ore 6 pom.	9.26	3,38
		» 12 »	9,14	3,24
21	»	» 6 ant.	9,00	3,16
		» 12 mer.	9,15	3,35
		» 6 pom.	9,68	3,82
		» 12 »	9,85	3,93
22	»	» 12 mer.	9,90	3,96
		» 6 pom.	9,85	3,97
		» 12 »	9,69	3,80
23	»	» 6 ant.	9,65	3,77
		» 12 mer.	9,65	3,77
		» 6 pom.	9,67	3,79
		» 12 »	9,72	3,85
24	»	» 6 ant.	10,05	4,13
		» 9 »	10,17	4,23
		» 12 mer.	10,19	4,28
		» 3 pom.	10,19	4,27
		» 6 »	10,17	4,23
		» 9 »	10,12	4,17
		» 12 »	10,04	4,12
25	»	» 3 ant.	9,98	4,08
		» 6 »	9,97	4,05

		Idrometri di Ripetta	di Ripagrande
25 Feb.	ore 12 mer.	9,93	4,04
»	» 6 pom.	10,03	4,08
»	» 9 »	10,13	4,22
»	» 12 »	10,23	4,38
26 »	» 3 ant.	10,45	4,54
»	» 6 »	10,78	4,75
»	» 9 »	11,15	5,08
»	» 12 mer.	11,55	5,41
»	» 3 pom.	11,90	5,71
»	» 5 »	12,03	
»	» 6 »	12,07	5,89
»	» 7 »	12,12	5,89
»	» 8 »	12,12	5,89
»	» 9 »	12,12	5,89
»	» 10 »	12,12	5,89
»	» 11 »	12,11	5,89
»	» 12 »	12,11	5,89
27 »	» 1 ant.	12,09	5,89
»	» 2 »	12,08	5,89
»	» 3 »	12,05	5,89
»	» 4 »	12,01	
»	» 5 »	11,99	
»	» 6 »	11,97	5,82
»	» 9 »	11,91	5,76
»	» 12 mer.	11,95	5,78
»	» 1 pom.	12,00	
»	» 2 »	12,05	
»	» 3 »	12,09	5,90
»	» 4 »	12,12	

		Idrometri di Ripetta	di Ripagrande
27 Feb.	ore 5 pom.	12,16	
»	» 6 »	12,22	6,03
»	» 7 »	12,24	
»	» 8 »	12,24	
»	» 9 »	12,24	6,06
»	» 10 »	12,24	
»	» 11 »	12,22	
»	» 12 »	12,18	6,06
28 »	» 1 ant.	12,15	
»	» 2 »	12,12	
»	» 3 »	12,08	5,94
»	» 4 »	12,07	
»	» 5 »	11,98	
»	» 6 »	11,92	5,80
»	» 9 »	11,75	5,65
»	» 12 mer.	11,65	5,53
»	» 3 pom.	11,60	5,51
»	» 6 »	11,58	5,50
»	» 9 »	11,55	5,47
»	» 12 »	11,50	5,43
1° Mar.	» 3 ant.	11,45	5,38
»	» 6 »	11,38	5,33
»	» 9 »	11,24	5,22
»	» 12 mer.	11,05	5,09
»	» 3 pom.	10,89	
»	» 6 »	10,77	
2 »	» 6 ant.	10,10	
»	» 12 mer.		

PIENA DAL 2 AL 12 MAGGIO

2 Mag.	ore 12 mer.	9,24	
7 »	» 6 ant.	10,75	4,69
»	» 9 »	11,38	5,10
»	» 12 mer.	11,83	5,67
»	» 3 pom.	12,33	6,10
»	» 4 »	12,48	6,21
»	» 5 »	12,60	6,32
»	» 6 »	12,76	6,43
»	» 7 »	12,82	6,50
»	» 8 »	12,92	6,56
»	» 9 »	12,93	6,61
»	» 10 »	12,95	6,65
»	» 11 »	13,05	6,70
»	» 12 »	13,08	6,74
4 »	» 1 ant.	13,08	6,76
»	» 2 »	13,08	6,76

4 Mag.	ore 3 ant.	13,08	6,76
»	» 4 »	13,08	6,76
»	» 5 »	13,12	6,76
»	» 6 »	13,12	6,76
»	» 7 »	13,12	6,76
»	» 8 »	13,10	6,76
»	» 9 »	13,08	6,76
»	» 10 »	13,08	6,75
»	» 11 »	13,04	6,73
»	» 12 mer.	13,04	6,71
»	» 1 pom.	13,00	6,70
»	» 2 »	12,98	6,69
»	» 3 »	12,98	6,68
»	» 4 »	12,96	6,65
»	» 5 »	12,94	6,63
»	» 6 »	12,93	6,62

		Idrometri di Ripetta	di Ripagrande
4 Mag.	ore 7 pom.	12,88	6,60
»	» 8 »	12,87	6,57
»	» 9 »	12,84	6,55
»	» 10 »	12,79	6,53
»	» 11 »	12,73	6,50
»	» 12 »	12,68	6,47
5 »	» 1 ant.	12,65	6,44
»	» 2 »	12,60	6,40
»	» 3 »	12,53	6,35
»	» 4 »	12,46	6,29
»	» 5 »	12,37	6,22
»	» 6 »	12,25	6,15
»	» 7 »	12,18	6,07
»	» 8 »	12,09	5,99
»	» 9 »	11,97	5,90
»	» 12 mer.	11,61	5,49
»	» 3 pom.	11,34	5,20
»	» 6 »	10,94	5,02
»	» 9 »	10,58	4,76
»	» 12 »	10,42	4,52
6 »	» 3 ant.	10,21	4,34
»	» 6 »	10,09	4,20
»	» 9 »	9,96	4,08
6 Mag.	ore 12 mer.	9,84	3,96
»	» 6 pom.	9,65	3,79
»	» 12 »	9,52	3,68
7 »	» 6 ant.	9,40	3,58
»	» 12 mer.	9,30	3,48
»	» 6 pom.	9,06	3,38
»	» 12 »	9,01	3,24
8 »	» 6 ant.	8,95	3,18
»	» 12 mer.	8,85	3,09
9 »	» 12 »	8,57	
10 »	» 12 »	8,76	
»	» 6 pom.	9,10	3,19
»	» 12 »	10,30	4,31
11 »	» 3 ant.	10,72	4,72
»	» 6 »	10,90	4,94
»	» 9 »	10,93	4,95
»	» 12 mer.	10,95	4,92
»	» 3 pom.	10,83	4,83
»	» 6 »	10,66	4,70
»	» 9 »	10,46	4,49
»	» 12 »	10,15	4,29
12 »	» 6 ant.	9,67	3,80
»	» 12 mer.	9,28	3,48

PIENA DAL 29 NOVEMBRE AL 6 DICEMBRE

29 Nov.	ore 12 mer.	8,06	2,15
30 »	» 6 ant.	9,70	3,74
»	» 9 »	9,85	3,86
»	» 12 mer.	10,22	4,15
»	» 3 pom.	11,08	4,85
»	» 6 »	11,80	5,52
»	» 8 »	12,21	
»	» 9 »	12,40	5,97
»	» 10 »	12,58	
»	» 11 »	12,70	
»	» 12 »	12,82	6,49
1° Dic.	» 1 ant.	12,95	
»	» 2 »	13,05	
»	» 3 »	13,14	6,57
»	» 4 »	13,17	6,62
»	» 5 »	13,23	6,67
»	» 6 »	13,27	6,73
»	» 7 »	13,31	6,81
»	» 8 »	13,35	6,85
»	» 9 »	13,39	6,85
»	» 10 »	13,45	6,85
»	» 11 »	13,46	6,85
1° Dic.	ore 12 mer.	13,54	6,85
»	» 1 pom.	13,57	7,00
»	» 2 »	13,60	7,03
»	» 3 »	13,62	7,04
»	» 4 »	13,65	7,04
»	» 5 »	13,68	7,04
»	» 6 »	13,70	7,04
»	» 7 »	13,70	7,05
»	» 8 »	13,70	7,07
»	» 9 »	13,74	7,07
»	» 10 »	13,74	7,07
»	» 11 »	13,75	7,07
»	» 12 »	13,75	7,07
2 »	» 1 ant.	13,75	7,07
»	» 2 »	13,75	7,07
»	» 3 »	13,75	7,07
»	» 4 »	13,74	7,07
»	» 5 »	13,74	7,07
»	» 6 »	13,73	7,06
»	» 7 »	13,66	7,03
»	» 8 »	13,60	7,03
»	» 9 »	13,44	6,93

	Idrometri	
	di Ripetta	di Ripagrande
2 Dic. ore 10 ant.	13,29	6,85
» 11 »	13,10	6,75
» 12 mer.	12,90	6,63
» 1 pom.	12,65	6,35
» 2 »	12,42	6,20
» 3 »	12,17	6,05
» 6 »	11,52	5,45
2 Dic. ore 9 pom.	10,95	4,91
» 12 »	10,46	4,84
3 » » 3 ant.	10,07	4,18
» 6 «	9,77	3,96
» 12 mer.	9,24	
4 » » 6 ant.	8,66	2,87
» 12 mer.	8,57	2,75

	Idrometri	
	di Ripetta	di Ripagrande
2 Dic. ore 9 pom.	10,95	4,91
» 12 »	10,46	4,84
3 » » 3 ant.	10,07	4,18
» 6 «	9,77	3,96
» 12 mer.	9,24	
4 » » 6 ant.	8,66	2,87
» 12 mer.	8,57	2,75

Effemeride del Tevere ossia Registro giornaliero dei
al mezzodì d

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Gi** Altezz M
1	2,50	2,40	3,00	2,00	2,50	2
2	2,30	2,35	2,75	1,98	3,00	2
3	2,30	2,25	2,62	2,40	5,00	2
4	2,30	2,90	2,60	3,80	4,30	2
5	2,30	2,85	2,50	3,75	3,20	2
6	2,30	5,18	2,36	2,55	2,75	1
7	2,20	3,00	2,28	2,22	2,60	2
8	2,20	2,60	2,25	2,15	2,40	1
9	2,20	2,40	2,15	2,30	2,55	1
10	3,20	2,25	2,10	2,80	3,00	1
11	2,50	2,12	2,08	4,30	3,00	1
12	2,50	2,85	2,08	3,75	2,60	1
13	2,40	2,90	2,05	3,40	2,45	1
14	2,30	2,45	2,02	3,03	2,28	1
15	2,20	2,30	2,00	2,60	2,22	1
16	2,20	4,60	1,98	2,40	2,20	1
17	2,20	4,05	1,95	2,40	2,38	1
18	2,20	2,75	1,92	3,00	2,40	1
19	2,20	3,30	1,90	4,00	2,30	1
20	2,10	2,70	1,90	3,10	2,35	1
21	1,95	2,75	1,88	2,60	2,50	1
22	1,95	2,70	1,90	3,05	3,90	1
23	1,95	2,90	2,18	3,30	2,75	1
24	1,90	3,20	2,20	2,60	2,50	1
25	1,90	3,20	2,18	2,50	2,40	1
26	1,80	4,17	2,00	2,33	2,45	1
27	1,80	4,10	2,03	2,18	5,10	1
28	1,85	4,00	3,00	2,60	3,70	1
29	2,00		2,30	4,20	2,70	1
30	2,55		2,20	3,40	2,40	1
31	2,75		2,10		2,28	
Sommata	69,00	85,22	68,46	86,69	88,16	54
Media	2,23	3,04	2,21	2,89	2,84	1
Massima	3,20	5,18	3,00	4,30	5,10	2
Minima	1,80	2,12	1,88	1,98	2,20	1
Differenza	1,40	3,06	1,12	2,32	2,90	0

di acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Orte
ell'anno 1879.

lio sservata lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
9	1,53	1,50	1,59	2,52	6,08
9	1,53	1,53	1,57	1,96	3,15
8	1,53	1,52	1,56	1,79	2,58
7	1,53	1,51	1,56	2,10	2,60
7	1,52	1,52	1,55	1,87	3,00
5	1,52	1,60	1,57	1,75	2,60
4	1,52	1,95	1,63	1,68	2,15
3	1,52	1,72	1,58	1,65	1,90
2	1,51	1,62	1,54	1,63	1,75
2	1,51	1,60	1,53	1,61	1,74
0	1,50	1,58	1,53	1,60	1,74
0	1,60	1,56	1,52	1,60	1,76
0	1,60	1,61	1,52	1,59	1,78
0	1,54	1,58	1,52	1,58	1,78
0	1,52	1,55	1,52	1,57	1,79
0	1,58	1,53	1,57	1,56	1,78
0	1,55	1,60	2,21	1,56	1,77
0	1,72	1,90	1,75	1,56	1,75
1	1,62	1,65	1,76	1,57	1,73
3	1,58	1,58	1,64	1,56	1,72
6	1,55	1,57	1,62	1,56	1,71
4	1,54	1,57	1,68	1,58	1,68
4	1,54	1,56	1,74	1,56	1,68
3	1,53	1,56	1,61	1,56	1,68
1	1,53	1,56	1,56	1,56	1,67
9	1,53	1,60	1,56	1,71	1,66
8	1,52	1,59	1,55	2,84	1,65
7	1,52	1,56	1,53	2,50	1,64
5	1,52	1,63	1,52	3,05	1,63
5	1,51	1,62	1,53	6,65	1,63
4	1,50		2,10		1,65
6	47,82	48,03	50,22	58,88	63,43
5	1,54	1,67	1,62	1,96	2,05
4	1,72	1,95	2,21	6,65	6,08
0	1,50	1,50	1,52	1,56	1,63
4	0,22	0,45	0,69	5,09	4,45

Effemeride del Tevere ossia Registro giornaliero dell' a... di acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Orte al mezzodì di ci... dell'anno 1879.

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giugno** Altezza osservata Met. lin.	**Luglio** Altezza osservata Met. lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
1	2,50	2,40	3,00	2,00	2,50	2,24	1,59	1,53	1,50	1,59	2,52	6,08
2	2,30	2,35	2,75	1,98	3,00	2,12	1,59	1,53	1,53	1,57	1,96	3,15
3	2,30	2,25	2,62	2,40	5,00	2,10	1,58	1,53	1,52	1,56	1,79	2,58
4	2,30	2,90	2,60	3,80	4,30	2,04	1,57	1,53	1,51	1,56	2,10	2,60
5	2,30	2,85	2,50	3,75	3,20	2,00	1,57	1,52	1,52	1,55	1,87	3,00
6	2,30	5,18	2,36	2,55	2,75	1,95	1,55	1,52	1,60	1,57	1,75	2,60
7	2,20	3,00	2,28	2,22	2,60	2,05	1,54	1,52	1,95	1,63	1,68	2,15
8	2,20	2,60	2,25	2,15	2,40	1,94	1,53	1,52	1,72	1,58	1,65	1,90
9	2,20	2,40	2,15	2,30	2,55	1,88	1,52	1,51	1,62	1,54	1,63	1,75
10	3,20	2,25	2,10	2,80	3,00	1,87	1,52	1,51	1,60	1,53	1,61	1,74
11	2,50	2,12	2,08	4,30	3,00	1,87	1,50	1,50	1,58	1,53	1,60	1,74
12	2,50	2,85	2,08	3,75	2,60	1,84	1,50	1,60	1,56	1,52	1,60	1,76
13	2,40	2,90	2,05	3,40	2,45	1,82	1,50	1,60	1,61	1,52	1,59	1,78
14	2,30	2,45	2,02	3,03	2,28	1,82	1,50	1,54	1,58	1,52	1,58	1,78
15	2,20	2,30	2,00	2,60	2,22	1,81	1,50	1,52	1,55	1,52	1,57	1,79
16	2,20	4,60	1,98	2,40	2,20	1,80	1,50	1,58	1,53	1,57	1,56	1,78
17	2,20	4,05	1,95	2,40	2,38	1,80	1,50	1,55	1,60	2,21	1,56	1,77
18	2,20	2,75	1,92	3,00	2,40	1,78	1,50	1,72	1,90	1,75	1,56	1,75
19	2,20	3,30	1,90	4,00	2,30	1,76	1,51	1,62	1,65	1,76	1,57	1,73
20	2,10	2,70	1,90	3,10	2,35	1,72	1,53	1,58	1,58	1,64	1,56	1,72
21	1,95	2,75	1,88	2,60	2,50	1,70	1,66	1,55	1,57	1,62	1,56	1,71
22	1,95	2,70	1,90	3,05	3,90	1,69	1,54	1,54	1,57	1,68	1,58	1,68
23	1,95	2,90	2,18	3,30	2,75	1,67	1,74	1,54	1,56	1,74	1,56	1,68
24	1,90	3,20	2,20	2,60	2,50	1,65	1,63	1,53	1,56	1,61	1,56	1,68
25	1,90	3,20	2,18	2,50	2,40	1,64	1,61	1,53	1,56	1,56	1,56	1,67
26	1,80	4,17	2,00	2,33	2,45	1,64	1,59	1,53	1,60	1,56	1,71	1,66
27	1,80	4,10	2,03	2,18	5,10	1,63	1,58	1,52	1,59	1,55	2,84	1,65
28	1,85	4,00	3,00	2,60	3,70	1,62	1,57	1,52	1,56	1,53	2,50	1,64
29	2,00		2,30	4,20	2,70	1,60	1,55	1,52	1,63	1,52	3,05	1,63
30	2,55		2,20	3,40	2,40	1,60	1,55	1,51	1,62	1,53	6,65	1,63
31	2,75		2,10		2,28		1,54	1,50		2,10		1,65
Sommata	69,00	85,22	68,46	86,69	88,16	54,64	48,16	47,82	48,03	50,22	58,88	63,43
Media	2,23	3,04	2,21	2,89	2,84	1,82	1,55	1,54	1,67	1,62	1,96	2,05
Massima	3,20	5,18	3,00	4,30	5,10	2,24	1,74	1,72	1,95	2,21	6,65	6,08
Minima	1,80	2,12	1,88	1,98	2,20	1,60	1,50	1,50	1,50	1,52	1,56	1,63
Differenza	1,40	3,06	1,12	2,32	2,90	0,64	0,24	0,22	0,45	0,69	5,09	4,45

Effemeride del Tevere ossia Registro giornaliero dei
al mezzodì d

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Gi** Altezz M.
1	8,15	7,74	11,07	7,44	9,98	
2	7,77	7,31	9,85	7,24	9,24	
3	7,70	7,12	9,20	7,71	11,83	
4	7,63	8,55	8,88	9,09	13,04	
5	7,40	8,00	8,61	10,09	11,61	
6	7,47	11,37	8,35	9,24	9,84	
7	7,41	11,60	8,15	8,25	9,30	
8	7,18	8,72	7,96	7,86	8,85	
9	7,40	8,03	7,79	8,95	8,57	
10	9,22	7,69	7,68	8,41	8,76	
11	8,83	7,50	7,58	8,88	10,95	
12	8,43	7,96	7,48	11,48	9,28	
13	8,70	9,04	7,41	10,16	8,65	
14	7,83	8,17	7,35	10,00	8,33	
15	7,55	7,75	7,30	8,78	8,10	
16	7,34	9,80	7,24	8,33	7,92	
17	7,24	11,47	7,15	8,17	7,80	
18	7,15	10,53	7,11	8,76	7,74	
19	7,06	9,36	7,07	9,36	7,82	
20	6,97	9,86	7,06	10,15	7,94	
21	6,90	9,15	7,04	8,93	8,28	
22	6,84	9,90	7,02	8,36	10,38	
23	6,78	9,65	7,09	8,93	9,38	
24	6,75	10,19	7,42	9,20	8,21	
25	6,72	9,93	7,48	8,45	7,90	
26	6,72	11,55	7,52	8,22	7,70	
27	6,68	11,95	7,25	7,95	8,17	
28	6,65	11,65	9,80	8,25	11,90	
29	6,85		8,87	9,95	9,86	
30	7,64		8,07	10,76	8,39	
31	8,24		7,60		8,01	
Sommata	231,20	261,54	245,45	267,35	284,73	20
Media	7,46	9,34	7,92	8,90	9,18	
Massima	9,22	11,95	11,07	11,48	13,04	
Minima	6,65	7,12	7,02	7,24	7,70	
Differenza	2,57	4,83	4,05	4,24	5,34	

i acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Ripetta
l'anno 1879.

glio osservata h.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
4	6,21	6,11	6,11	7,17	13,54
4	6,21	6,10	6,12	7,24	12,90
4	6,20	6,09	6,09	6,70	9,24
4	6,19	6,08	6,07	6,44	8,57
3	6,19	6,08	6,06	6,36	9,18
3	6,18	6,08	6,10	6,48	9,86
4	6,18	6,28	6,10	6,26	8,57
3	6,17	6,49	6,09	6,17	8,11
3	6,17	6,36	6,07	6,12	7,78
3	6,17	6,26	6,03	6,08	7,52
3	6,17	6,17	6,01	6,05	7,22
3	6,16	6,16	6,01	6,05	7,05
3	6,16	6,18	6,00	6,04	6,93
2	6,24	6,14	5,99	6,03	6,82
2	6,23	6,13	5,97	6,02	6,73
2	6,20	6,12	6,00	6,01	6,66
2	6,29	6,13	7,01	5,98	6,59
2	6,34	6,20	7,34	5,97	6,56
2	6,36	6,44	6,54	5,97	6,50
2	6,25	6,26	6,31	5,96	6,47
2	6,20	6,16	6,22	5,97	6,43
3	6,17	6,15	6,54	5,96	6,39
3	6,16	6,19	6,45	5,96	6,35
2	6,14	6,14	6,44	5,95	6,33
3	6,14	6,12	6,22	5,96	6,30
2	6,14	6,11	6,14	5,98	6,28
2	6,14	6,16	6,10	9,23	6,25
2	6,14	6,15	6,07	8,31	6,23
2	6,13	6,11	6,08	8,06	6,22
2	6,13	6,15	6,07	10,22	6,20
2	6,12		6,10		6,20
7	191,88	185,30	192,45	196,70	231,98
3	6,19	6,18	6,21	6,56	7,48
4	6,36	6,49	7,34	10,22	13,54
2	6,12	6,08	5,97	5,95	6,20
	0,24	0,41	1,37	4,27	7,34

Effemeride del Tevere ossia Registro giornaliero dell' alt
al mezzodì di cia

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giugno** Altezza osservata Met. lin.
1	8,15	7,74	11,07	7,44	9,98	7,84
2	7,77	7,31	9,85	7,24	9,24	7,66
3	7,70	7,12	9,20	7,71	11,83	7,61
4	7,63	8,55	8,88	9,09	13,04	7,52
5	7,40	8,00	8,61	10,09	11,61	7,44
6	7,47	11,37	8,35	9,24	9,84	7,29
7	7,41	11,60	8,15	8,25	9,30	7,23
8	7,18	8,72	7,96	7,86	8,85	7,29
9	7,40	8,03	7,79	8,95	8,57	7,14
10	9,22	7,69	7,68	8,41	8,76	7,07
11	8,83	7,50	7,58	8,88	10,95	7,01
12	8,43	7,96	7,48	11,48	9,28	6,97
13	8,70	9,04	7,41	10,16	8,65	6,94
14	7,83	8,17	7,35	10,00	8,33	6,88
15	7,55	7,75	7,30	8,78	8,10	6,85
16	7,34	9,80	7,24	8,33	7,92	6,82
17	7,24	11,47	7,15	8,17	7,80	6,78
18	7,15	10,53	7,11	8,76	7,74	6,75
19	7,06	9,36	7,07	9,36	7,82	6,74
20	6,97	9,86	7,06	10,15	7,94	6,70
21	6,90	9,15	7,04	8,93	8,28	6,66
22	6,84	9,90	7,02	8,36	10,38	6,65
23	6,78	9,65	7,09	8,93	9,38	6,60
24	6,75	10,19	7,42	9,20	8,21	6,58
25	6,72	9,93	7,48	8,45	7,90	6,56
26	6,72	11,55	7,52	8,22	7,70	6,54
27	6,68	11,95	7,25	7,95	8,17	6,52
28	6,65	11,65	9,80	8,25	11,90	6,48
29	6,85		8,87	9,95	9,86	6,47
30	7,64		8,07	10,76	8,39	6,45
31	8,24		7,60		8,01	
Sommata	231,20	261,54	245,45	267,35	284,73	208,07
Media	7,46	9,34	7,92	8,90	9,18	6,93
Massima	9,22	11,95	11,07	11,48	13,04	7,84
Minima	6,65	7,12	7,02	7,24	7,70	6,45
Differenza	2,57	4,83	4,05	4,24	5,34	1,39

o di acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Ripetta
dell'anno 1879.

…glio …servata …lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
6,43	6,21	6,11	6,11	7,17	13,54
6,42	6,21	6,10	6,12	7,24	12,90
6,41	6,20	6,09	6,09	6,70	9,24
6,40	6,19	6,08	6,07	6,44	8,57
6,38	6,19	6,08	6,06	6,36	9,18
6,38	6,18	6,08	6,10	6,48	9,86
6,41	6,18	6,28	6,10	6,26	8,57
6,36	6,17	6,49	6,09	6,17	8,11
6,35	6,17	6,36	6,07	6,12	7,78
6,33	6,17	6,26	6,03	6,08	7,52
6,33	6,17	6,17	6,01	6,05	7,22
6,34	6,16	6,16	6,01	6,05	7,05
6,32	6,16	6,18	6,00	6,04	6,93
6,29	6,24	6,14	5,99	6,03	6,82
6,29	6,23	6,13	5,97	6,02	6,73
6,28	6,20	6,12	6,00	6,01	6,66
6,27	6,29	6,13	7,01	5,98	6,59
6,27	6,34	6,20	7,34	5,97	6,56
6,26	6,36	6,44	6,54	5,97	6,50
6,26	6,25	6,26	6,31	5,96	6,47
6,26	6,20	6,16	6,22	5,97	6,43
6,31	6,17	6,15	6,54	5,96	6,39
6,33	6,16	6,19	6,45	5,96	6,35
6,29	6,14	6,14	6,44	5,95	6,33
6,36	6,14	6,12	6,22	5,96	6,30
6,28	6,14	6,11	6,14	5,98	6,28
6,26	6,14	6,16	6,10	9,23	6,25
6,24	6,14	6,15	6,07	8,31	6,23
6,24	6,13	6,11	6,08	8,06	6,22
6,20	6,13	6,15	6,07	10,22	6,20
6,23	6,12		6,10		6,20
95,78	191,88	185,30	192,45	196,70	231,98
6,32	6,19	6,18	6,21	6,56	7,48
6,43	6,36	6,49	7,34	10,22	13,54
6,20	6,12	6,08	5,97	5,95	6,20
0,23	0,24	0,41	1,37	4,27	7,34

Effemeride dell'Aniene ossia Registro giornaliero dell' altezza del pelo di
al mezzodì

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	Alt
1	1,50	1,40	2,00	1,40	1,50	
2	1,50	1,40	2,00	1,40	1,50	
3	1,50	1,30	1,50	1,50	3,20	
4	1,50	1,30	1,50	2,00	1,70	
5	1,50	1,30	1,40	1,40	1,50	
6	1,50	1,70	1,40	1,40	1,50	
7	1,50	1,40	1,40	1,40	1,50	
8	1,50	1,40	1,40	1,40	1,50	
9	1,50	1,40	1,40	2,20	1,50	
10	1,90	1,40	1,30	1,70	1,50	
11	1,90	1,40	1,30	2,30	2,00	
12	1,60	2,70	1,30	2,00	2,00	
13	1,60	1,60	1,30	2,00	1,60	
14	1,50	1,40	1,40	1,50	1,50	
15	1,40	1,40	1,40	1,50	1,50	
16	1,40	2,80	1,40	1,50	1,50	
17	1,30	3,10	1,40	1,50	1,50	
18	1,30	1,40	1,40	1,90	1,50	
19	1,30	1,40	1,40	1,50	1,50	
20	1,30	1,40	1,40	1,50	1,90	
21	1,30	2,90	1,40	1,50	1,80	
22	1,30	3,30	1,40	1,50	1,50	
23	1,30	2,00	1,50	1,40	1,50	
24	1,30	1,50	1,50	1,40	1,40	
25	1,30	1,60	1,50	1,40	1,40	
26	1,30	2,20	1,50	1,40	1,40	
27	1,30	2,00	1,50	1,80	1,70	
28	1,30	2,00	1,50	1,70	1,50	
29	1,30		1,60	2,80	1,40	
30	1,50		1,40	1,70	1,40	
31	1,50		1,40		1,40	
Sommata	44,70	50,10	45,20	49,60	50,00	
Media	1,44	1,79	1,46	1,65	1,61	
Massima	1,90	3,10	2,00	2,80	3,20	
Minima	1,30	1,30	1,30	1,40	1,40	
Differenza	0,60	1,80	0,70	1,40	1,80	

ene all'idrometro esistente all' imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli
el anno 1879.

vata	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
30	1,10	1,38	1,37	1,50	3,00
30	1,10	1,38	1,37	1,48	2,40
30	1,10	1,38	1,37	1,45	2,40
30	1,10	1,38	1,37	1,45	3,10
30	1,10	1,38	1,37	1,45	2,30
30	1,10	1,38	1,37	1,43	2,00
30	1,10	1,50	1,37	1,42	2,00
30	1,10	1,40	1,37	1,42	1,80
30	1,05	1,40	1,37	1,42	1,70
30	1,05	1,40	1,37	1,42	1,70
30	1,05	1,40	1,35	1,40	1,70
30	1,05	1,40	1,35	1,40	1,70
30	1,05	1,40	1,35	1,40	1,60
30	1,10	1,38	1,35	1,40	1,60
30	1,10	1,38	1,35	1,40	1,60
25	1,05	1,37	1,50	1,40	1,50
25	1,05	1,40	1,50	1,40	1,50
25	1,00	1,39	1,40	1,40	1,50
25	1,00	1,38	1,40	1,40	1,50
25	1,00	1,38	1,40	1,40	1,50
20	1,00	1,38	1,40	1,40	1,50
20	1,00	1,38	2,00	1,38	1,50
20	1,00	1,38	1,90	1,38	1,50
20	1,00	1,38	0,90 (1)	1,38	1,50
20	1,00	1,38	1,40	1,36	1,50
15	1,50	1,38	1,40	1,40	1,50
15	1,40	1,40	1,40	2,10	1,45
15	1,40	1,40	1,40	2,00	1,45
10	1,38	1,50	1,40	2,70	1,45
10	1,38	1,40	1,40	2,97	1,45
10	1,38		1,50		1,45
50	34,89	41,84	43,75	46,51	54,35
24	1,13	1,39	1,41	1,55	1,75
30	1,50	1,50	2,00	2,97	3,10
10	1,00	1,37	1,35	1,36	1,45
0	0,50	0,13	0,65	1,61	1,65

(1) Aperto il portone del secondo Cunicolo.

Effemeride dell'Aniene ossia Registro giornaliero dell' altezza del pelo di acq
al mezzodì di

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giug** Altezza o M.
1	1,50	1,40	2,00	1,40	1,50	1,4
2	1,50	1,40	2,00	1,40	1,50	1,4
3	1,50	1,30	1,50	1,50	3,20	1,4
4	1,50	1,30	1,50	2,00	1,70	1,4
5	1,50	1,30	1,40	1,40	1,50	1,4
6	1,50	1,70	1,40	1,40	1,50	1,4
7	1,50	1,40	1,40	1,40	1,50	1,4
8	1,50	1,40	1,40	1,40	1,50	1,4
9	1,50	1,40	1,40	2,20	1,50	1,4
10	1,90	1,40	1,30	1,70	1,50	1,3
11	1,90	1,40	1,30	2,30	2,00	1,3
12	1,60	2,70	1,30	2,00	2,00	1,3
13	1,60	1,60	1,30	2,00	1,60	1,3
14	1,50	1,40	1,40	1,50	1,50	1,3
15	1,40	1,40	1,40	1,50	1,50	1,3
16	1,40	2,80	1,40	1,50	1,50	1,3
17	1,30	3,10	1,40	1,50	1,50	1,3
18	1,30	1,40	1,40	1,90	1,50	1,3
19	1,30	1,40	1,40	1,50	1,50	1,3
20	1,30	1,40	1,40	1,50	1,90	1,3
21	1,30	2,90	1,40	1,50	1,80	1,3
22	1,30	3,30	1,40	1,50	1,50	1,3
23	1,30	2,00	1,50	1,40	1,50	1,3
24	1,30	1,50	1,50	1,40	1,40	1,3
25	1,30	1,60	1,50	1,40	1,40	1,3
26	1,30	2,20	1,50	1,40	1,40	1,3
27	1,30	2,00	1,50	1,80	1,70	1,3
28	1,30	2,00	1,50	1,70	1,50	1,3
29	1,30		1,60	2,80	1,40	1,3
30	1,50		1,40	1,70	1,40	1,3
31	1,50		1,40		1,40	
Sommata	44,70	50,10	45,20	49,60	50,00	40,0
Media	1,44	1,79	1,46	1,65	1,61	1,3
Massima	1,90	3,10	2,00	2,80	3,20	1,4
Minima	1,30	1,30	1,30	1,40	1,40	1,3
Differenza	0,60	1,80	0,70	1,40	1,80	0,1

Aniene all'idrometro esistente all' imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli
dell'anno 1879.

uglio sservata t. lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
1,30	1,10	1,38	1,37	1,50	3,00
1,30	1,10	1,38	1,37	1,48	2,40
1,30	1,10	1,38	1,37	1,45	2,40
1,30	1,10	1,38	1,37	1,45	3,10
1,30	1,10	1,38	1,37	1,45	2,30
1,30	1,10	1,38	1,37	1,43	2,00
1,30	1,10	1,50	1,37	1,42	2,00
1,30	1,10	1,40	1,37	1,42	1,80
1,30	1,05	1,40	1,37	1,42	1,70
1,30	1,05	1,40	1,37	1,42	1,70
1,30	1,05	1,40	1,35	1,40	1,70
1,30	1,05	1,40	1,35	1,40	1,70
1,30	1,05	1,40	1,35	1,40	1,60
1,30	1,10	1,38	1,35	1,40	1,60
1,30	1,10	1,38	1,35	1,40	1,60
1,25	1,05	1,37	1,50	1,40	1,50
1,25	1,05	1,40	1,50	1,40	1,50
1,25	1,00	1,39	1,40	1,40	1,50
1,25	1,00	1,38	1,40	1,40	1,50
1,25	1,00	1,38	1,40	1,40	1,50
1,20	1,00	1,38	1,40	1,40	1,50
1,20	1,00	1,38	2,00	1,38	1,50
1,20	1,00	1,38	1,90	1,38	1,50
1,20	1,00	1,38	0,90 (1)	1,38	1,50
1,20	1,00	1,38	1,40	1,36	1,50
1,15	1,50	1,38	1,40	1,40	1,50
1,15	1,40	1,40	1,40	2,10	1,45
1,15	1,40	1,40	1,40	2,00	1,45
1,10	1,38	1,50	1,40	2,70	1,45
1,10	1,38	1,40	1,40	2,97	1,45
1,10	1,38		1,50		1,45
38,50	34,89	41,84	43,75	46,51	54,35
1,24	1,13	1,39	1,41	1,55	1,75
1,30	1,50	1,50	2,00	2,97	3,10
1,10	1,00	1,37	1,35	1,36	1,45
0,20	0,50	0,13	0,65	1,61	1,65

(1) Fu aperto il portone del secondo Cunicolo.

Anno 1879

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata	Media	Massima	Minima	
	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	69,00	2,23	3,20	1,80	1,40
Febbraio	85,22	3,04	5,18	2,12	3,06
Marzo	68,46	2,21	3,00	1,88	1,12
Aprile	86,69	2,89	4,30	1,98	2,32
Maggio	88,16	2,84	5,10	2,20	2,90
Giugno	54,64	1,82	2,24	1,60	0,64
Luglio	48,16	1,55	1,74	1,50	0,24
Agosto	47,82	1,54	1,72	1,50	0,22
Settembre	48,03	1,67	1,95	1,50	0,45
Ottobre	50,22	1,62	2,21	1,52	0,69
Novembre	58,88	1,96	6,65	1,56	5,09
Dicembre	63,43	2,05	6,08	1,63	4,45
	768,71				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{768,71}{365} = 2,106$

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 6,65
» minima » » 1,50 } differenza massima 5,15

Anno 1879.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata	Media	Massima	Minima	
	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	231,20	7,46	9,22	6,65	2,57
Febbraio	261,54	9,34	11,95	7,12	4,83
Marzo	245,45	7,92	11,07	7,02	4,05
Aprile	267,35	8,90	11,48	7,24	4,24
Maggio	284,73	9,18	13,04	7,70	5,34
Giugno	208,07	6,90	7,84	6,45	1,39
Luglio	195,78	6,32	6,43	6,20	0,23
Agosto	191,88	6,19	6,36	6,12	0,24
Settembre	185,30	6,18	6,49	6,08	0,41
Ottobre	192,45	6,21	7,34	5,97	1,37
Novembre	196,70	6,56	10,22	5,95	4,27
Dicembre	231,98	7,48	13,54	6,20	7,34
	2692,43				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2692,43}{365} = 7,377$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 13,54
» minima » » 5,95 } differenza massima 7,59.

Anno 1879

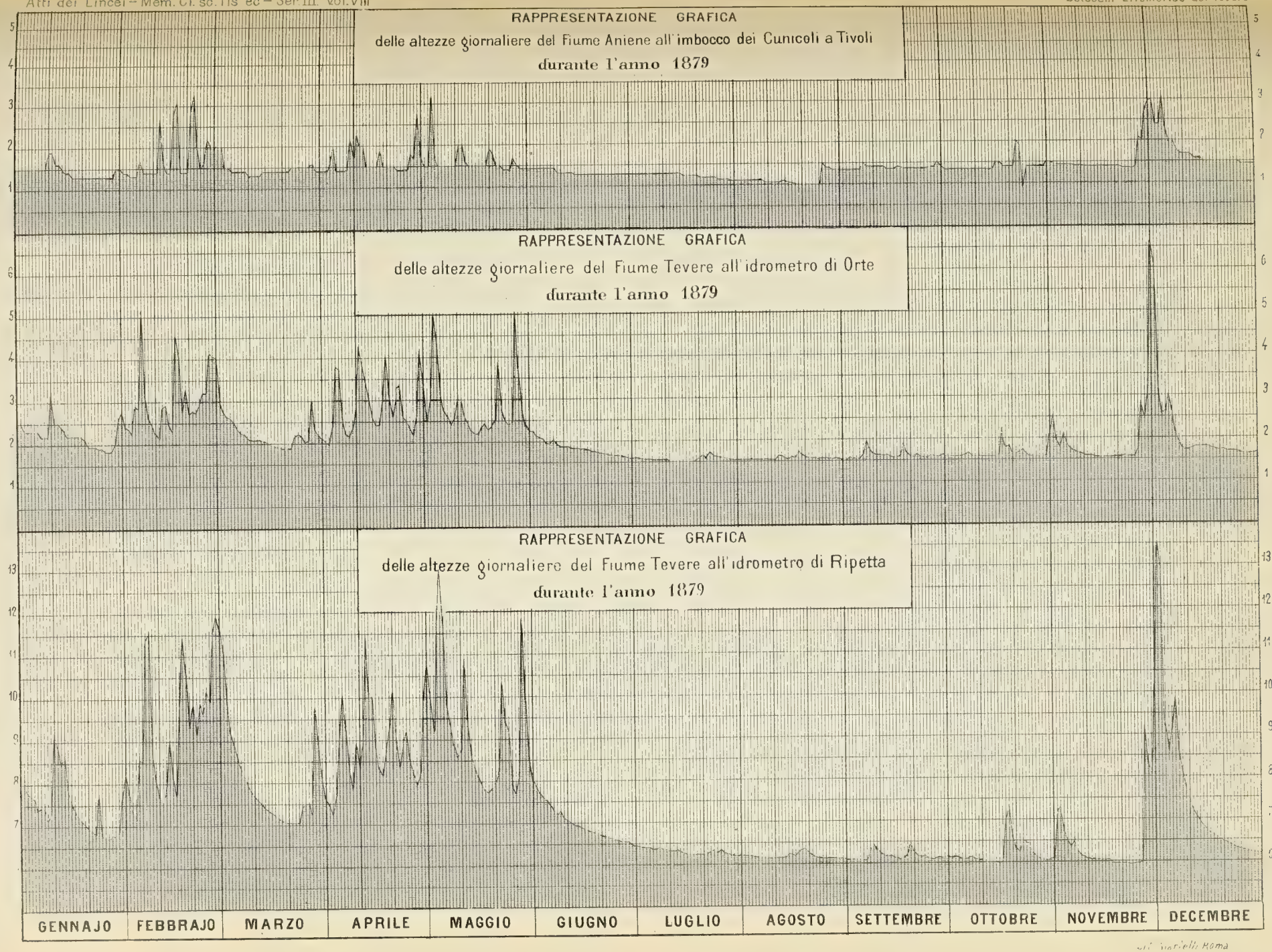
STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata	Media	Massima	Minima	
	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	44,70	1,44	1,90	1,30	0,60
Febbraio	50,10	1,79	3,10	1,30	1,80
Marzo	45,20	1,46	2,00	1,30	0,70
Aprile	49,60	1,65	2,80	1,40	1,40
Maggio	50,00	1,61	3,20	1,40	1,80
Giugno	40,05	1,33	1,40	1,30	0,10
Luglio	38,50	1,24	1,30	1,10	0,20
Agosto	34,89	1,13	1,50	1,00	0,50
Settembre	41,84	1,39	1,50	1,37	0,13
Ottobre	43,75	1,41	2,00	1,35	0,65
Novembre	46,51	1,55	2,97	1,36	1,61
Dicembre	54,35	1,75	3,10	1,35	1,65
	539,49				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{539,49}{365} = 1,478$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 3,20
» minima » » 1,00
} differenza massima 2,20.



Mariotti Roma

Sulle serie trigonometriche a due variabili.

Memoria del prof. G. ASCOLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

INTRODUZIONE

In questa Memoria mi occupo della rappresentabilità di una funzione qualsivoglia a due variabili per serie della forma

$$\sum_0^\nu \sum_0^\mu \left(\left(a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x \right) \operatorname{sen} \nu y + \left(a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x \right) \cos \nu y \right) = \sum_0^\mu \sum_0^\nu B_\mu^{(\nu)}$$

nell'ipotesi che quest'ultima si dica convergente in un punto (x, y), quando in esso l'aggregato

$$\sum_0^m \sum_0^n B_\mu^{(\nu)}$$

tende ad uno stesso limite all'annullarsi successivo delle quantità $\frac{1}{m}$ ed $\frac{1}{n}$ oppure $\frac{1}{n}$ ed $\frac{1}{m}$.

Queste ricerche mi sembrano interessanti come quelle contenute nella mia Memoria *Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica* (1); credo anzi che i risultati del presente lavoro — il quale benchè d'argomento affine è affatto distinto da quello testè citato — meglio si prestino ad applicazioni atte a chiarire la teorica delle funzioni a due variabili.

In appendice ho aggiunto parecchie Note delle quali alcune si riferiscono alla presente Memoria, altre al lavoro ora ricordato, altre infine alla Memoria di Riemann *Sulla rappresentabilità di una funzione per serie trigonometrica.* Queste ultime offriranno forse qualche interesse a chi si è occupato del celebre lavoro di Riemann.

(1) Nel corso di questa Memoria cito questo lavoro con la sola parola *Memoria.* Esso trovasi inserito nel vol. III. di questa raccolta.

I.

1. Dico che una funzione a due variabili $f_1(x, y)$ [1] è rappresentabile per serie doppia trigonometrica, se si può assegnare un aggregato della forma

$$\underset{\sim}{\alpha'} \sum_0^\nu \sum_0^\mu \left[\left(a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x \right) \operatorname{sen} \nu y + \left(a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x \right) \cos \nu y \right] =$$

$$\sum_0^\nu \sum_0^\mu B_\mu^{(\nu)} = B_0^{(0)} + B_0^{(1)} + B_0^{(2)} + \ldots .$$

$$B_1^{(0)} + B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + \ldots .$$

$$B_2^{(0)} + B_2^{(1)} + B_2^{(2)} + \ldots .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

il quale abbia significato *soltanto* per quelle coppie di valori di x e di y, per ciascuna delle quali il simbolo $f_1(x, y)$ esprime una grandezza.

In questo lavoro ammetto che la serie $\underset{\sim}{\alpha'}$ abbia significato nel punto (x,y), oppure, ciò che torna la stessa cosa, sia nel punto (x, y) convergente, quando la somma $\sum_0^n \sum_0^m B_\mu^{(\nu)}$ tenda nel medesimo ad uno *stesso* limite al successivo annullarsi delle quantità $\frac{1}{m}$ ed $\frac{1}{n}$ in quell'ordine che si vuole.

Circa alla funzione $f_1(x, y)$ non si fa veruna ipotesi, tolta quella della doppia periodicità secondo 2π, la quale dee verificarsi necessariamente affinchè essa possa esprimersi nel modo indicato.

2. La condizione che l'insieme $\underset{\sim}{\alpha'}$ converga *soltanto* in ciascuno di quei punti pei quali esiste la funzione considerata potrebbe a prima giunta parere alquanto restrettiva. Ma, nella generalità della nostra ricerca mi sembra conveniente l'accettare la data definizione, perchè semplice e spontanea.

Parmi che anche Riemann la pensasse in questa guisa.

Ed invero, nella Memoria *Sulla rappresentabilità di una funzione per serie trigonometrica* egli ragiona così:..... betrachten wir die Reihe

$$a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots .$$
$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots .$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2} b_0 = A_0, \; a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x = A_1, \; a_2 \operatorname{sen} 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \ldots .$$

setzen, die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots .$$

als gegeben. Wir bezeichnen diesen Ausdruck durch Ω und seinen Werth durch $f(x)$, so dass diese Function nur für diejenigen Werthe von x vorhanden ist, wo die Reihe convergirt (1).

(1) Vedi le Opere di Riemann, pag. 231.

Riemann cerca quindi delle condizioni cui soddisfa questa funzione in conseguenza della sua esprimibilità per serie trigonometrica, dalle quali poi procura di dedurre delle sufficienti affinchè una funzione qualsivoglia sia rappresentabile nel modo indicato. Ammette dunque che una funzione $f(x)$ sia esprimibile nella maniera voluta, quando si abbia

$$f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + \sum_1^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

ovunque il simbolo $f(x)$ ha significato, mentre altrove la serie diverge.

Nè, accettando in questo lavoro la definizione accennata, intendo dire che in casi particolari non possa riuscire talvolta più opportuna una ipotesi alquanto più larga. Così dico, ad esempio, nella mia Memoria, *Sulla serie di Fourier* (1):

Una funzione $f(x)$ continua, tolto un numero limitato di punti del tratto 02π, si dirà esprimibile per serie trigonometrica, quando si abbia

$$f(x) = \sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx),$$

ad eccezione dei punti singolari della $f(x)$ e di un gruppo di punti di ordine finito nell'intervallo 02π, non facendosi alcuna ipotesi circa alla serie

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

nei punti indicati.

Nelle *Nuove ricerche sulla serie di Fourier* (2) mi esprimo così:

Dico che una classe T è esprimibile per serie trigonometrica, quando si può assegnare una serie della forma

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

tale, che, fatta astrazione di un gruppo di punti di ordine finito nel segmento 02π, in ciascuno dei quali si ignora il suo modo di comportarsi, la somma della medesima oscilli per ogni valor particolare della x tra due quantità $\theta_1(x)$ e $\theta_2(x)$ $\big(\theta_1(x) \geq \theta_2(x)\big)$ appartenenti alla classe data.

L'asserire poi come Riemann la pensasse in casi particolari non riesce invero facil cosa.

Infatti, a pag. 223 dopo aver enunciato due teoremi di Dirichlet dice:

Hieraus folgt, dass durch eine trigonometrische Reihe jede sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholende Function darstellbar ist, welche

1 durchgehends eine Integration zulässt,

2 nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und

3 wo ihr Werth sich sprungweise ändert, den Mittelwerth zwischen den beiderseitigen Grenzwerthen annimmt.

(1) Vedi gli Annali di Matematica di Brioschi e Cremona. T. VI. pag. 298.

(2) Vedi le Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei. Serie 3ª vol. II° pag. 634.

Eine Function, welche die ersten beiden Eigenschaften hat die dritte aber nicht, kann durch eine trigonometrische Reihe offenbar nicht dargestellt werden; denn die trigonometrische Reihe, die sie ausser den Unstetigkeiten darstellt, würde in den Unstetigkeitspunkten selbst von ihr abweichen.

A pag. 245 Riemann asserisce:

Von Functionen, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, abgesehen, ist es also zur Darstellbarkeit der Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe mit in's Unendliche abnehmenden Coefficienten hinreichend und nothwendig, dass, wenn sie für $x=a$ unendlich wird, $f(a+t)t$ und $f(a-t)t$ mit t unendlich klein werden und $f(a+t)+f(a-t)$ bis $t=0$ integrirt werden kann.

Suppongo per semplicità che la funzione $f(x)$ di cui si fa parola nelle due ultime asserzioni sia ovunque definita nel tratto $0\,2\pi$, esclusi al più i punti in ciascuno dei quali essa va all'infinito, i quali manifestamente sono in numero limitato (1). Di più, lascio indeterminato il modo di comportarsi della serie trigonometrica in ognuno di questi ultimi.

Ciò posto, stando alla prima asserzione si dovrebbe avere ovunque

$$f(x) = \sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx),$$

tolti i punti or ora indicati. Per la seconda asserzione all' incontro la rappresentabilità potrebbe non aver luogo in un gruppo ovunque compatto del segmento $0\,2\pi$.

Infatti, la serie trigonometrica relativa ad una funzione $f(x)$ scevra da infiniti massimi e minimi, e per la quale sono soddisfatte le condizioni indicate or ora in ognuno dei suoi infiniti, converge in ciascun punto del segmento $0\,2\pi$, fatta astsazione, se mai, dagli infiniti della data funzione [2]. Ora, ammesso che non si possa assegnare un tratto dell'intervallo $0\,2\pi$ nel quale la $f(x)$ è costante, si potrà dividere il segmento $0\,2\pi$ in un numero limitato di parti in ciascuna delle quali essa è sempre crescente o decrescente. Se il primo caso, per fissare le idee, ha luogo nel tratto ab $(0 \leq a < b \leq 2\pi)$, la funzione sarà al certo continua in un gruppo di punti ovunque compatto del medesimo, e potrà essere discontinua in una varietà di punti pure ovunque compatta di ab [3]. Se poi x è una discontinuità della $f(x)$ $(a<x<b)$, i simboli $f(x-0)$, $f(x+0)$ avranno significato, e nel medesimo sarà

$$\tfrac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big) = \sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx),$$

mentre si può ammettere $f(x) \gtreqless \tfrac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big)$, pur essendo $f(x-0)<f(x)<f(x+0)$, la qual cosa è necessaria perchè la $f(x)$ sia ognora crescente nell'intervallo ab. E si può supporre che ciò abbia luogo in ciascun punto di discontinuità della data funzione appartenente al tratto $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$. Nello stesso modo si ragiona rispetto ad un intervallo del segmento $0\,2\pi$ in cui la $f(x)$ è ognora decrescente.

3. Ritornando al nostro argomento, si cercheranno prima delle condizioni necessarie

(1) A rigore la funzione di cui si fa parola nella seconda asserzione non è di necessità la stessa di cui si parla nella prima.

per la rappresentabilità di una funzione nel modo indicato, e da queste si dedurranno, per quanto sarà possibile, delle sufficienti.

Sia dunque data la serie $\underset{\frown}{\alpha'}$, la indicheremo con Ω ed il suo valore nel punto (x,y), quando in esso converga con $f(x,y)$; laonde la funzione a due variabili $f(x,y)$ esiste soltanto in ciascuno dei punti del piano, pei quali il simbolo $\underset{\frown}{\alpha'}$ ha significato.

Distingueremo due ipotesi:

$\underset{\frown}{\text{A}}$ Ogni serie della forma $\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}$ converge, qualunque sia il numero ν e qualunque sia il punto (x,y) considerato. Le serie orizzontali soddisfanno ad una condizione analoga.

$\underset{\frown}{\text{B}}$ Si ignora se l'ipotesi $\underset{\frown}{\text{A}}$ sia soddisfatta.

Data una quantità arbitraria σ, si può sempre determinare nell'ipotesi $\underset{\frown}{\text{A}}$ un numero m in guisa, che sia

$$\sum_0^\mu \mathrm{B}_{n+\mu}^{(\nu)} \leq \sigma\,, \quad n \geq m\,,$$

fatta astrazione dal segno, indipendentemente dal valore dell'intero ν e dal punto che si considera. Così pure si può fare

$$\sum_0^\nu \mathrm{B}_\mu^{(p+\nu)} \leq \sigma\,, \quad p \geq q\,,$$

qualunque sia il numero μ e qualunque sia il punto che si contempla, purchè l'intero q abbia valore opportuno.

In questo lavoro mi occupo soltanto della prima ipotesi.

II.

1. Facciamo ora nell'ipotesi $\underset{\frown}{\text{A}}$ delle ricerche sulla rappresentabilità per serie doppia trigonometrica di una funzione a due variabili doppiamente periodica secondo 2π.

Abbiamo

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_0^\nu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)} = 0\,, \qquad \lim_{\nu=\infty} \sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)} = 0\,,$$

qualunque sia il punto considerato.

Ed invero, ogni serie verticale converge per ipotesi, qualunque sia ν e qualunque sia il punto considerato. Io posso di conseguenza assegnare un valore μ_1 per μ in guisa, che il termine $\mathrm{B}_{\mu_1+s}^{(\nu)}$ $(s \geq 0)$ sia di quella piccolezza che si vuole indipendentemente dal valore delle quantità ν, x ed y. D'altra parte, si può determinare, sempre per l'ipotesi $\underset{\frown}{\text{A}}$, un numero ν_1 per modo, che la somma

$$\sum_0^{\nu_1} \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}$$

sia arbitrariamente vicina all'altra

$$\sum_0^\nu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\,,$$

quale si sia l'intero μ ed il punto (x,y) contemplato. Laonde:

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_0^\nu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)} = 0\,.$$

Nella stessa maniera si dimostra l'altra eguaglianza.

Ciascuna delle due serie

$$\sum_0^\mu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x), \qquad \sum_0^\mu (a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x)$$

converge in egual grado, qualunque sia ν, e si ha, quale si sia x,

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_0^\mu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_0^\mu (a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x) = 0 .$$

Infatti, posto

$$H_1 = \operatorname{sen}\nu y_1 \sum_0^\mu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen}\mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos\mu x) + \cos\nu y_1 \sum_0^\mu (a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen}\mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos\mu x) = p \operatorname{sen}\nu y_1 + q \cos\nu y_1,$$

$$H_2 = \operatorname{sen}\nu y_2 \sum_0^\mu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen}\mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos\mu x) + \cos\nu y_2 \sum_0^\mu (a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen}\mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos\mu x) = p \operatorname{sen}\nu y_2 + q \cos\nu y_2,$$

non essendo $y_1 - y_2 = k\frac{\pi}{\nu}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, si ha

$$p = \frac{H_1 \cos \nu y_2 - H_2 \cos \nu y_1}{\operatorname{sen} \nu (y_1 - y_2)}, \qquad q = \frac{H_2 \operatorname{sen} \nu y_1 - H_1 \operatorname{sen} \nu y_2}{\operatorname{sen} \nu (y_1 - y_2)} .$$

L'altra proprietà ha luogo, perchè, qualunque sieno le grandezze x ed y, si ha

$$\lim_{\nu=\infty} \left[\operatorname{sen} \nu y \sum_0^\mu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x) + \cos \nu y \sum_0^\mu (a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x) \right] = 0.$$

In modo analogo si dimostra che amendue gli aggregati

$$\sum_0^\nu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \nu y + a_\mu^{(-\nu)} \cos \nu y), \qquad \sum_0^\nu (a_{-\mu}^{(\nu)} \operatorname{sen} \nu y + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \nu y)$$

convergono uniformemente, quale si sia μ, mentre

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_0^\nu (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \nu y + a_\mu^{(-\nu)} \cos \nu y) = \lim \sum_0^\nu (a_{-\mu}^{(\nu)} \operatorname{sen} \nu y + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \nu y) = 0 ,$$

indipendentemente dal valore di y.

2. La serie

$$\begin{aligned}
&B_0^{(0)} \frac{x^2 y^2}{4} - B_0^{(1)} \frac{x^2}{2.1^2} - B_0^{(2)} \frac{x^2}{2.2^2} - \ldots . \\
&- B_1^{(0)} \frac{y^2}{2.1^2} + B_1^{(1)} \frac{1}{1^2.1^2} + B_1^{(2)} \frac{1}{1^2.2^2} + \ldots . \\
&- B_2^{(0)} \frac{y^2}{2.2^2} + B_2^{(1)} \frac{1}{2^2.1^2} + B_2^{(2)} \frac{1}{2^2.2^2} + \ldots . \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ,
\end{aligned}$$

ottenuta integrando due volte rispetto ad x e due rispetto ad y ciascun termine della serie α', converge in egual grado e rappresenta una funzione ovunque continua $F(x, y)$.

Giova dimostrare alcune proprietà di questa funzione.

Teorema I. Ciascuna delle due espressioni

$$\frac{F(x+2\alpha, y) - 2F(x,y) + F(x-2\alpha, y)}{4\alpha^2}, \qquad \frac{F(x, y+2\alpha) - 2F(x,y) + F(x, y-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

tende uniformemente ad un limite all'annullarsi di α.

Ed invero,

$$\frac{F(x+2\alpha,y)-2F(x,y)+F(x-2\alpha,y)}{4\alpha^2}=\frac{y^2}{2}\sum_0^r B_r^{(0)}\left(\frac{\operatorname{sen} r\alpha}{r\alpha}\right)^2-\sum_1^t\frac{1}{t^2}\left(\sum_0^r B_r^{(t)}\left(\frac{\operatorname{sen} r\alpha}{r\alpha}\right)^2\right).$$

D'altra parte, qualunque sia t, si ha in egual grado

$$\lim_{\alpha=0}\sum_0^r B_r^{(t)}\left(\frac{\operatorname{sen} r\alpha}{r\alpha}\right)^2=\sum_0^r B_r^{(t)}\ (^1),$$

perchè la serie $\sum_0^r B_r^{(t)}$ converge uniformemente, quale si sia t. Laonde:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+2\alpha,y)-2F(x,y)+F(x-2\alpha,y)}{4\alpha^2}=\frac{y^2}{2}\sum_0^r B_r^{(0)}-\sum_1^t\frac{1}{t^2}\left(\sum_0^r B_r^{(t)}\right)$$

$$=\varphi(x,y).$$

La funzione $\varphi(x,y)$ è ovunque continua e periodica secondo 2π rispetto ad x, lo diviene poi anche rispetto ad y, quando si tolga dalla medesima la serie $\frac{y^2}{2}\sum_0^r B_r^{(0)}$.

È facile vedere che l'aggregato che rappresenta la $\varphi(x,y)$, il quale fu sommato per verticali, può sommarsi anche per rettangoli. Voglio dire con ciò che, detta $P_m^{(n)}$ la somma

$$\frac{y^2}{2}\sum_0^n B_r^{(0)}-\sum_1^m\frac{1}{t^2}\left(\sum_0^n B_r^{(t)}\right),$$

si ha

$$\varphi(x,y)=\lim P_m^{(n)},$$

in qualunque modo si mandino all'infinito sempre crescendo i numeri m ed n (²).

Infatti, quando il numero m' sia scelto in modo opportuno, la somma $\sum_0^u v\ B_{m'+v}^{(p)}$ è piccola quanto si vuole, quale si sia p, essendo u un numero arbitrario, altrettanto ha quindi luogo dell'aggregato

$$\frac{y^2}{2}\sum_0^u v\ B_{m'+v}^{(0)}-\frac{1}{1^2}\sum_0^u v\ B_{m'+v}^{(1)}-\frac{1}{2^2}\sum_0^u v\ B_{m'+v}^{(2)}-\ldots.-\frac{1}{r^2}\sum_0^u v\ B_{m'+v}^{(r)},$$

qualunque sia r.

Se si toglie dunque dalla somma delle prima k serie verticali l'insieme

$$\frac{y^2}{2}\sum_0^v B_{m'+v}^{(0)}-\frac{1}{1^2}\sum_0^v B_{m'+v}^{(1)}-\frac{1}{2^2}\sum_0^v B_{m'+v}^{(2)}-\ldots.-\frac{1}{k^2}\sum_0^v B_{m'+v}^{(k)},$$

si otterrà un aggregato che è vicino quanto si vuole alla quantità $\varphi(x,y)$ da valori opportuni di k e di m'; l'asserto è quindi vero.

In tal guisa nascono le due funzioni

$$\varphi(x,y)=\frac{y^2}{2}\sum_0^r B_r^{(0)}-\sum_1^t\frac{1}{t^2}\left(\sum_0^r B_r^{(t)}\right)$$

$$\psi(x,y)=\frac{x^2}{2}\sum_0^r B_0^{(r)}-\sum_1^t\frac{1}{t^2}\left(\sum_0^r B_l^{(r)}\right).$$

(¹) Vedi Riemann, pag. 232.

(²) Vedi la mia Memoria, N. I, par. 2.

È chiaro poi che si può fare uniformemente

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \psi(x, y).$$

Teorema II. Se la serie $\underset{\sim}{\alpha'}$ converge nel punto (x, y), sarà:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(x, y+2\alpha) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x, y),$$

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\psi(x+2\alpha, y) - 2\psi(x, y) + \psi(x-2\alpha, y)}{4\alpha^2} = f(x, y).$$

Ed invero,

$$\frac{\varphi(x, y+2\alpha) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-2\alpha)}{4\alpha^2} = \sum_0^p B_p^{(0)} + \sum_1^t \left[\left(\sum_0^p B_p^{(t)} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} t\alpha}{t\alpha} \right)^2 \right] =$$

$$\sum_0^t \left[\left(\sum_0^p B_p^{(t)} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} t\alpha}{t\alpha} \right)^2 \right],$$

mentre la serie

$$\sum_0^t \left(\sum_0^p B_p^{(t)} \right)$$

è per ipotesi convergente nel punto considerato.

Nello stesso modo si dimostra la seconda eguaglianza.

Possiamo dunque scrivere nel punto contemplato

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = f(x, y).$$

Teorema III. Le espressioni

$$\frac{F(x+2\alpha, y) - 2F(x, y) + F(x-2\alpha, y)}{\alpha}, \quad \frac{F(x, y+2\alpha) - 2F(x, y) + F(x, y-2\alpha)}{\alpha}$$

si annullano uniformemente con α.

Si ha

$$\frac{F(x+2\alpha, y) - 2F(x, y) + F(x-2\alpha, y)}{\alpha} = 4\alpha \left(\varphi(x, y) + \eta(\alpha) \right),$$

essendo $\eta(\alpha)$ una quantità che tende a zero con α, qualunque siano i valori delle grandezze x ed y.

Teorema IV. Le quantità

$$\frac{\varphi(x, y+2\alpha) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-2\alpha)}{\alpha}, \quad \frac{\psi(x+2\alpha, y) - 2\psi(x, y) + \psi(x-2\alpha, y)}{\alpha}$$

svaniscono in egual grado con α.

Ciò ha luogo perchè ciascuna delle due somme

$$\sum_0^r B_r^{(t)}, \qquad \sum_0^r B_t^{(r)}$$

tende in egual grado allo zero al crescere indefinito dell'intero t (1).

(1) Vedi Riemann, pag. 234.

Teorema V. La funzione $\varphi(\alpha)\alpha^2$ si annulla uniformemente con α, quando si ponga

$$\frac{1}{16\alpha^4}\Big[\mathrm{F}(x+2\alpha,y+2\alpha)+\mathrm{F}(x+2\alpha,y-2\alpha)+\mathrm{F}(x-2\alpha,y+2\alpha)+\mathrm{F}(x-2\alpha,y-2\alpha)-$$
$$2\mathrm{F}(x+2\alpha,y)-2\mathrm{F}(x-2\alpha,y)-2\mathrm{F}(x,y+2\alpha)-2\mathrm{F}(x,y-2\alpha)+4\mathrm{F}(x,y)\Big]=\varphi(\alpha).$$

Infatti,

$$\varphi(\alpha)=\sum_0^\nu\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\left(\frac{\operatorname{sen}\mu\alpha}{\mu\alpha}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu\alpha}{\nu\alpha}\right)^2=\sum_0^\nu\left(\frac{\operatorname{sen}\nu\alpha}{\nu\alpha}\right)^2\left(\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\left(\frac{\operatorname{sen}\mu\alpha}{\mu\alpha}\right)^2\right).$$

D'altra parte,

$$\lim_{\alpha=0}\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\left(\frac{\operatorname{sen}\mu\alpha}{\mu\alpha}\right)^2=\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)},$$

qualunque sia il punto considerato e qualunque sia ν, e perciò:

$$\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\left(\frac{\operatorname{sen}\mu\alpha}{\mu\alpha}\right)^2=\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}+\psi_\nu(\alpha),$$

$\psi_\nu(\alpha)$ essendo una quantità infinitesima insieme ad α indipendentemente dal valore di ν e dal punto che si contempla. Laonde:

$$\varphi(\alpha)=\sum_0^\nu\left(\frac{\operatorname{sen}\nu\alpha}{\nu\alpha}\right)^2\left(\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}+\psi_\nu(\alpha)\right),$$

$$\alpha^2\psi_\nu(\alpha=\alpha^2\sum_0^\nu\left(\frac{\operatorname{sen}\nu\alpha}{\nu\alpha}\right)^2\left(\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\right)+\sum_1^\nu\frac{\operatorname{sen}^2\nu\alpha}{\nu^2}\psi_\nu(\alpha)+\alpha^2\psi_0(\alpha).$$

Ma,

$$\lim_{\alpha=0}\alpha\sum_0^\nu\left(\frac{\operatorname{sen}\nu\alpha}{\nu\alpha}\right)^2\left(\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}\right)=0,\quad \lim_{\alpha=0}\sum_1^\nu\frac{\operatorname{sen}^2\nu\alpha}{\nu^2}\psi_\nu(\alpha)=0,$$
$$\lim_{\alpha=0}\alpha^2\psi_0(\alpha)=0,$$

perchè la serie $\sum_0^\mu \mathrm{B}_\mu^{(\nu)}$ si annulla con $\frac{1}{\nu}$, quale si sia il punto che si considera; l'asserzione è quindi dimostrata [4].

Teorema IV. Se $\lambda(x)$ è una funzione continua insieme all'altra $\lambda'(x)$ nell'intervallo scelto ad arbitrio bc $(b<c)$, sarà:

$$\lim_{m=\infty} m^2\int_b^c\left(\mathrm{F}(x,y)-\frac{\mathrm{B}_0^{(0)}}{4}x^2y^2+\frac{x^2}{2}\sum_1^s \mathrm{B}_0^{(s)}\frac{1}{s^2}\right)\lambda(x)\cos m(x-a)\,dx=0,$$

qualunque sia y, mentre a è una costante arbitraria, quando si abbia

$$\left[\lambda(x)\frac{d\mathrm{K}_{l\pm m}}{dx}\right]_b^c=\left[\lambda'(x)\,\mathrm{K}_{l\pm m}\right]_b^c=0,$$

essendo

$$C_{\pm t} = -a_{\pm t}^{(0)} \frac{y^2}{2} + \sum_1^p \frac{a_{\pm t}^{(p)} \operatorname{sen} py + a_{\pm t}^{(-p)} \cos py}{p^2} \qquad (t \geq 1),$$

$$K_{t \pm m} = \tfrac{1}{2}(C_t \cos ta - C_{-t} \operatorname{sen} ta) \operatorname{sen}(t \pm m)(x-a) + \tfrac{1}{2}(C_t \operatorname{sen} ta + C_{-t} \cos ta) \cos(t \pm m)(x-a),$$

e quando l'integrale

$$\int_b^c \lambda''(x) \cos r(x-a)\, dx$$

si annulli con $\frac{1}{r}$.

Si ha

$$m^2 \int_b^c \left(F(x, y) - \frac{B_0^{(0)}}{4} x^2 y^2 + \frac{x^2}{2} \sum_1^s B_0^{(s)} \frac{1}{s^2} \right) \lambda(x) \cos m(x-a)\, dx =$$

$$\sum_1^t \frac{m^2}{t^2} \int_b^c \left(C_t \operatorname{sen} tx + C_{-t} \cos tx \right) \lambda(x) \cos m(x-a)\, dx .$$

Ora,

$$\operatorname{sen} tx \cos m(x-a) = \operatorname{sen} t(x-a+a) \cos m(x-a) = (\operatorname{sen} t(x-a) \cos ta + \cos t(x-a) \operatorname{sen} ta) \cos m(x-a)$$
$$= \operatorname{sen} t(x-a) \cos ta \cos m(x-a) + \cos t(x-a) \operatorname{sen} ta \cos m(x-a) =$$
$$\tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(t+m)(x-a) + \operatorname{sen}(t-m)(x-a)] \cos ta + \tfrac{1}{2}[\cos(t+m)(x-a) + \cos(t-m)(x-a)] \operatorname{sen} ta,$$
$$\cos tx \cos m(x-a) = \cos t(x-a+a) \cos m(x-a) = (\cos t(x-a) \cos ta - \operatorname{sen} t(x-a) \operatorname{sen} ta) \cos m(x-a) =$$
$$\cos t(x-a) \cos ta \cos m(x-a) - \operatorname{sen} t(x-a) \operatorname{sen} ta \cos m(x-a) =$$
$$\tfrac{1}{2}[\cos(t+m)(x-a) + \cos(t-m)(x-a)] \cos ta - \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(t+m)(x-a) + \operatorname{sen}(t-m)(x-a)] \operatorname{sen} ta ,$$

quindi:

$$(C_t \operatorname{sen} tx + C_{-t} \cos tx) \cos m(x-a)$$
$$\tfrac{1}{2}(C_t \cos ta - C_{-t} \operatorname{sen} ta) \operatorname{sen}(t+m)(x-a) + \tfrac{1}{2}(C_t \cos ta - C_{-t} \operatorname{sen} ta) \operatorname{sen}(t-m)(x-a) +$$
$$\tfrac{1}{2}(C_t \operatorname{sen} ta + C_{-t} \cos ta) \cos(t+m)(x-a) + \tfrac{1}{2}(C_t \operatorname{sen} ta + C_{-t} \cos ta) \cos(t-m)(x-a) =$$
$$P_t \operatorname{sen}(t+m)(x-a) + Q_t \cos(t+m)(x-a) + P_t \operatorname{sen}(t-m)(x-a) + Q_t \cos(t-m)(x-a)$$
$$= K_{t+m} + K_{t-m} .$$

Abbiamo di conseguenza:

$$m^2 \int_b^c \left(F(x,y) - \frac{B_0^{(0)}}{4} x^2 y^2 + \frac{y^2}{2} \sum_1^s B_0^{(s)} \frac{1}{s^2} \right) \lambda(x) \cos m(x-a)\, dx = m^2 \sum_1^t \frac{1}{t^2} \int_b^c (K_{t+m} + K_{t-m}) \lambda(x)\, dx$$

$$= -m^2 \sum_{0 < t \gtrless m}^{t} \frac{1}{t^2} \int_b^c \lambda(x) \left(\frac{1}{(t+m)^2} \frac{d^2}{dx^2} (K_{t+m}) + \frac{1}{(t-m)^2} \frac{d^2}{dx^2} (K_{t-m}) \right) dx$$

$$+ \int_b^c K_{2m} \lambda(x)\, dx + \int_b^c K_0 \lambda(x)\, dx .$$

Il termine generale della serie precedente può porsi nella forma

$$-\frac{m^2}{t^2(t+m)^2}\int_b^c \lambda''(x)\,\mathrm{K}_{t+m}\,dx-\frac{m^2}{t^2(t-m)^2}\int_b^c \lambda''(x)\,\mathrm{K}_{t-m}\,dx\,.$$

Ciascuna delle quantità

$$\int_b^c \lambda''(x)\,\mathrm{K}_{t+m}\,dx\,,\qquad \int_b^c \lambda''(x)\,\mathrm{K}_{t-m}\,dx$$

si annulla con $\frac{1}{m}$, perchè si ha

$$\int_b^c \lambda''(x)\mathrm{K}_{t\pm m}dx=\mathrm{P}_t\int_b^c \lambda''(x)\operatorname{sen}(t\pm m)(x-a)\,dx+\mathrm{Q}_t\int_b^c \lambda''(x)\cos(t\pm m)(x-a)\,dx\,,$$

e gli integrali

$$\int_b^c \lambda''(x)\operatorname{sen}(t+m)(x-a)\,dx\,,\qquad \int_b^c \lambda''(x)\cos(t+m)(x-a)\,dx$$

svaniscono con $\frac{1}{m}$, mentre gli altri

$$\int_b^c \lambda''(x)\operatorname{sen}(t-m)(x-a)\,dx\,,\qquad \int_b^c \lambda''(x)\cos(t-m)(x-a)\,dx$$

tendono pure allo zero insieme ad $\frac{1}{m}$, quando sia $t<t_1$, essendo t_1 un numero intero positivo e grandissimo. Se poi t è maggiore di t_1, i coefficienti P_t e Q_t sono di quella piccolezza che si vuole. Rammentando poi che la somma della serie

$$\sum_{0<t^2\geq m^2}\frac{m^2}{t^2(t-m)^2}$$

resta finita al crescere indefinito di m, e che i termini

$$\int_b^c \mathrm{K}_{2m}\lambda(x)\,dx\,,\qquad \int_b^c \mathrm{K}_0\lambda(x)\,dx$$

svaniscono con $\frac{1}{m}$, si scorge di leggieri che l'asserzione è dimostrata.

Nello stesso modo si vedrebbe che

$$\lim_{n=\infty} n^2\int_b^c\left(\mathrm{F}(x,y)-\frac{\mathrm{B}_0^{(0)}}{4}x^2y^2+\frac{y^2}{2}\sum_1^s \mathrm{B}_s^{(0)}\frac{1}{s^2}\right)\rho(y)\cos n(y-d)\,dy=0\,,$$

essendo $\rho(y)$ una funzione che ha delle proprietà analoghe a quelle dell'altra $\lambda(x)$, e d una costante arbitraria.

Teorema VII. L'integrale

$$-\frac{m^2}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\cos m(x-u)\,\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(y-v)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(y-v)}\right]du\,dv$$

converge all'annullarsi di $\frac{1}{n}$ ad un valore $\varphi_1(m)$, qualunque sia m, e si ha $\lim_{m=\infty} \varphi_1(m) = 0$, qualunque sia il punto (x, y) considerato, mentre

$$\theta(u,v) = B_0^{(0)} \frac{u^2 . v^2}{4} - \frac{u^2}{2} \sum_1^t B_0^{(t)} \frac{1}{t^2} - \frac{v^2}{2} \sum_1^t B_t^{(0)} \frac{1}{t^2} .$$

Infatti,

$$\frac{m^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(F(u,v) - \theta(u,v) \Big) \cos m(x-u)\, du = \sum_1^t B_m^{(t)} \frac{1}{t^2} ,$$

$$\frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(y-v)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right] = -2 \sum_1^n r \cos r(y-v) ,$$

quindi:

$$-\frac{1}{2} \frac{m^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(F(u,v) - \theta(u,v) \Big) \cos m(x-u)\, du \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(y-v)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right] = \Big(\sum_1^t B_m^{(t)} \frac{1}{t^2} \Big) \sum_1^n r\, r^2 \cos r(y-v),$$

e perciò:

$$-\frac{1}{2} \frac{m^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(F(u,v) - \theta(u,v) \Big) \cos m(x-u) \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(y-v)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right] du\, dv = \sum_1^n t\, B_m^{(t)} .$$

La proposizione è dunque dimostrata, quando si rammentino le ipotesi fatte circa alla serie α'.

In maniera analoga si vede che l'espressione

$$-\frac{n^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(F(u,v) - \theta(u,v) \Big) \cos n(y-v) \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2}(x-u)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-u)} \right] du\, dv$$

converge ad un valore $\varphi(n)$ all'annullarsi di $\frac{1}{m}$, qualunque sia n, in guisa, che sia $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = 0$, mentre (x, y) è un punto qualsivoglia del piano.

Teorema VIII. Si ha

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \mu^2 \nu^2 \int_b^c \int_{b_1}^{c_1} \Big(F(x,y) - \frac{B_0^{(0)}}{4} x^2 y^2 + \frac{x^2}{2} \sum_1^s B_0^{(s)} \frac{1}{s^2} + \frac{y^2}{2} \sum_1^s B_s^{(0)} \frac{1}{s^2} \Big) \lambda(x) \rho(y) \cos\mu(x-a) \cos\nu(y-d)\, dx\, dy = 0,$$

essendo $\lambda(x)$ e $\rho(y)$ due funzioni continue rispettivamente negli intervalli bc e $b_1 c_1$, che soddisfanno ad opportune condizioni, ed a e d due costanti arbitrarie.

Questo teorema ed i due successivi sono dimostrati nella mia Memoria già più volte accennata (1).

Teorema IX. L'integrale

$$\mu^2 \int_{b_1}^{c} \int_{b}^{c_1} \left(F(x,y) - \frac{B_0^{(0)}}{4} x^2 y^2 + \frac{y^2}{2} \Sigma_1^s B_s^{(0)} \frac{1}{s^2} + \frac{x^2}{2} \Sigma_1^s B_0^{(s)} \frac{1}{s^2} \right) \cos\nu(y-d) \cos\mu(x-a) \lambda(x) \rho(y) dx dy$$

si annulla con $(\mu\nu)^{-1}$, se $\lambda(x)$ è la funzione del teorema precedente e $\rho(y)$ è continua nell'intervallo $b_1 c_1$.

Teorema X. L'integrale

$$\int_{b}^{c} \int_{b_1}^{c_1} \left(F(x,y) - \frac{B_0^{(0)}}{4} x^2 y^2 + \frac{y^2}{2} \Sigma_0^s B_s^{(0)} \frac{1}{s^2} + \frac{x^2}{2} \Sigma_1^s B_0^{(s)} \frac{1}{s^2} \right) \cos\nu(y-d) \cos\mu(x-a) \lambda(x) \rho(y) dx dy$$

si annulla con $(\mu\nu)^{-1}$, quando le funzioni $\lambda(x)$ e $\rho(y)$ sieno continue rispettivamente negli intervalli bc e $b_1 c_1$.

III.

1. Giovandoci di alcuni dei teoremi che precedono si può asserire quanto segue circa alla rappresentabilità di una funzione a due variabili doppiamente periodica secondo 2π per serie doppia trigonometrica della specie indicata.

Affinchè una funzione $f(x, y)$ doppiamente periodica secondo 2π sia esprimibile per serie della forma $\underset{\sim}{\alpha'}$ e della specie $\underset{\sim}{A}$, dee esistere una funzione $F(x, y)$ ovunque continua, la quale può rendersi doppiamente periodica secondo 2π sottraendo dalla medesima un'espressione della forma

$$\theta(x, y) = B_0^{(0)} \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^2}{2} \Sigma_1^t B_0^{(t)} \frac{1}{t^2} - \frac{y^2}{2} \Sigma_1^t B_t^{(0)} \frac{1}{t^2},$$

mentre le serie

$$\Sigma_1^t B_0^{(t)}, \qquad \Sigma_1^t B_t^{(0)}$$

convergono uniformemente 5.

In secondo luogo, l'integrale

$$-\frac{m^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(F(u,v) - \theta(u,v) \right) \cos m(u-x) \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} \right] du dv$$

(1) Vedi il par. 2 del N. II.

dee tendere ad un valore $\psi_1(m)$ all'annullarsi di $\frac{1}{n}$, qualunque sia m e qualunque sia il punto (x, y) considerato.

Una ipotesi analoga regga rispetto all'integrale

$$-\frac{n^2}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\cos n(v-y)\,\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]du\,dv$$

Per ultimo, si dovrà avere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial^2 y}\right]=f(x,y)\,,\quad\text{oppure}\quad\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}\right]=f(x,y)$$

in ciascun punto in cui il simbolo $f(x, y)$ ha significato.

2. Reciprocamente, se sono soddisfatte queste condizioni [6], esiste una serie della specie indicata, la quale rappresenta la funzione $f(x, y)$ in ciascun punto nel quale converge ed il simbolo $f(x, y)$ ha significato [7].

Infatti, poniamo

$$\theta(u,v)=\mathrm{B}_0^{(0)}\frac{u^2v^2}{4}-\frac{u^2}{2}\sum_1^t\mathrm{B}_0^{(\iota)}\frac{1}{t^2}-\frac{v^2}{2}\sum_1^t\mathrm{B}_\iota^{(0)}\frac{1}{t^2}\,,$$

$$\mathrm{B}_\mu^{(\nu)}=\frac{\mu^2.\nu^2}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\cos\mu(u-x)\cos\nu(v-y)\,du\,dv$$

Ora,

$$\frac{m^2}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\cos m(u-x)\Big(\sum_1^n{}^{\nu}\nu^2\cos\nu(v-y)\Big)du\,dv$$

$$=\sum_1^n{}^{\nu}\mathrm{B}_m^{(\nu)}=$$

$$-\frac{m^2}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\cos m(u-x)\,\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]du\,dv\,.$$

Adunque la serie

$$\sum_1^{\nu}\mathrm{B}_m^{(\nu)}$$

converge uniformemente qualunque sia l'intero m, e poichè altrettanto può dimostrarsi dell'altra

$$\sum_1^{\mu}\mathrm{B}_\mu^{(n)}\,,$$

quale si sia il numero n e quale si sia il punto (x, y) che si considera, esiste una

serie doppia $\sum_0^\mu \sum_0^\nu B_\mu^{(\nu)}$ della forma $\underset{\sim}{\alpha'}$ e della specie indicata, di cui il termine generale è

$$B_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu^2 \nu^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(F(u, v) - \theta(u, v) \Big) \cos \mu (u - x) \cos \nu (v - y) \, du \, dv ,$$

se ciascuno dei numeri μ e ν è maggiore dell'unità, mentre se uno dei medesimi o amendue sono nulli il termine $B_\mu^{(\nu)}$ è già assegnato.

D'altra parte,

$$F(x, y) - \theta(x, y) = \sum_1^\mu \sum_1^\nu \frac{B_\mu^{(\nu)}}{\mu^2 . \nu^2} \ (^1),$$

e poichè pel teorema I

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2} \sum_0^r B_r^{(0)} - \sum_1^t \left(\sum_0^r B_r^{(t)} \right) \frac{1}{t^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{x^2}{2} \sum_0^r B_0^{(r)} - \sum_1^t \left(\sum_0^r B_t^{(r)} \right) \frac{1}{t^2} ,$$

mentre per ipotesi

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = f(x, y) , \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = f(x, y) ,$$

quando il simbolo $f(x, y)$ abbia significato nel punto che si considera, l'asserto è quindi vero, quando si rammenti il teorema II.

3. Il convergere della serie or ora ottenuta $\sum_0^\mu \sum_0^\nu B_\mu^{(\nu)}$ per una coppia di valori particolari delle variabili x ed y dipende dal modo di comportarsi della funzione $F(x, y)$ nelle estreme vicinanze del punto considerato $\underset{\sim}{s}$.

Ed invero, la differenza

$$\sum_0^\mu \sum_0^\nu B_\mu^{(\nu)} - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(F(u,v) - \theta(u,v) \Big) \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} (u - x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (u - x)} \right] \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} (v - y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (v - y)} \right] \Big(\lambda(u) + \rho(v) - \lambda(u) \rho(v) \Big) du \, dv$$

si annulla con $\frac{1}{mn}$ $(^2)$.

$(^1)$ Vedi il par. 4 del N. IV della mia Memoria.

$(^2)$ Vedi il par. 3 del N. III della mia Memoria. Ivi l'intervallo bc relativo alla variabile v va surrogato con l'altro $b_1 c_1$.

Ciò posto, consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\,du\,dv\,.$$

Si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u,v)\Big)\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_1^{\mu}\sum_1^{\nu}\frac{\mathrm{B}_{\mu}^{(\nu)}}{\mu^2.\,\nu^2}\right)\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_1^{\mu}\sum_1^{\nu}\frac{\mathrm{B}_{\mu}^{(\nu)}}{\mu^2.\,\nu^2}\right)\left(\sum_1^{n}r\,r^2\operatorname{sen}r\,(v-y)\right)dv=-\sum_1^{n}\nu\left(\sum_1^{\mu}\frac{\mathrm{B}_{\mu}^{(\nu)}}{\mu^2}\right),$$

e perciò:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathrm{F}(u,v)-\theta(u.v)\Big)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda\,(u)\,du\,dv=$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(\sum_1^{n}\nu\left(\sum_1^{\mu}\frac{\mathrm{B}_{\mu}^{(\nu)}}{\mu^2}\right)\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\lambda\,(u)\,du=$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(\sum_1^{\mu}\left(\sum_1^{n}\nu\,\mathrm{B}_{\mu}^{(\nu)}\right)\frac{1}{\mu^2}\right)\lambda\,(u)\,\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]du\,.$$

L'ultimo integrale diminuito della somma

$$\sum_1^{m}\mu\left(\sum_1^{n}\nu\,\mathrm{B}^{(\nu)}_{\mu}\right)$$

è di quella piccolezza che si vuole a partire da valore opportuno di m per ogni valor particolare di n, perchè i coefficienti $a_m^{(\nu)}$, $a_m^{(-\nu)}$, $a_{-m}^{(\nu)}$, $a_{-\mathrm{m}}^{(-\nu)}$ convergono a zero con $\frac{1}{m}$ e di conseguenza la stessa cosa ha luogo del termine [1]

$$\operatorname{sen} m\,x\sum_1^{n}\nu\left(a_m^{(\nu)}\operatorname{sen}\nu y+a_m^{(-\nu)}\cos\nu y\right)+\cos mx\sum_1^{n}\nu\left(a_{-m}^{(\nu)}\operatorname{sen}\nu y+a_{-m}^{(-\nu)}\cos\nu y\right).$$

[1] Vedi Riemann, pag. 238-239.

La espressione

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c du\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\theta(u,v)\Big)\lambda(u)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv - \sum_1^m{}_\mu\left(\sum_1^n{}_\nu B_\mu^{(\nu)}\right)\right)$$

è quindi nulla per ogni valor particolare di n. Essa può porsi sotto all'aspetto

$$\lim_{m=\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c du\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\theta(u,v)\Big)\lambda(u)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv - \sum_1^m{}_\mu\left(\sum_1^n{}_\nu B_\mu^{(\nu)}\right),$$

perchè la serie

$$\sum_1^m{}_\mu\left(\sum_1^n{}_\nu B_\mu^{(\nu)}\right)$$

converge per ogni valor particolare di n, laonde:

$$\lim_{n=\infty}\left(\lim_{m=\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c du\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\theta(u,v)\Big)\lambda(u)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv - \sum_1^m{}_\mu\left(\sum_1^n{}_\nu B_\mu^{(\nu)}\right)\right)=0.$$

Adunque, la differenza

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c du\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\theta(u,v)\Big)\lambda(u)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv - \sum_1^m{}_\mu\sum_1^n{}_\nu B_\mu^{(\nu)}$$

si annulla, quando in essa si mandi all'infinito prima l'intero m e poi l'intero n.

È chiaro che in questo caso la serie

$$\sum_1^\mu{}_\mu\sum_1^\nu{}_\nu B_\mu^{(\nu)}$$

verrebbe sommata, se convergente, per verticali.

Si avverte poi di leggieri che la stessa cosa ha luogo rispetto all'ultima differenza, se si mandano all'infinito le quantità m ed n in ordine inverso al precedente, nel qual caso la solita serie verrebbe sommata, quando convergesse, per orizzontali.

Ed invero,

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\vartheta(u,v)\Big)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\,du\,dv=$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(\sum_1^{\mu}\frac{1}{\mu^2}\left(\sum_1^{n}{}_{\nu}\,B_{\mu}^{(\nu)}\right)\right)\lambda(u)\,\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]du\,.$$

Ora, l'integrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(\sum_1^{\mu}\frac{1}{\mu^2}\left(\sum_{n+1}^{n_1}{}_{\nu}\,B_{\mu}^{(\nu)}\right)\right)\lambda(u)\,\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]du\quad(n_1>n+1)$$

è di quella piccolezza che si vuole a partire da valore opportuno di n per ogni valor particolare di m, poichè la somma della serie

$$\sum_1^{\mu}\frac{1}{\mu^2}\left(\sum_{n+1}^{n_1}{}_{\nu}\,B_{\mu}^{(\nu)}\right)$$

si annulla con $\frac{1}{n}$ qualunque sia il punto considerato e qualunque sia l'intero n_1 purchè maggiore di n. Perciò:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\vartheta(u,v)\Big)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\,du\,dv$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_b^c\sum_1^{\mu}\frac{1}{\mu^2}\left(\sum_1^{\nu}B_{\mu}^{(\nu)}\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\lambda(u)\,du\,.$$

L'ultimo integrale diminuito della somma

$$\sum_1^{m}\left(\sum_1^{\nu}B_{\mu}^{(\nu)}\right)$$

si annulla con $\frac{1}{m}$, perchè ciascuno dei due aggregati

$$\sum_1^{\nu}\left(a_{\mu}^{(\nu)}\operatorname{sen}\nu y+a_{\mu}^{(-\nu)}\cos\nu y\right),\quad\sum_1^{\nu}\left(a_{-\mu}^{(\nu)}\operatorname{sen}\nu y+a_{-\mu}^{(-\nu)}\cos\nu y\right)$$

svanisce con $\frac{1}{\mu}$.

In modo analogo si dimostra che la espressione

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(F(u,v)-\theta(u,v)\Big)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\rho(v)\,du\,dv$$

$$-\sum_1^m{}_\mu\sum_1^n{}_\nu B_\mu^{(\nu)}$$

si annulla, quando si mandino a zero successivamente le quantità $\frac{1}{m}$ ed $\frac{1}{n}$ o viceversa.

Occupiamoci ora dell'integrale

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta(u,v)\,\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\,\rho(v)\,du\,dv=$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1}\left(B_0^{(0)}\frac{u^2v^2}{4}-\frac{u^2}{2}\sum_1^t B_0^{(t)}\frac{1}{t^2}-\frac{v^2}{2}\sum_1^t B_t^{(0)}\frac{1}{t^2}\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\rho(v)\,du\,dv.$$

Si ha

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1}B_0^{(0)}\frac{u^2v^2}{4}\,\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\,\rho(v)\,du\,dv=$$

$$B_0^{(0)}\frac{1}{2\pi}\int_b^c\frac{u^2}{2}\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\lambda(u)\,du\,\frac{1}{2\pi}\int_{b_1}^{c_1}\frac{v^2}{2}\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\rho(v)\,dv=$$

$$B_0^{(0)}+\eta\,,$$

quando s'integri per parte e si rammentino le proprietà delle funzioni $\lambda(u)$ e $\rho(v)$, essendo η una quantità che si annulla insieme all'altra $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

Ora,

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1}\frac{v^2}{2}\left(\sum_1^t B_t^{(0)}\frac{1}{t^2}\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\,\rho(v)\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{b_1}^{c_1}\frac{v^2}{2}\rho(v)\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]dv\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_1^t\frac{-B_t^{(0)}}{t^2}\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\lambda(u)\,du\,.$$

Di conseguenza:

$$\lim_{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0} \frac{-1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1}\frac{v^2}{2}\left(\sum_1^t B_t^{(0)}\frac{1}{t^2}\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\rho(v)\,du\,dv$$

$$=\sum_1^t B_t^{(0)}.$$

Così pure si ha

$$\lim_{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0} \frac{-1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1}\frac{u^2}{2}\left(\sum_1^t B_0^{(t)}\frac{1}{t^2}\right)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\rho(v)\,du\,dv$$

$$=\sum_1^t B_0^{(t)}.$$

Per cui finalmente:

$$\lim\left(\sum_0^m{}^{\mu}\sum_0^n{}^{\nu} B_{\mu}^{(\nu)}-\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1}F(u,v)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{ssn}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\rho(v)\,du\,dv\right)=0,$$

quando si mandino a zero successivamente le quantità $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ ed in ordine arbitrario.

Avrebbe poi luogo la stessa cosa se il punto considerato (x, y) cadesse sopra una delle rette $x=0$, $y=0$ soltanto oppure nell'origine [2].

IV. (1)

1. Se $f(x)$ è una funzione qualsivoglia continua nel tratto $ab\left(0<a<b\leq\frac{\pi}{2}\right)$ mai negativa nè mai crescente in esso, l'integrale

$$\int_a^b f\,\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha\,,\quad h=2n+1,\ .$$

si annulla con $\frac{1}{n}$, quando si possa assegnare un valore $M(>0)$ in guisa, che non si abbia $f(x)>M$, qualunque sia x.

(1) Vedi la Memoria del sig. Heine *Ueber trigonometrische Reihen* nel 71 Ve del Giornale di Crelle, e la annotazione a pag. 31 del Ve 89 dello stesso Giornale.

Decomponiamo l'intervallo ab nei seguenti

$$a \quad t\frac{\pi}{h}, \quad t\frac{\pi}{h} \quad (t+1)\frac{\pi}{h}, \ldots\ldots, \quad s\frac{\pi}{h} \quad b,$$

essendo

$$(t-1)\frac{\pi}{h} \leq a < t\frac{\pi}{h}, \quad s\frac{\pi}{h} < b \leq (s+1)\frac{\pi}{h}.$$

Ora, la funzione

$$f(x)\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

non assume mai valori negativi nel segmento considerato; di conseguenza, se r è un numero pari, si può fare:

$$0 < \int_{r\frac{\pi}{h}}^{(r+1)\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha < \frac{f\left(r\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen} r\frac{\pi}{h}}\frac{2}{h},$$

se impari:

$$0 < -\int_{r\frac{\pi}{h}}^{(r+1)\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha > \frac{f\left((r+1)\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen}(r+1)\frac{\pi}{h}}\frac{2}{h}.$$

Perciò, se t è pari, avremo:

$$\int_{t\frac{\pi}{h}}^{s\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha = \left(\int_{t\frac{\pi}{h}}^{(t+1)\frac{\pi}{h}} + \int_{(t+1)\frac{\pi}{h}}^{(t+2)\frac{\pi}{h}} - \ldots + \int_{(s-2)\frac{\pi}{h}}^{(s-1)\frac{\pi}{h}} - \int_{(s-1)\frac{\pi}{h}}^{s\frac{\pi}{h}}\right) f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha$$

$$\text{»} \qquad < \left(\frac{f\left(t\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen} t\frac{\pi}{h}} - \frac{f\left((t+2)\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen}(t+2)\frac{\pi}{h}} + \frac{f\left((t+2)\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen}(t+2)\frac{\pi}{h}} - \ldots\right)\frac{2}{h}$$

$$\text{»} \qquad < \frac{2}{h}\frac{f\left(t\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen} t\frac{\pi}{h}},$$

perchè ogni termine additivo del secondo membro della eguaglianza fu aumentato ed ogni termine negativo diminuito.

Se poi t fosse impari, si avrebbe con lo stesso metodo:

$$-\int_{t\frac{\pi}{h}}^{s\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha < \frac{2}{h}\frac{f\left(t\frac{\pi}{h}\right)}{\operatorname{sen} t\frac{\pi}{h}}$$

In amendue i casi possiamo quindi porre

$$\int_{t\frac{\pi}{h}}^{s\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha < 2\,\mathrm{M}\,\frac{\frac{1}{h}}{\operatorname{sen} t\frac{\pi}{h}}$$

$$\text{»} \qquad < 2\,\mathrm{M}\,\frac{\frac{t\pi}{h}}{\operatorname{sen} t\frac{\pi}{h}}\,\frac{1}{t\pi},$$

fatta astrazione dal segno.

Nelle due prime delle tre ultime diseguaglianze non occorre fare astrazione dal segno perchè amendue i termini che compariscono in ognuna di esse è positivo, nella terza poi il secondo membro è sempre positivo ed il primo lo è solamente quando il numero t è pari.

Ora, poichè

$$0 < a < \frac{t\pi}{h} < \frac{\pi}{2},$$

la quantità t va all'infinito con h, e perciò:

$$\lim_{h=\infty} \frac{t\frac{\pi}{h}}{\operatorname{sen} t\frac{\pi}{h}} \cdot \frac{1}{t\pi} = 0.$$

D'altra parte,

$$\int_{a}^{t\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha < \frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sen} a}\int_{a}^{t\frac{\pi}{h}} \operatorname{sen} h\alpha\,d\alpha < \frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sen} a}\,\frac{2}{h},$$

$$\int_{s\frac{\pi}{h}}^{b} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha < \frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sen} s\frac{\pi}{h}}\int_{s\frac{\pi}{h}}^{b} \operatorname{sen} h\alpha\,d\alpha < \frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sen} s\frac{\pi}{h}}\,\frac{2}{h}$$

quando si faccia astrazione dal segno, il teorema è quindi dimostrato.

Ricordo che in questa proposizione la $f(x)$ è una funzione qualsivoglia appartenente ad una varietà di funzioni, ciascuna delle quali soddisfa alle condizioni enunciate nel teorema.

La quantità a può variare da funzione a funzione, purchè però il suo limite inferiore non sia lo zero, pur potendo essere di quella piccolezza che si vuole. Altrettanto si dica della grandezza b, purchè il suo limite superiore non ecceda il valore $\frac{\pi}{2}$. La differenza $b—a$ poi può raggiungere anche lo zero.

Per rendere più manifesto come la dimostrazione precedente si riferisca in egual modo ad una qualsivoglia delle funzioni di una varietà che soddisfa alle condizioni dell'enunciato, si porti sopra il segmento di cui gli estremi sono i punti 0 e $\frac{\pi}{2}$ l'intervallo $\frac{\pi}{h}$ a partire dell'origine tante volte quante è possibile. Si può poi supporre l'intero h così grande, che nel tratto $0a_1$ sia compreso già a principio della dimostrazione un numero grandissimo di volte l'intervallo $\frac{\pi}{h}$, essendo a_1 il limite inferiore delle quantità a.

È chiaro poi che, fatta astrazione dal segno,

$$\int_{t\frac{\pi}{h}}^{s\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}d\alpha < \frac{M}{\operatorname{sen} a_1}\frac{2}{h}, \qquad \int_{a}^{t\frac{\pi}{h}} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}d\alpha < \frac{M}{\operatorname{sen} a_1}\frac{2}{h},$$

$$\int_{s\frac{\pi}{h}}^{b} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}d\alpha < \frac{M}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}\frac{2}{h},$$

qualunque sia la funzione della varietà data che si considera.

È anche facile vedere come il limite inferiore della quantità b-a possa essere lo zero.

Infatti, data una grandezza arbitrariamente piccola σ (>0), si potrà assegnare un valore per la differenza b-a in guisa, che l'integrale

$$\int_{a}^{b} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha$$

non sia maggiore di σ, tolto il segno, qualunque sia n, quando lo si riferisca ad una qualsivoglia delle funzioni $f(\alpha)$ per le quali b-$a \leq \sigma$. Per le altre funzioni poi vale il ragionamento che precede.

2. L'integrale

$$\int_0^b f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha \quad \left(h=2n+1,\ 0<b\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

tende uniformemente al valore $f(0)$ all' annullarsi di $\frac{1}{n}$, essendo $f(\alpha)$ una funzione qualsivoglia di una varietà di funzioni egualmente continue, ciascuna delle quali non è mai crescente e negativa, nè supera un valore assegnabile $M\,(>0)$.

Una varietà è formata da funzioni egualmente continue nel segmento ab, quando, assegnata una grandezza arbitrariamente piccola σ, si può determinare un'altra η tale, che la oscillazione della funzione qualsivoglia $f(x)$ in un tratto non inferiore ad η sito nell'intervallo ab non superi la grandezza σ.

Ora, si ha

$$\int_0^b f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha=\left(\int_0^c+\int_c^b\right)f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha\,.$$

Il secondo dei due integrali che compariscono nel secondo membro si annulla pel teorema precedente con $\frac{1}{n}$, c essendo una quantità determinata che è di quella piccolezza che si vuole. Occupiamoci quindi del primo. La quantità c può pigliarsi per le fatte ipotesi in guisa, che la oscillazione della funzione qualsivoglia $f(x)$ della nostra varietà sia arbitrariamente piccola nel segmento di cui gli estremi sono 0 e c.

Ciò posto, si potrà fare

$$\int_0^c f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha=f(0)\int_0^c\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha+\int_0^c\varphi(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha\,,$$

ove $\varphi(\alpha)=f(\alpha)-f(0)$ è una funzione che non è mai positiva nè crescente nel tratto $0c$ e la quale raggiunge in quest'ultimo solamente dei valori piccolissimi.

Ora,

$$\int_0^c\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha=\left(\int_0^{\frac{\pi}{h}}+\int_{\frac{\pi}{h}}^{2\frac{\pi}{h}}+\int_{2\frac{\pi}{h}}^{3\frac{\pi}{h}}+\ldots\ldots+\int_{(t-1)\frac{\pi}{h}}^{t\frac{\pi}{h}}+\int_{t\frac{\pi}{h}}^{c}\right)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha\,,$$

mentre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{h}} + \ldots\ldots + \int_{(t-1)\frac{\pi}{h}}^{t\frac{\pi}{h}} + \int_{t\frac{\pi}{h}}^{(t+1)\frac{\pi}{h}} + \ldots + \int_{n\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha$$

$$= \rho_0 - \rho_1 + \rho_2 - \rho_3 + \ldots + (-1)^n \rho'_n ,$$

essendo

$$\rho_0 > \rho_1 > \rho_2 > \rho_0 > \cdots ,$$

e

$$\lim_{s=\infty} \rho_s = 0 ,$$

ove s è una funzione dell' intero n la quale va all'infinito con quest' ultimo in guisa, che il quoto $\frac{s\pi}{h}$ tenda ad un limite compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Ne consegue che la espressione

$$\int_0^c \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha - \frac{\pi}{2}$$

è infinitesima con $\frac{1}{n}$, perchè il termine

$$\int_{t\frac{\pi}{h}}^c \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha ,$$

si annulla con $\frac{1}{n}$ ed altrettanto ha luogo dell'aggregato

$$\pm \left[\rho_{t+1} - \rho_{t+2} + \rho_{t+3} - \ldots \pm (-1)^n \rho'_n \right] ,$$

nel quale vanno presi i segni superiori od inferiori, e che in valore assoluto è più piccolo di ρ_{t+1}.

Consideriamo adesso l'integrale

$$\int_0^c \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha = \int_0^c \left(\varphi(\alpha) - \varphi^{(c)} \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha + \varphi(c) \int_0^c \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, d\alpha \right).$$

La funzione $\varphi(\alpha) - \varphi(c)$ varia da $-\varphi(c)$ a 0, non è quindi mai negativa nè mai crescente, di più è sempre piccolissima nel tratto $0\,c$, perciò la espressione

$$K = \int_0^c \Big(\varphi(\alpha)-\varphi(c)\Big)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha = \left(\int_0^{\frac{\pi}{h}} + \int_{\frac{\pi}{h}}^{2\frac{\pi}{h}} + \ldots + \int_{l\frac{\pi}{h}}^{c}\right)\Big(\varphi(\alpha)-\varphi(c)\Big)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha,$$

la quale non è minore di zero ed è formata, se mai, da termini alternativamente positivi e negativi, non è maggiore della quantità

$$\rho_0\Big(-\varphi(c)\Big)-\rho_1\Big(\varphi\Big(\frac{2\pi}{h}\Big)-\varphi(c)\Big)+\rho_2\Big(\varphi\Big(\frac{2\pi}{h}\Big)-\varphi(c)\Big)-\ldots+\rho_{2v}\Big(\varphi\Big(\frac{2v\pi}{h}\Big)-\varphi(c)\Big) =$$

$$-\rho_0\varphi(c)-(\rho_1-\rho_2)\Big(\varphi\Big(\frac{2\pi}{h}\Big)-\varphi(c)\Big)-(\rho_3-\rho_4)\Big(\varphi\Big(\frac{3\pi}{h}\Big)-\varphi(c)\Big)-\ldots-(\rho_{2v-1}-\rho_{2v})\Big(\varphi\Big(\frac{2v\pi}{h}\Big)-\varphi(c)\Big),$$

essendo $2v$ il massimo numero pari contenuto nel quoto $\dfrac{c}{\frac{\pi}{h}}$.

Di conseguenza, osservando che $\rho_0 > \dfrac{\pi}{2}$, si ha:

$$K \leq -\frac{\pi}{2}\varphi(c) - \Big[(\rho_1-\rho_2)+\ldots+(\rho_{2v-1}-\rho_{2v})\Big]\,l,$$

ove l è un valore che non eccede i limiti tra i quali è compresa la funzione $\varphi(x)-\varphi(c)$ nel tratto $0\,c$ e che è quindi arbitrariamente piccolo. Il segno di eguaglianza vale pel caso che la funzione contemplata è costante nel tratto $0\,c$.

La somma

$$\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \ldots - \rho_{2v}$$

è finita all'annullarsi del quoto $\dfrac{1}{n}$, mentre le espressioni

$$\varphi(c)\int_0^c \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha, \qquad \frac{\pi}{2}\varphi(c)$$

sono arbitrariamente piccole, l'asserto è quindi vero.

È degno di nota che la quantità b, la quale non è mai maggiore di $\dfrac{\pi}{2}$, può variare da funzione a funzione. La dimostrazione precedente richiede però che il suo limite inferiore sia diverso dallo zero.

Il teorema ora dimostrato regge anche se la funzione qualsivoglia $f(x)$ della varietà data assume valori negativi, mentre non cresce mai nel tratto $0b$ ad essa corrispondente, e si può assegnare una quantità $M>0$ per modo, che sia $f(x)<M$, astrazion fatta dal segno, qualunque sia la funzione che si considera. Le funzioni contemplate debbono esser anche egualmente continue. Infatti, si può sempre determinare

una costante positiva per modo, che la somma $c + f(x)$ rappresenti una funzione positiva nè mai crescente nel tratto $0b$. In tale ipotesi abbiamo

$$\lim_{n=\infty} \int_0^b \Big(c + f(\beta)\Big) \frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen} \beta} d\beta = \frac{\pi}{2}\Big(c + f(0)\Big),$$

mentre

$$\lim_{n=\infty} \int_0^b c \frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen} \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} c,$$

l'asserto è dunque vero.

Se poi la funzione qualsivoglia $f(x)$ dell'insieme dato fosse crescente nel segmento $0b$ basterebbe considerare la funzione $-f(x)$ ed applicare ad essa il teorema che precede.

Laonde:

L'integrale

$$\int_0^b f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} d\alpha \quad \left(h = 2n + 1, \quad 0 < b \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

tende uniformemente al valore $f(0)$ all' annullarsi di $\frac{1}{n}$, essendo $f(x)$ una funzione qualsivoglia di una varietà di funzioni egualmente continue, ciascuna delle quali non è mai crescente oppure mai decrescente nel segmento $0b$, nè supera mai un valore assegnabile M, fatta astrazione dal segno. Il tratto $0b$ non è di necessità lo stesso per ciascuna delle funzioni considerate, il suo limite inferiore è però diverso da zero.

3. La serie di Fourier relativa ad una funzione finita $f(x)$, periodica secondo 2π e continua nel tratto $\overline{-\pi+0}\ \overline{\pi-0}$ nè mai decrescente oppure crescente nel medesimo, converge in egual grado nel segmento $\overline{-\pi+\eta}\ \overline{\pi-\eta}$ $(\eta > 0)$, essendo la quantità η di quella piccolezza che si vuole.

Ed invero, si ha

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha \left(\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos n(\alpha - x)\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(\alpha - x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - x)} d\alpha.$$

Se facciamo $\alpha - x = 2\beta$, otterremo

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}}\right) f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta =$$

$$u + v.$$

Ciò posto, considero l'integrale v. Ammesso che la quantità x non ecceda i limiti $\overline{-\pi+\eta}$, $\overline{\pi-\eta}$, supponiamo prima che si abbia

$$\frac{\pi-\eta}{2} \geq \frac{x}{2} \geq 0,$$

ossia

$$\frac{\eta}{2} \leq \frac{\pi-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

In questa ipotesi il simbolo $\varphi(\beta) = f(x+2\beta)$ rappresenta una varietà di funzioni le quali soddisfanno alle condizioni richieste nell' ultimo teorema del paragrafo precedente. L'intervallo in cui si considera la funzione $\varphi(\beta) = f(x+2\beta)$ ha per estremi i punti 0 e $\frac{\pi-x}{2}$, ed il limite inferiore della grandezza $\frac{\pi-x}{2}$ è eguale ad $\frac{\eta}{2}$. Di conseguenza:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta = \frac{1}{2}f(x),$$

qualunque sia la quantità x nell'intervallo indicato (1).

Stando sempre la variabile x nei limiti accennati, abbiamo

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0} f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+x}{2}}\right) f(x-2\beta)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta,$$

(1) A dir il vero la funzione $\varphi(\beta)$ non è di necessità continua nel tratto $\overline{\frac{\pi-x}{2} - \varepsilon\ \frac{\pi-x}{2}}$, ε essendo una quantità arbitrariamente piccola, ad onta di ciò l'ultima eguaglianza è vera, la qual cosa facilmente si avverte.

e facendo nel secondo integrale dell'ultimo membro $\beta = \pi - \beta_1$, si ottiene

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2\beta)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}d\beta\,\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x-2\pi+2\beta)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta.$$

Ora,

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x-2\pi+2\beta)\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}d\beta = \int_{\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2\pi+2\beta)\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta\ (^1),$$

e perciò:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2\pi+2\beta)\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta = 0,$$

quindi:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0} f(x+2\beta)\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta = \tfrac{1}{2}f(x).$$

Poniamo adesso che si abbia $0 \geq x \geq -\pi+\eta$ ovvero $\frac{\pi}{2} \geq \frac{x+\pi}{2} \geq \frac{\eta}{2}$. In tale ipotesi si avverte tosto che l'integrale u tende al valore $\frac{1}{2}f(x)$ all'annullarsi del quoziente $\frac{1}{n}$, quale si sia x. L'integrale v poi può spezzarsi nei due

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\beta)\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta.$$

(1) La funzione $f(x-2\pi+2\beta)$ non è necessariamente continua nel segmento $-\pi\ \overline{-\pi+\varepsilon}$.

Il secondo integrale assume la forma

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+x}{2}} f(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta\,,$$

quando si faccia $\beta=\pi-\beta_1$, si annulla quindi con $\frac{1}{n}$, mentre

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta = \tfrac{1}{2}\,f(x)\,,$$

qualunque sia x nei limiti indicati.

L'asserto è dunque dimostrato.

La serie di Fourier relativa ad una funzione periodica secondo 2π, continua e finita nel tratto $+0\ \overline{2\pi-0}$ nè mai crescente oppure decrescente in esso, converge in egual grado nell'intervallo $\overline{\pi-\eta}\ \overline{\pi+\eta}$ $(\eta>0)$.

Infatti,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(\alpha-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{2\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{x}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{2\pi-x}{2}}\right) f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{x}{2}} f(x-2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta.$$

Se supponiamo che il punto x cada nell'intervallo $\overline{\pi-\eta\ \pi}$, il primo integrale convergerà, quale si sia il punto considerato, al valore $\frac{1}{2}f(x)$. Il secondo può spezzarsi nei due

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi-x}{2}}\right) f(x+2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta\,,$$

dei quali il primo converge ad $\frac{1}{2}f(x)$ all'annullarsi del quoto n^{-1}. L'altro può presentarsi sotto all'aspetto

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\operatorname{sen} h\beta}{\operatorname{sen}\beta}\,d\beta\,,$$

ed è quindi nullo con $\frac{1}{n}$.

In modo analogo si ragionerebbe se il punto contemplato cadesse nel segmento $\overline{\pi\ \pi+\eta}$.

4. La serie di Fourier relativa ad una funzione $f(x)$ periodica secondo 2π ovunque continua e scevra da infiniti massimi e minimi converge in egual grado.

Consideriamo prima il tratto $-\pi+\pi$ il quale può per ipotesi, dividersi negli intervalli $x_0\,(=-\pi)\ x_1,\ x_1\ x_2,\ \ldots,\ x_{\tau-1}\ x_\tau\ (=\pi)$ per modo, che in ognuno dei medesimi la funzione $f(x)$ non sia crescente e decrescente. Il numero τ sia poi il minimo che soddisfa alla condizione accennata.

Ciò posto, è chiaro che si potranno assegnare tante funzioni quante si vogliono mai decrescenti le quali aggiunte alla data dieno una funzione che non è mai decrescente nel segmento $-\pi+\pi$. Ammesso che la $f(x)$ non decresca nell'intervallo $x_0\ x_1$, una funzione della natura voluta potrebbe costruirsi nel modo che segue.

Sia $\varphi(x)$ una funzione eguale a $-f(x_1)$ nel tratto $x_0\ x_1$ ed a $-f(x)$ nel segmento $x_1\ x_2$. Nel terzo intervallo $x_2\ x_3$ sia poi la $\varphi(x)$ di nuovo costante ed eguale a $-f(x_2)$, nel quarto poi abbia il valore $-f(x)+\big(f(x_3)-f(x_2)\big)$, e così via.

La funzione $\varphi(x)+f(x)$ non è mai decrescente nel tratto $-\pi+\pi$ ed altrettanto ha luogo dell'altra $\varphi(x)$. La serie di Fourier relativa alla funzione $\varphi(x)+f(x)$ converge quindi in egual grado nel segmento $\overline{-\pi+\eta}\ \overline{\pi-\eta}$, e la stessa cosa si verifica con la serie omonima corrispondente alla funzione $\varphi(x)$ mai decrescente nel tratto $-\pi+\pi$. Dunque anche la serie di Fourier relativa alla $f(x)$ converge in egual grado nel segmento $\overline{-\pi+\eta}\ \overline{\pi-\eta}$.

Se si aggiunge alla $\varphi(x)$ una funzione sempre crescente $\theta(x)$, si otterrà la espressione $\varphi(x)+\theta(x)$ la quale sommata all'altra $f(x)$ dà origine ad una funzione sempre crescente nel tratto $-\pi+\pi$.

Trasformando ora la $f(x)$ in una funzione sempre crescente nel segmento $\overline{-\pi+\eta}\ \overline{\pi-\eta}$, si avverte tosto che la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\Sigma_1^n \int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\,(\alpha-x)\,d\alpha$$

converge uniformemente anche nel medesimo. Il teorema è quindi dimostrato.

Se $f(x)$ è una funzione qualsivoglia appartenente ad una varietà di funzioni periodiche secondo 2π, uniformemente continue e tali, che si possa assegnare un numero m per modo, che nessuna delle medesime muti più di m volte il suo andamento nell'intervallo $0\,2\pi$ (1), la espressione

$$\frac{1}{\pi}\Sigma_t^n \int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\,(\alpha-x)\,d\alpha$$

si annulla in egual grado con $\frac{1}{t}$, quando si possa assegnare una quantità M (>0) in guisa, che nessuna funzione dell'insieme dato raggiunga un valore maggiore della medesima, fatta astrazione dal segno.

Trasformo la funzione qualsivoglia $f(x)$ del nostro insieme per mezzo della funzione mai decrescente $\varphi(x)$ nel tratto $-\pi+\pi$ in un'altra $l(x)$ pure mai decrescente nell'intervallo indicato giovandomi del metodo seguito or ora. È subito veduto che il sistema formato dalle funzioni $\varphi(x)$ è uniformemente continuo nella parte $-\pi+\pi$ e di conseguenza anche la varietà $l(x)$. Operando poi in modo analogo nel tratto $0\ 2\pi$ si scorge subito che la proposizione enunciata è vera.

V.

1. Ora possiamo illustrare con un esempio le nostre ricerche sulle serie trigonometriche a due variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione doppiamente periodica secondo 2π ed ovunque continua. Ammetto poi che si possa assegnare un numero m per modo, che la espressione $f(x, y)$ non muti andamento più di m volte nel tratto $0\,2\pi$, quando si consideri nella sua dipendenza da x, qualunque sia y. Una proprietà analoga abbia luogo rispetto alla variabile y.

Ciò posto, ha luogo il teorema:

La funzione $f(x, y)$ è esprimibile in egual grado per serie doppia trigonometrica della specie A.

(1) Una funzione $f(x)$ ha lo stesso andamento nel tratto ab, quando in esso non è crescente e decrescente.

Ed invero, la funzione (¹).

$$L(x,y) =$$

$$F(x,y) - \frac{y}{2\pi}\gamma(x) - \frac{x}{2\pi}\theta(y) + \frac{y}{2}\gamma_1(x) + \frac{x}{2}\theta_1(y) + \frac{xy}{4\pi^2}(C - \pi C_1 - \pi K + \pi^2 L) +$$

$$\frac{y^2}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C_1 - \pi L}{2\pi}\pi + \frac{L}{4\pi}x^2 - \gamma_1(x)\right)dx + \frac{x^2}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{K - \pi L}{2\pi}y + \frac{L}{4\pi}y^2 - \theta_1(y)\right)dy$$

$$- {}'B_0^{(0)} - \sum_1^s \frac{{}'B_0^{(s)}}{s^2} - \sum_1^s \frac{{}'B_s^{(0)}}{s^2}$$

può rendersi doppiamente periodica secondo 2π sottraendo dalla medesima la espressione

$$r(x,y) =$$

$$\frac{L}{16\pi^2}x^2y^2 - \frac{y^2}{2}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{C_1 - \pi L}{2\pi}x + \frac{L}{4\pi}x^2 - \gamma_1(x)\right) - \frac{x^2}{2}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K - \pi L}{2\pi}y + \frac{L}{4\pi}y^2 - \theta_1(y)\right) +$$

$$\frac{y^2}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C_1 - \pi L}{2\pi}x + \frac{L}{4\pi}x^2 - \gamma_1(x)\right)dx + \frac{x^2}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{K - \pi L}{2\pi}y + \frac{L}{4\pi}y^2 - \theta_1(y)\right)dy,$$

che può porsi nell'aspetto

$$B_0^{(0)}\frac{x^2y^2}{4} - \frac{x^2}{2}\sum_1^t \frac{B_0^{(t)}}{t^2} - \frac{y^2}{2} - \sum_1^t B_t^{(0)}\frac{1}{t^2}.$$

Occorre dimostrare da prima che ognuna delle due serie

$$\sum_1^t B_t^{(0)}, \qquad \sum_1^t B_0^{(t)},$$

converge in egual grado.

Infatti, abbiamo

$$\gamma_1(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^x\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx^2,$$

mentre

$$\frac{C_1 - \pi L}{2\pi}x + \frac{L}{4\pi}x^2 - \gamma_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C_1 - \pi L}{2\pi}\alpha + \frac{L}{4\pi}\alpha^2 - \gamma_1(\alpha)\right)d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_1^n\int_0^{2\pi}\left(\frac{C_1 - \pi L}{2\pi}\alpha + \frac{L}{4\pi}\alpha^2 - \gamma_1(\alpha)\right)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha.$$

(¹) V. il N.° IV. della mia Memoria.

D'altra parte,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C_1-\pi L}{2\pi}\alpha+\frac{L}{4\pi}\alpha^2-\gamma_1(\alpha)\right)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha=$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\,d\beta\right)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha.$$

Basta quindi dimostrare che la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\,d\beta\right)d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_1^n\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\,d\beta\right)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha$$

converge in egual grado.

Ed invero, si ha

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,y)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_1^n\int_0^{2\pi}f(\alpha,y)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha,$$

quali si sieno i valori delle quantità x ed y, cioè uniformemente per qualsivoglia punto del piano, in virtù delle ipotesi fatte circa alla funzione $f(x,y)$ e dell'ultimo teorema del N° precedente.

Di conseguenza abbiamo in egual grado:

$$\int_0^{2\pi}f(x,\beta)\,d\beta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta+\frac{1}{\pi}\sum_1^n\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha\,d\beta,$$

e la serie

$$\sum_1^t B_t^{(0)}$$

converge uniformemente.

Nello stesso modo si dimostra la convergenza in egual grado dell'altra serie

$$\sum_1^t B_0^{(t)}.$$

Adunque, nel caso da noi contemplato esiste una funzione $L(x,y)$ ovunque continua, la quale può rendersi doppiamente periodica secondo 2π quando si sottragga dalla medesima una espressione della forma

$$B_0^{(0)}\frac{x^2y^2}{4}-\frac{x^2}{2}\sum_1^t\frac{B_0^{(t)}}{t^2}-\frac{y^2}{2}\sum_1^t\frac{B_t^{(0)}}{t^2},$$

mentre ciascuna delle due serie

$$\sum_1^t B_0^{(t)}, \quad \sum_1^t B_t^{(0)}$$

converge in egual grado.

Si ha altresì

$$\int_0^{2\pi} \Big(L(u,v) - r(u,v) \Big) du = \int_0^{2\pi} \Big(L(u,v) - r(u,v) \Big) dv = 0. \ (^1)$$

È facile poi vedere che l'integrale

$$-\frac{m^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(L(u,v) - r(u,v) \Big) \cos m(u-x) \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} \right] du\, dv$$

converge uniformemente ad un valore all'annullarsi di $\frac{1}{n}$, qualunque sia l'intero m.

Infatti,

$$-m^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (L-r) \cos m(u-x) \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} \right] du\, dv =$$

$$-m^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (q-r) \cos m(u-x) \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} \right] du\, dv =$$

$$-m^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (q-r)''_{v_2} \cos m(u-x) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} du\, dv =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(u,v) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u,\beta)\, d\beta \right) \cos m(u-x) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} du\, dv.$$

(1) Al par. 1 del N.° III. va aggiunta la condizione $\int_0^{2\pi} (F-\theta)\, du = \int_0^{2\pi} (F-\theta)\, dv = 0$. La nota posta a pie' di pagina e che si riferisce al par. 2 del N.° III non è del caso.

Ora,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,v) + \frac{1}{\pi}\sum_1^n \int_0^{2\pi} f(x,v)\cos n\,(v-y)\,dv =$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(x,v)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\,dv\,,$$

quale si sia il punto (x,y) considerato. Laonde:

$$\int_0^{2\pi} f(u,y)\cos m\,(u-x)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\,(u-x)\,du\left(\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(u,v)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\,dv\right).$$

Questa eguaglianza può porsi anche nell'aspetto

$$\int_0^{2\pi} f(u,y)\cos m(u-x)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos m\,(u-x)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\,dv\,du +$$

$$\int_0^{2\pi}\varepsilon\,(u,y,n)\,\cos m\,(u-x)\,du\,,$$

essendo la quantità ε uniformemente nulla insieme ad $\frac{1}{n}$. L'asserto è quindi vero.

Nello stesso modo si dimostra che l'integrale

$$-\frac{n^2}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{L}-r)\cos n\,(v-y)\frac{d^2}{du^2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\,du\,dv$$

è infinitesimo in egual grado con $\frac{1}{m.}$, qualunque sia n.

È chiaro poi che si ha per ogni punto particolare del piano

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial y^2}\right) = f(x,y)\,.$$

Adunque, per le funzioni da noi studiate sono soddisfatte tutte le condizioni indicate al par. 1 del N° III. Noi possiamo di conseguenza costruire una serie, che in questo caso è quella di Fourier,

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\,du\,dv + \frac{1}{2\pi^2}\sum_1^n \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos n(v-y)\,dv +$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_1^m \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos m(u-x)\,du + \frac{1}{\pi^2}\sum_1^n\sum_1^m \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos m(u-x)\cos n(v-y)\,du\,dv,$$

la quale è della specie voluta e rappresenta la data funzione in ciascun punto del piano in cui converge.

Si vede poi facilmente che l'ultima serie rappresenta in egual grado la funzione $f(x,y)$.

Infatti, il convergere o meno della medesima dipende dal modo di comportarsi dell'integrale

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_b^c\int_{b_1}^{c_1} \mathrm{L}(u,v)\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right]\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right]\lambda(u)\rho(v)\,du\,dv,$$

quando in esso si mandino successivamente all'infinito gli interi m ed n in quell'ordine che si vuole.

Nella nostra ipotesi circa alla funzione $f(x,y)$ però la somma dell'aggregato

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\,du\,dv + \frac{1}{2\pi^2}\sum_1^n \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos t(v-y)\,du\,dv +$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_1^n \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos t(u-x)\,du\,dv$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\sum_1^n\sum_1^m \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\cos s(u-x)\cos t(v-y)\,du\,dv$$

può presentarsi anche nell'aspetto

$$K_{n,m} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u,v) \frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-x)} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} du\, dv .$$

D'altra parte,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u,v) \frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-x)} du = f(x,v) + \eta$$

essendo η una quantità che si annulla con $\frac{1}{m}$, qualunque sia il valore assegnato alla quantità x e qualunque sia v. Laonde:

$$\lim_{m=\infty} K_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x,v) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} dv ,$$

e

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} K_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x,v) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} dv = f(x,y) ,$$

quale si sia il punto che si considera.

Nello stesso modo si dimostra che

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} K_{n,m} = f(x,y) ,$$

essendo le quantità x ed y qualsivoglia.

NOTE

[1] Dico che la quantità z è una funzione delle due variabili x ed y, quando si possa assegnare un numero limitato od illimitato di coppie di valori per x ed y a ciascuna delle quali corrisponda un valore per z.

Con la voce valore intendo indicare una grandezza assegnabile. Riferendosi quindi ad una terna di assi ortogonali X, Y, Z (quest' ultimo verticale), ed imaginando rappresentata la dipendenza della quantità z dalle grandezze x ed y nel

solito modo, ogni coppia di valori x ed y, per la quale esiste la funzione, determina un punto a distanza finita nel piano $z = 0$ ed il valore di z è rappresentato da un segmento di cui amendue gli estremi sono assegnabili.

Se fissassi un numero limitato di punti nel piano $z = 0$ ed in ciascuno dei medesimi inalzassi una normale di lunghezza arbitraria, otterrei una funzione della x e della y. Il simbolo

$$7 + \sum_{1}^{n} 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \;(x^2 + y^2)$$

rappresenta una funzione che ha significato soltanto nella origine, ove assume il valore 7.

[2] Questa asserzione è conseguenza delle ricerche contenute nei par. 9 e 12 della Memoria di Riemann. Infatti, al par. 12 si dimostra che il termine generale della serie di Fourier relativa ad una tale funzione si annulla con $\frac{1}{n}$, qualunque sia il punto contemplato. Per l'ultima ricerca dell'art. 9 e pel teorema di Dirichlet ne consegue poi la convergenza della medesima in ciascun punto nel quale la funzione considerata è finita. Dalle stesse ricerche si può dedurre anche il seguente teorema:

Se la funzione $f(x)$ scevra da infiniti massimi e minimi nel tratto 02π và all'infinito nel punto a in guisa, che il simbolo

$$\int_{+0}^{\eta} \Big(f(a + t) + f(a - t) \Big) \cos nt \, dt \qquad (\eta > 0)$$

abbia significato, mentre

$$\lim_{n=\infty} \int_{+0}^{\eta} \Big(f(a + t) + f(a - t) \Big) \cos nt \, dt = 0 \,,$$

e se la espressione

$$f(a + t)\, t - f(a - t)\, t$$

si annulla con t e non è dotata di un numero illimitato di massimi e minimi in un intervallo aderente al punto $+0$, la serie di Fourier relativa alla medesima converge in ogni punto di ascissa x in cui la data funzione si mantiene finita, e la sua somma in esso è $\frac{1}{2} \Big(f(x + 0) + f(x - 0) \Big)$.

[3] A chiarire questo asserto costruisco nel modo che segue una funzione $f(x)$ sempre crescente nell'intervallo 0 1 e discontinua in una varietà di punti ovunque compatta del medesimo.

Essendo $\varphi(x)$ una funzione ognora crescente e continua nel segmento 0 1, considero il sistema di funzioni $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ tale, che si abbia

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \quad 0 < x \leq \tfrac{1}{2}, \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2} < x \leq 1, \ 1 < \sigma;$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x), \ 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \ \varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \frac{1}{3\sigma^3}, \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \ \varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \frac{2}{3\sigma^3}, \frac{2}{3} < x \leq 1;$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(x), \ 0 \leq x \leq \frac{1}{5}, \ \varphi_3(x) = \varphi_2(x) + \frac{1}{5\sigma^5}, \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{5}, \ \varphi_3(x) = \varphi_2(x) + \frac{2}{5\sigma^5}, \frac{2}{5} < x \leq \frac{3}{5},$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(x) + \frac{3}{5\sigma^5}, \frac{3}{5} < x \leq \frac{4}{5}, \ \varphi_3(x) = \varphi_2(x) + \frac{4}{5\sigma^5}, \frac{4}{5} < x \leq 1;$$

e così via indefinitamente.

Diremo poi che la funzione $\varphi_h(x)$ appartiene al numero K_h, se quest'ultimo occupa il posto h° nella serie successiva dei numeri primi, quando si faccia astrazione dall'unitá.

Ciascuna delle funzioni $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ è crescente nel segmento 0 1 ed in particolare è in esso continua, tolto un numero limitato di punti. Il numero delle discontinuità della funzione $\varphi_s(x)$ va all'infinito con s, e la distanza delle ascisse di due punti successivi qualsivoglia in ognuno dei quali essa è discontinua si annulla con $\frac{1}{s}$.

Ciò posto, se x_1 è un punto del tratto 0 1, dico che la quantità $\varphi_s(x_1)$ tende ad un limite mentre il quoto $\frac{1}{s}$ va allo zero.

Infatti, diciamo r_1 il primo numero della serie dei numeri primi tale, che *almeno* l'elemento di ascissa $\frac{1}{r_1}$ cada nel segmento $0\overline{x_1 - 0}$. In questa ipotesi soltanto i punti

$$\frac{1}{r_s}, \frac{2}{r_s}, \frac{3}{r_s}, \ldots\ldots, \frac{t_s}{r_s} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

apparterranno al tratto $0\overline{x_1 - 0}$, essendo $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots$ dei numeri primi successivi e t_s il numero che indica quanti punti le cui ascisse sono della forma $\frac{p}{r_s}$ cadono nel segmento accennato. È chiaro poi che il quoziente $\frac{1}{t_s}$ si annulla con l'altro $\frac{1}{s}$.

Detta $\varphi_{l_s}(x)$ la funzione relativa al numero r_s $(s = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$, ciascuno dei numeri $l_1, l_2, l_3, \ldots$ supererà di una unità il suo precedente, e si avrà

$$\varphi_{l_1}(x_1) = \varphi(x_1) + \frac{t_1}{r_1 \sigma^{r_1}},$$

$$\varphi_{l_2}(x_1) = \varphi_{l_1}(x_1) + \frac{t_2}{r_2 \sigma^{r_2}} = \varphi(x_1) + \frac{t_1}{r_1 \sigma^{r_1}} + \frac{t_2}{r_2 \sigma^{r_2}},$$

. . . . . .

$$\varphi_{l_n}(x_1) = \varphi(x_1) + \frac{t_1}{r_1 \sigma^{r_1}} + \frac{t_2}{r_2 \sigma^{r_2}} + \ldots\ldots + \frac{t_{n-1}}{r_{n-1} \sigma^{r_{n-1}}} + \frac{t_n}{r_n \sigma^{r_n}},$$

. . . . . .

Di conseguenza:

$$\lim \varphi_{l_n}(x_1) = \varphi(x_1) + \mathrm{L} \quad (l_n = \infty),$$

essendo

$$\mathrm{L} = \frac{t_1}{r_1 \sigma^{r_1}} + \frac{t_2}{r_2 \sigma^{r_2}} + \ldots + \frac{t_n}{r_n \sigma^{r_n}} + \ldots .$$

Adunque, esiste una funzione $f(x)$ tale, che, detto x_1 un punto particolare dell'intervallo 0 1, la quantità $\varphi_s(x_1)$ tende al limite $f(x_1) = \varphi(x_1) + \mathrm{L}$ all'annullarsi del quoto $\frac{1}{s}$. Si avverte poi di leggieri che la funzione $\varphi_{l_s}(x)$ converge uniformemente all'altra $f(x)$ mentre la quantità s va all'infinito, perchè la differenza $\varphi_{l_{s+d}}(x) - \varphi_{l_s}(x)$ è minore di

$$\frac{1}{\sigma^{r_s}} + \frac{1}{\sigma^{r_{s+1}}} + \ldots ,$$

qualunque sia l'intero d e qualunque sia il valore della variabile x, come facilmente si avverte.

La funzione $f(x)$ è ognora crescente nel tratto 0 1, finita e discontinua soltanto nella varietà ovunque compatta del medesimo formata dai punti le cui ascisse possono mettersi nella forma $\frac{p}{q}$, p e q non avendo alcun divisore comune e q essendo un numero primo. In ciascun punto di discontinuità si ha

$$f(x-0) = f(x), \quad f(x) + \frac{1}{q\sigma^q} = f(x+0).$$

Ed invero,

$$f(x_1) = \varphi(x_1) + \frac{t_1}{r_1 \sigma^{r_1}} + \frac{t_2}{r_2 \sigma^{r_2}} + \ldots ,$$

$$f(x_2) = \varphi(x_2) + \frac{u_1}{v_1 \sigma^{v_1}} + \frac{u_2}{v_2 \sigma^{v_2}} + \ldots ,$$

mentre i numeri $v_1, v_2, \ldots$; $u_1, u_2, \ldots$ hanno rispetto alla quantità x_2 significato analogo a quello degli altri $r_1, r_2, \ldots$; $t_1, t_2, \ldots$ rispetto alla grandezza x_1.

Ora, se x_2 è maggiore di x_1, sarà $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, e la somma della seconda serie potrà porsi nella forma $\mathrm{L} + m$ $(m > 0)$, essendo L la somma della prima. La funzione $f(x)$ è quindi sempre crescente nel nostro intervallo.

Sia adesso x' un punto in cui ognuna delle funzioni $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ è continua, cioè un punto la cui ascissa non può presentarsi nella forma $\frac{p}{q}$, non avendo i numeri p e q un divisore comune e q essendo primo. La serie che va aggiunta alla espressione $\varphi(x' + \varepsilon)$ per avere il valore $f(x' + \varepsilon)$ differisce tanto poco quanto si vuole da quella che va aggiunta all'altra $\varphi(x')$ per ottenere la grandezza $f(x')$

da valore opportuno della quantità ε. Altrettanto può dirsi delle due serie corrispondenti ai punti x' ed $x' - \varepsilon$, e poichè la funzione $\varphi(x)$ è continua nel punto x' lo è altresì l'altra $f(x)$. Adunque, la $f(x)$ è continua in ogni punto del tratto 0 1 nel quale la espressione $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ è in particolare continua.

Si avverte poi con lo stesso metodo che in un punto di ascissa $\frac{p}{q}$, i numeri p e q non avendo fattori comuni e q essendo primo, si ha

$$\lim_{\varepsilon = +0} f\left(x - \varepsilon\right) = f(x), \qquad \lim_{\varepsilon = +0} f\left(x + \varepsilon\right) = f(x) + \frac{1}{q\sigma^q}.$$

[4] Al par. 2 del N.° II della mia Memoria dimostro il teorema:

I L'espressione $\alpha^2 \varphi(\alpha)$ si annulla nel punto (x, y) con α, se in esso la serie α' è convergente.

Questa proposizione, la quale non è che un semplice corollario del teorema che la precede, poichè, se $\varphi(\alpha)$ tende ad un limite all'annullarsi di α, l'espressione $\alpha^2 \varphi(\alpha)$ è infinitesima con α, va surrogata con la seguente ben più generale:

II. La quantità $\alpha^2 \varphi(\alpha)$ svanisce in egual grado con α.

Rammentando la dimostrazione del teorema I, basta far vedere che l'aggregato

$$\alpha^2 \sum_0^s Q_s \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2$$

si annulla con α per porre in sodo la proposizione II.

Ora,

$$Q_s = \sum_0^{n_1} t\, B_s^{(t)} \left(\frac{\operatorname{sen} t\alpha}{t\alpha}\right)^2 = \sum_0^{n_1} t\, B_s^{(t)} + \eta_s(\alpha),$$

la quantità $\eta_s(\alpha)$ essendo di quella piccolezza che si vuole insieme ad α per ogni valore particolare del numero n_1, qualunque sia s e qualunque sia il punto contemplato, perchè le quantità $a_{\pm\mu}^{(\pm\nu)}$ si annullano con $\frac{1}{\mu + \nu}$.

Di conseguenza:

$$\sum_0^s Q_s \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2 = \sum_0^s \left(\sum_0^{n_1} t\, B_s^{(t)}\right) \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2 + \sum_1^s \eta_s(\alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2 + \eta_0(\alpha),$$

ed

$$\alpha^2 \sum_0^s Q_s \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2 = \alpha^2 \sum_0^s \left(\sum_0^{n_1} t\, B_s^{(t)}\right) \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2 + \sum_1^s \eta_s(\alpha) \frac{\operatorname{sen}^2 s\alpha}{s^2} + \alpha^2 \eta_0(\alpha).$$

I due ultimi termini del secondo membro dell'ultima eguaglianza si annullano con α, ed altrettanto ha luogo della quantità

$$\alpha \sum_0^s \left(\sum_0^{n_1} t\, B_s^{(t)}\right) \left(\frac{\operatorname{sen} s\alpha}{s\alpha}\right)^2$$

per ogni valor particolare di n_1, perchè la espressione $\sum_0^{n_1} t\, B_s^{(t)}$ è composta di un

numero limitato di termini, ognuno dei quali si annulla con $\frac{1}{s}$, qualunque sia il punto considerato.

5 Al par. 1. del N.° III della mia Memoria enuncio due condizioni necessarie, perchè una funzione $f(x, y)$ sia esprimibile per serie doppia trigonometrica della specie ivi contemplata. La prima di queste condizioni, che a dir il vero è un insieme di condizioni, va modificata in quanto si riferisce alle due serie

$$\sum_0^t B_0^{(t)}, \qquad \sum_0^t B_t^{(0)}.$$

L'ammettere che ognuno di questi aggregati debba convergere in particolare per ogni punto del piano è troppo, basta sapere che il termine generale del primo dei medesimi si annulla per ogni punto speciale di un segmento comunque piccolo della retta $x = 0$ insieme ad $\frac{1}{t}$, mentre si verifica una proprietà analoga rispetto al termine generale del secondo. Amendue poi le serie precedenti devono rappresentare una grandezza in ogni punto del piano in cui il simbolo $f(x, y)$ ha significato.

6 La condizione

$$\int_0^{2\pi} (F - \theta)\, dx = \int_0^{2\pi} (F - \theta)\, dy = 0$$

indicata al par. 1 del N.° III della mia solita Memoria è necessaria per poter fare nel par. successivo

$$F - \theta = \sum_1^\mu \sum_1^\nu \frac{B_\mu^{(\nu)}}{\mu^2 \nu^2}.$$

Nello stesso par. 2 sta scritto

$$\int_{c_1}^{b_1 - 2\pi} \int_{c_1}^{b_1 - 2\pi} (F - \theta) \cos \mu (u - x) \cos \nu (v - y)\, \lambda_1 (u)\, \rho_1 (v)\, du\, dv$$

in luogo di

$$\int_{b_1}^{c_1 - 2\pi} \int_{b_1}^{c_1 - 2\pi} (F - \theta) \cos \mu (u - x) \cos \nu (v - y)\, \lambda_1 (u)\, \rho_1 (v)\, du\, dv,$$

e così pure

$$\sum_0^\mu \sum_0^\nu \frac{B_\mu^{(\nu)}}{\mu^2 \nu^2}$$

invece di

$$\sum_1^\mu \sum_1^\nu \frac{B_\mu^{(\nu)}}{\mu^2 \nu^2}.$$

L'asserzione: Dalle ricerche del N° successivo risulterà poi che essa è ovunque eguale ad $F - \theta$, contenuta nello stesso par. 2, non è del caso.

Riemann, riferendosi a quanto disse poco prima, osserva a pag. 237:

Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es eine trigonometrische Reihe, in welcher die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall, wo sie convergirt, die Function darstellt.

In calce poi alla Memoria di Riemann vi sono tre note all'intento di rendere più facile l'intelligenza di alcuni passi della medesima. La prima tende a chiarire il periodo testè riportato. Io *oserei* però asserire che essa non corrisponde alle idee dell'autore.

Ed invero, ivi si dice:

Da die Function $f(x)$ um 2π periodisch angenommen ist, so muss

$$F(x+2\pi) - F(x) = \varphi(x)$$

die Eigenschaft haben, dass

$$\frac{\varphi(x+\alpha+\beta) - \varphi(x+\alpha-\beta) - \varphi(x-\alpha+\beta) + \varphi(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

unter der im Text gemachten Voraussetzung sich mit α und β der Grenze 0 nähert. Es ist daher $\varphi(x)$ eine lineare Function von x, ...

Rammento ora il teorema:

Se $l(x)$ è una funzione continua nel tratto $\overline{m+0\ n-0}$, mentre in ciascun punto del medesimo

$$\lim_{\alpha=0} \frac{l(x+2\alpha) - 2l(x) + l(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = 0,$$

sarà in esso:

$$l(x) = Cx + C_1,$$

essendo C e C_1 due costanti.

Ciò posto, perchè si abbia

$$\varphi(x) = Cx + C',$$

la funzione $f(x)$ dovrebbe esistere in ciascun punto del tratto $\overline{a\ a+2\pi}$.

Infatti, se la $f(x)$ non esistesse soltanto in un numero limitato di punti $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_l$ del segmento accennato, la $\varphi(x)$ sarebbe della forma $E_0 x + F_0$, $E_1 x + F_1, \ldots, E_l x + F_l$ rispettivamente in ognuno degli intervalli $\overline{a\,x_1}, \overline{x_1\,x_2}, \ldots, \overline{x_l\ a+2\pi}$, mentre $E_0 x_1 + F_0 = E_1 x_1 + F_1$, $E_1 x_2 + F_1 = E_2 x_2 + F_2, \ldots$, nè si avrebbe di necessità.

$$E_0 = E_1,\ E_1 = E_2, \ldots;\ F_0 = F_1,\ F_1 = F_2, \ldots.$$

Adunque, il ragionamento fatto alla Nota 1 suppone che il simbolo $f(x)$ abbia significato in ciascun punto del tratto $0\ 2\pi$, la quale ipotesi, lo ripeto, non mi sembra fosse nell'intendimento di Riemann, anzi io la reputo del tutto ad esso opposta.

Ed invero, Riemann ammette che una funzione $f(x)$ periodica secondo 2π, del resto qualsivoglia, sia esprimibile per serie trigonometrica, quando si abbia

$$f(x) = \sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

in ciascun punto della retta $y = 0$, nel quale il segno $f(x)$ rappresenta una grandezza, mentre altrove la serie è divergente, come mi sembra di aver dimostrato al par. 1 del N.° I di questa Memoria.

Osserva (1) quindi che, se i coefficienti a_n, b_n si annullano con $\frac{1}{n}$, i termini della serie tendono a zero per ogni valore di x, mentre in caso contrario tal fatto non può aver luogo che per singoli valori della variabile.

Divide poi in due parti la ricerca sulla rappresentabilità di una funzione qualsivoglia $f(x)$ per serie trigonometrica, nella prima considera il caso in cui si abbia

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty),$$

nella seconda suppone che ciò non si verifichi. Ora, questa distinzione perderebbe ogni valore non soltanto se si ammettesse che la $f(x)$ esista di necessità in ciascun punto del tratto $0\,2\pi$, ma se ciò dovesse aver luogo solamente per un segmento comunque piccolo dell'asse X. Poichè nella prima parte la condizione

$$\lim \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = 0 \quad (n = \infty)$$

sarebbe inutile, in quanto il non ammetterla soddisfatta escluderebbe a priori la esprimibilità della funzione $f(x)$ nel modo voluto, nella seconda poi sarebbe assurdo il supporre che la quantità $\left(a_n^2 + b_n^2 \right)$ non si annulli con $\frac{1}{n}$ (2).

Ciò posto, Riemann, costruita la funzione

$$F(x) = C + C'x - \frac{A_0}{2} x^2 - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots .$$

dimostra che la sua derivata seconda, ovvero, ciò che torna lo stesso, che il limite del quoto

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

per α evanescente è la $f(x)$ in ciascun punto in cui il segno $f(x)$ ha significato, ossia ove la serie

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

converge. Nulla però asserisce circa al modo di comportarsi del quoto

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

all'annullarsi della quantità α in un punto in cui il simbolo

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

non rappresenta una grandezza.

(1) V. p. 231.

(2) V. la Memoria *Sulla Serie di Fourier*, N° I, a principio.

Adunque, non si deve supporre che la funzione $f(x)$ sia ovunque definita, e di conseguenza non si può fare

$$F(x+2\pi) - F(x) = \varphi(x) = Cx + C'.$$

Un esempio chiarirà quanto ho detto fin quì.

Sia $f(x)$ una funzione periodica secondo 2π definita in una varietà ovunque compatta di punti del segmento pq $(0 < p < q < 2\pi)$ per modo, che non si possa assegnare un tratto di pq in ciascun punto del quale il segno $f(x)$ abbia significato. Per semplicità genero nel modo che segue questa funzione. Pigliata una funzione continua qualsivoglia $\psi(x)$ nel tratto pq, e determinato nel medesimo un insieme di punti ovunque compatto e tale, che si possa scegliere in una parte qualunque del segmento pq un punto che non appartenga alla varietà considerata, do alla $f(x)$ in ogni punto di quest' ultima il valore corrispondente della $\psi(x)$, mentre altrove il segno $f(x)$ non ha senso.

Ciò posto, costruisco la funzione $f_1(x)$ ovunque continua e finita. Questa funzione sia identica all'altra $f(x)$ in ciascun punto in cui quest'ultima esiste, e la differenza

$$f_1(x+2\pi) - f_1(x)$$

non sia mai zero nel tratto $0\,\overline{p-0}$. È chiaro che la $f(x)$ dovrà coincidere con la funzione $\psi(x)$ nel segmento pq, e che si dovrà avere

$$f_1(x+2\pi) = f_1(x) \qquad (p \leq x \leq q).$$

Se supponiamo per semplicità che la $\psi(x)$ sia positiva nel punto p, si potrà operare nel modo che segue affinchè la differenza

$$f_1(x+2\pi) - f_1(x)$$

non raggiunga mai lo zero nell'intervallo $0\,\overline{p-0}$. Sia $f_1(p) = \psi(p)$ il limite superiore della $f_1(x)$ nel segmento $0p$, e questo valore venga raggiunto una sol volta nel medesimo. Sia poi $f_1(2\pi)$ il limite superiore della $f_1(x)$ tra 2π e $\overline{2\pi+p}$, mentre $f_1(2\pi)$ è una grandezza maggiore del limite superiore della $\psi(x)$ nel tratto pq e si ha $f_1(x) < f_1(2\pi)$ $f_1(x) > f_1(2\pi+p)$, $2\pi < x < \overline{2\pi+p}$.

Adunque, la differenza

$$f(x) - f_1(x)$$

è nulla ove il simbolo $f(x)$ ha significato, mentre altrove il segno

$$f(x) - f_1(x)$$

non rappresenta una grandezza.

Se ora ci proponiamo di studiare se la funzione $f(x)$ è esprimibile per serie trigonometrica, avvertiremo tosto che la funzione

$$F(x) = \int_0^x \int_0^x f_1(x)\, dx^2$$

è ovunque continua, e che si ha

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x)$$

in ciascun punto in cui la $f(x)$ esiste, non potendosi però fare

$$F(x+2\pi) - F(x) = Cx + C',$$

essendo

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[F(x+2\pi) - F(x)\right] > 0\,,\quad 0 < x \leq p\,.$$

Io oserei asserire che Riemann non enuncia al N.° I del par. 9 delle condizioni sufficienti affinchè esista la serie di cui si fa parola al N.° II dello stesso par., ma che alle medesime vada aggiunta l'altra che la funzione $F(x)$ possa rendersi periodica secondo 2π togliendole un binomio della forma $Ax^2 + Bx$, ove A e B sono due costanti.

Anche il primo periodo del N.° II riportato al principio di questa Nota non mi sembra del tutto inappuntabile, ma adesso andrebbe, a mio credere, aggiunta la locuzione ove il simbolo $f(x)$ ha significato.

Di questa ultima asserzione mi sono già occupato nella mia Memoria Sulla Serie di Fourier (¹).

Riemann dice a pag. 239:

Aus dieser Untersuchung hat sich also ergeben, dass, wenn die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, dann die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von x nur abhängt von dem Verhalten der Function $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes.

Questa asserzione non mi pare del tutto esatta.

Ed invero, se la $f(x)$ esiste in ciascun punto di un tratto comunque piccolo racchiudente il punto x contemplato, e se sono soddisfatte le condizioni indicate al N.° I del par. 9 della Memoria di Riemann, mentre la $F(x)$ può farsi doppiamente periodica sottraendo dalla medesima un binomio della forma $C'x + \frac{A_0}{2}x^2$, la funzione $F(x)$ è in esso intervallo completamente determinata, fatta astrazione da un addendo della forma $Cx + C'$, pel quale

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_b^c (Ct + C')\,\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-t)}\right]\rho(t)\,dt = 0\,,\quad b < x < c\,,$$

essendo $\rho(t)$ una funzione che nel tratto arbitrariamente piccolo bc si comporta nel modo indicato da Riemann (²).

L'asserzione di Riemann non cesserebbe di esser vera, se la funzione $f(x)$ non esitesse solamente in un gruppo di punti d'ordine assegnabile del tratto comunque piccolo $\overline{x-\varepsilon}\ \overline{x+\varepsilon}$.

(¹) Vedi il T. VI. degli Annali di Brioschi e Cremona, pag. 343.
(²) Vedi Riemann, p. 239.

Infatti, sia $F_1(x)$ un'altra funzione di x ovunque continua tale, che si abbia

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F_1(x+2\alpha) - 2F_1(x) + F_1(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x)$$

per ogni valor particolare della variabile x pel quale il segno $f(x)$ ha significato, e che può rendersi periodica secondo 2π sottraendo dalla medesima una quantità della forma $\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2$. Di più, sia

$$\lim_{\mu=\infty} \mu^2 \int_{b_1}^{c_1} F_1(x) \cos \mu (x-a) \lambda(x) dx = 0,$$

essendo $\lambda(x)$ una funzione continua insieme all'altra $\lambda'(x)$ nel tratto scelto ad arbitrio $b_1 c_1$ e $\lambda(b_1) = \lambda(c_1) = \lambda'(b_1) = \lambda'(c_1) = 0$, mentre la derivata seconda $\lambda''(x)$ è scevra da infiniti massimi e minimi. In tali ipotesi avremo:

$$F_1(x) - \alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(F_1(t) - \alpha t - \beta \frac{t^2}{2} \right) dt + \frac{1}{\pi} \sum_1^r \int_{-\pi}^{+\pi} \left(F_1(t) - \alpha t - \beta \frac{t^2}{2} \right) \cos r(x-t) dt$$

$$= \gamma - \sum_1^r \frac{B_r}{r^2},$$

nello stesso modo che si ha

$$F(x) - C'x - A_0 \frac{x^2}{2} = C - \sum_1^r \frac{A_r}{r^2},$$

mentre ciascuna delle quantità A_r e B_r si annulla con $\frac{1}{r}$, qualunque sia x.

Di conseguenza si avrà uniformemente:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(x+2\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-2\alpha)}{4\alpha} = 0,$$

in ciascun punto dell'asse X, quando si faccia

$$\varphi(x) = F(x) - C'x - \frac{A_0}{2} x^2 - \left(F_1(x) - \alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right),$$

e ciò pel teorema:

Se

$$\lim_{n=\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = 0,$$

sarà uniformemente:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{L(x+2\alpha) - 2L(x) + L(x-2\alpha)}{4\alpha} = 0,$$

essendo

$$L(x) = \sum_1^n \frac{a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx}{n^2} \quad (1).$$

(1) Riemann, p. 234.

D'altra parte, fatta astrazione da un gruppo di punti di ordine finito del segmento $\overline{x-\varepsilon}\ \overline{x+\varepsilon}$, si ha per ipotesi in ciascun punto di quest'ultimo:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(x+2\alpha)-2\varphi(x)+\varphi(x-2\alpha)}{4\alpha^2}=0,$$

e perciò:

$$F(x)-C'x-\frac{A_0}{2}x^2-\left(F_1(x)-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)=H+H'x,\ \overline{x-\varepsilon}\leq x\leq\overline{x+\varepsilon},$$

mentre H ed H' sono due costanti.

Adunque, nel caso che la $f(x)$ esista in ciascun punto del tratticello $\overline{x-\varepsilon}\ \overline{x+\varepsilon}$ o non esista soltanto in un gruppo di punti di ordine assegnabile del medesimo l'asserzione di Riemann è esatta. Se però il simbolo $f(x)$ avesse significato, ad esempio, solamente in un gruppo di punti del primo ordine nel tratto comunque piccolo $\overline{x-\varepsilon}\ \overline{x+\varepsilon}$, non si potrebbe dire, se pur non m'inganno, che la convergenza della serie dipende dal modo di comportarsi della funzione considerata nelle estreme vicinanze del punto x, ma bensì che essa dipende dall'andamento della funzione $F(x)$ in esse vicinanze. L'asserzione di Riemann non avrebbe poi senso, se la funzione data $f(x)$ esistesse nel punto x, nè mai in ognuno degli intervalli $\overline{x-\varepsilon}\ \overline{x-0}$, $\overline{x+0}\ \overline{x+\varepsilon}$.

Al teorema di Riemann si potrebbe sostituire forse quello che risulta dalle considerazioni seguenti, il quale mi sembra più preciso e più generale.

Se si può assegnare una funzione $F(x)$ ovunque continua, la cui derivata seconda è la funzione $f(x)$ periodica secondo 2π, del resto data ad arbitrio, in ciascun punto della retta $y=0$ in cui il simbolo $f(x)$ rappresenta una grandezza, e se la $F(x)$ può rendersi periodica secondo 2π togliendole un binomio della forma $C'x+\frac{A}{2}x^2$, esisterà una serie trigonometrica, la quale, se convergente in un punto in cui il segno $f(x)$ ha significato, rappresenta in esso la data funzione.

Ciò posto, se questa serie ha il suo termine generale nullo con $\frac{1}{n}$ per un valore particolare x_1 della variabile x, il convergere o meno dell'aggregato

$$\sum_0^n A_n=\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx_1+b_n\cos nx_1)$$

dipende dal modo di comportarsi dell'integrale

$$n^2\int_{-\eta}^{+\eta} G(t)\,\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right]dt.$$

all'annullarsi della quantità $\frac{1}{n}$, essendo

$$G(t)=\frac{F(x_1+t)+F(x_1-t)}{2}\ (^1).$$

(1) Vedi il T. VI. degli Annali di Brioschi e Cremona, pag. 332-340.

Ora, se la $f(x)$ esiste in ciascun punto di un segmento comunque piccolo racchiudente il punto x_1, si potrà asserire che il convergere della serie

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

pel valore particolare considerato dipende, stando le altre ipotesi circa alla $F(x)$, dall'andamento della data funzione nelle estreme vicinanze del punto x_1.

Ed invero, un'altra funzione $F_1(x)$ che ha le stesse proprietà della $F(x)$ da origine alla serie trigonometrica $\sum_0 r\ B_r$ analoga all'altra $\sum_1 t\ A_t$, mentre per ipotesi

$$\lim_{r=\infty} B_r = 0$$

nel punto x_1. Se poi facciamo

$$G_1(t) = \frac{F_1(x_1 + t) + F_1(x - t)}{2},$$

vedremo tosto che nel tratto $\overline{x_1 - \varepsilon}\ \overline{x_1 + \varepsilon}$ si ha

$$G(t) - G_1(t) = C_1 t + C'_1.$$

L'asserto è quindi vero, perchè la funzione $G(t)$ è completamente determinata nelle estreme vicinanze del punto x_1, fatta astrazione da un addendo lineare.

Altrettanto ha poi luogo se la funzione $f(x)$ cessa di esistere in un gruppo di punti di ordine limitato dell'intervallo $\overline{x - \varepsilon}\ \overline{x + \varepsilon}$, comunque piccola sia la quantità ε, perchè il coefficiente di $\cos nt$ si annulla in ognuno dei due sviluppi.

$$\sum_1^n (a_n \cos nx_1 + b_n \operatorname{sen} nx_1) \cos nt, \quad \sum_1^n (a'_n \cos nx_1 + b'_n \operatorname{sen} nx_1) \cos nt,$$

essendo

$$A_n = a_n \cos nx_1 + b_n \operatorname{sen} nx_1, \qquad B_n = a'_n \cos nx_1 + b'_n \operatorname{sen} nx_1$$

nel punto considerato.

Se poi la $f(x)$ esistesse, per esempio, solamente in un gruppo di punti di ordine finito del tratto $\overline{x - \varepsilon}\ \overline{x - \varepsilon}$, si dovrebbe dire che la convergenza della serie pel valor contemplato dipende dal modo di comportarsi della funzione $G(t)$ nelle estreme vicinanze dell'origine, ossia della $F(x)$ in un tratticello arbitrariamente piccolo il quale racchiude nel suo interno il punto che si contempla.

2. La seconda nota alla Memoria di Riemann è del seguente tenore:

«Hier scheint für die Function $\lambda(x)$ die Bedingung hinzugefügt werden zu müssen, dass sie sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholt, (die mit der nachher gemachten Annahme verträglich ist). In der That würde z. B. das in Rede stehende Integral nicht sich der Grenze 0 nähern, wenn $F(t) - C't - A_0 \frac{t^2}{2} = \text{const.}$ und $\lambda(t) = (x - t)^3$ gesetzt würde. Dagegen lässt sich unter der Voraussetzung

der Periodicität von $\lambda(x)$ das Verschwinden dieses Integrals durch Ausführung der Differentation

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-t)}\right],$$

durch Anwendung des Satzes 3, Art. 8 und eines ähnlichen Verfahrens wie in der Anmerkung 1 leicht darthun.

A questa nota si ponno fare le seguenti osservazioni.

L'ipotesi che la funzione $\lambda(t)$ sia periodica secondo 2π non mi sembra necessaria, basta supporre $\lambda(\pi) = \lambda(-\pi)$, $\lambda'(\pi) = \lambda'(-\pi)$. Il modo di comportarsi della funzione $\lambda(t)$ esternamente al tratto $-\pi + \pi$ è nel caso che consideriamo del tutto indifferente. Anzi, il simbolo $\lambda(t)$ potrebbe non avere significato in ciascun punto esterno al segmento contemplato.

L'esempio che si adduce per far vedere la necessità che sia $\lambda(\pi) = \lambda(-\pi)$, $\lambda'(\pi) = \lambda'(-\pi)$ non parmi del caso, perchè

$$F(t) - C't - \frac{A_0}{2}t^2 = -\sum_1^n \frac{a_n \operatorname{sen} nt + b_n \cos nt}{n^2},$$

mentre il secondo membro di questa eguaglianza non può assumere un valore costante diverso da zero in virtù del teorema:

Se una funzione continua e periodica secondo 2π è esprimibile per serie trigonometrica, essa serie è quella di Fourier.

Per dimostrare poi che l'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-t)}\right]\lambda(t)\,dt$$

si annulla con $\frac{1}{n}$ non va fatto uso precisamente del teorema 3 dell'Art. 8 ma bensì di un altro, che a dir il vero è ben poco diverso da quello e non si trova enunciato nella Memoria di Riemann. Questo teorema è il seguente:

Se si indicano con b e con c due costanti qualunque, la maggiore con c, e con $\lambda(t)$ una funzione continua nel segmento bc insieme alla sua derivata prima e tale, che sia

$$\left[\lambda(t)\frac{dB_{\mu\pm n}}{dt}\right]_b^c = \left[\lambda'(t)\,B_{\mu\pm n}\right]_b^c = 0,$$

essendo

$$B_{\mu\pm n} = \tfrac{1}{2}(a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)\cos(\mu \pm n)(t-x) \pm \tfrac{1}{2}(a_n \cos nx - b_n \operatorname{sen} nx)\operatorname{sen}(\mu \pm n)(t-x),$$

e

$$\lim_{r=\infty}\int_b^c \lambda''(t)\cos r(t-x)\,dt = 0,$$

l'integrale

$$\mu^2 \int_b^c \left(\sum_1^n \frac{a_n \operatorname{sen} nt + b_n \cos nt}{n^2} \right) \cos \mu (t - x) \lambda (t) \, dt$$

andrà a zero con $\frac{1}{\mu}$, quando si abbia

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad (n = \infty) \ (^1).$$

Io non comprendo poi perchè occorra far uso anche di un processo analogo a quello della Nota 1 per dimostrare che l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(F(t) - C' t - A_0 \frac{t^2}{2} \right) \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} (x-t)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (x-t)} \right] \lambda (t) \, dt$$

va a zero al crescere indefinito dell'intero n (^{2}).

CONTENUTO DELLA MEMORIA.

I. *Piano della ricerca ed osservazioni preliminari.*

par. 1. La funzione $f_1(x, y)$ è esprimibile per serie doppia trigonometrica, quando sia

$$f_1(x,y) = \sum_0^\nu \sum_0^\mu \left[\left(a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x \right) \operatorname{sen} \nu y + \left(a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x \right) \cos \nu y \right] =$$

$$\underset{\sim}{\alpha'} \qquad \sum_0^\nu \sum_0^\mu B_\mu^{(\nu)}$$

in ciascun punto in cui il simbolo $f_1(x, y)$ ha significato, mentre altrove la serie diverge. — In questo lavoro si dice che l'aggregato $\underset{\sim}{\alpha'}$ è convergente in un punto, quando in esso possa sommarsi per orizzontali e verticali ed abbia in amendue i casi una stessa somma.

par. 2. Della opportunità della prima delle definizioni precedenti. — Un' osservazione critica relativa ad alcuni passi contenuti nella Memoria di Riemann Sulla rappresentabilità di una funzione per serie trigonometrica.

par. 3. Ci proponiamo di trovare delle condizioni necessarie per la rappresentabilità di una funzione qualsivoglia a due variabili per serie doppia trigonometrica, e di dedurre quindi possibilmente da queste delle sufficienti. — Si distinguono due ipotesi:

(^{1}) Vedi il T.° VI degli Annali di Brioschi e Cremona, pag. 303-307.
(^{2}) Vedi il par. 3 del N.° III della mia Memoria.

A Ogni serie della forma $\sum_{0}^{\mu} B_{\mu}^{(\nu)}$ converge, qualunque sia il numero ν e qualunque sia il punto considerato. Le serie orizzontali si comportano in modo analogo.

B Si ignora se l'ipotesi precedente sia o meno soddisfatta.

In questo lavoro si studia soltanto il caso A.

II. *Alcune proprietà della serie α' nell'ipotesi A e della funzione $F(x,y,)$ ottenuta integrando due volte rispetto ad x e due rispetto ad y ciascun termine della stessa serie.*

par. 1. Si ha

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_{0}^{\nu} B_{\mu}^{(\nu)} = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} \sum_{0}^{\mu} B_{\mu}^{(\nu)} = 0,$$

qualunque sia il punto considerato.

Ciascuna delle due serie

$$\sum_{0}^{\mu} \left(a_{\mu}^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x \right), \quad \sum_{0}^{\mu} \left(a_{\mu}^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x \right)$$

converge in egual grado, qualunque sia ν, e si annulla uniformemente con $\frac{1}{\nu}$.

par. 2. La serie, ottenuta integrande due volte rispetto ad x e due rispetto ad y ciascun termine dell'aggregato α', converge uniformemente e rappresenta una funzione ovunque continua $F(x,y)$.

Proprietà della funzione $F(x,y)$.

Teorema I. Ciascuna delle due espressioni

$$\frac{F(x+2\alpha,y)-2F(x,y)+F(x-2\alpha,y)}{4\alpha^2}, \quad \frac{F(x,y+2\alpha)-2F(x,y)+F(x,y-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

tende uniformemente ad un limite all'annullarsi di α.

Teorema II. Se la serie α' converge nel punto (x,y), sarà in esso:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(x,y+\alpha)-2\varphi(x,y)+\varphi(x,y-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x,y),$$

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\psi(x+2\alpha,y)-2\psi(x,y)+\psi(x-2\alpha,y)}{4\alpha^2} = f(x,y),$$

quando si faccia

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad \psi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Teorema III. Le espressioni

$$\frac{F(x+2\alpha,y)-2F(x,y)+F(x-2\alpha,y)}{\alpha},\quad \frac{F(x,y+2\alpha)-2F(x,y)+F(x,y-2\alpha)}{\alpha}$$

si annullano uniformemente con α.

Teorema IV. Le quantità

$$\frac{\varphi(x,y+2\alpha)-2\varphi(x,y)+\varphi(x,y-2\alpha)}{\alpha},\quad \frac{\psi(x+2\alpha,y)-2\psi(x,y)+\psi(x-2\alpha,y)}{\alpha}$$

svaniscono in egual grado con α.

Teorema V. La funzione $\varphi(\alpha)\alpha^2$ si annulla uniformemente con α, quando si ponga

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{16\alpha^4}\Big[F(x+2\alpha,y+2\alpha)+F(x+2\alpha,y-2\alpha)+F(x-2\alpha,y+2\alpha)+\varphi(x-2\alpha,y-2\alpha)-$$
$$2F(x+2\alpha,y)-2F(x-2\alpha,y)-2F(x,y+2\alpha)-2F(x,y-2\alpha)+4F(x,y)\Big].$$

Teorema VI. Si ha

$$\lim_{m=\infty} m^2\int_b^c\left(F(x,y)-\frac{B_0^{(0)}}{4}x^2y^2+\frac{x^2}{2}\sum_1^s B_0^{(s)}\frac{1}{s^2}\right)\lambda(x)\cos m(x-a)\,dx=0,$$

a essendo una costante arbitraria e $\lambda(x)$ una funzione opportuna.

Teorema VII. L'integrale

$$-\frac{m^2}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F(u,v)-\theta(u,v)\right)\cos m(x-u)\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(y-v)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(y-v)}\right]du\,dv$$

converge all'annullarsi di $\frac{1}{n}$ ad un valore $\varphi_1(m)$, qualunque sia m, e si ha $\lim_{m=\infty}\varphi_1(m)=0$, qualunque sia il punto considerato, mentre

$$\theta(u,v)=B_0^{(0)}\frac{u^2v^2}{4}-\frac{u^2}{2}\sum_1^l B_0^{(l)}\frac{1}{t^2}-\frac{v^2}{2}\sum_1^l B_l^{(0)}\frac{1}{t^2}.$$

I teoremi III, IV e V dati al par. 2 del N° II. della mia Memoria reggono anche nel caso attuale.

III. *Sulla rappresentabilità di una funzione qualsivoglia a due variabili per serie doppia trigonometrica della specie* $\underset{\frown}{\mathrm{A}}$.

par. 1. Condizioni necessarie affinchè una funzione arbitrariamente data $f(x,y)$ sia esprimibile per serie doppia trigonometrica della specie $\underset{\frown}{\mathrm{A}}$.

par. 2. Le condizioni enunciate al par. precedente sono necessarie e sufficienti perchè esista la serie della specie voluta, la quale rappresenti la $f(x,y)$ ove converge ed ove il simbolo $f(x,y)$ ha significato.

par. 3. Stando le ipotesi del par. 1 il convergere o meno della serie $\underset{\frown}{\alpha'}$ nel punto (x,y) dipende dal modo di comportarsi dell'integrale.

$$\int_b^c \int_{b_1}^{c_1} \mathrm{F}(u,v) \frac{d^2}{du^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-x)}\right] \frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(v-y)}\right] \lambda(u)\rho(v)\,du\,dv,$$

quando si mandino successivamente allo zero ed in quell'ordine che si vuole le quantità $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$; essendo $\lambda(u)$ e $\rho(v)$ due funzioni opportune, e $0<b<x<c<2\pi$, $0<b_1<y<c_1<2\pi$.

IV. *Alcune ricerche relative al modo di convergere della serie di Fourier corrispondente ad una varietà di funzioni particolari.*

par. 1. Se $f(x)$ è una funzione qualsivoglia continua nel tratto ab $\left(0<a<b\leq\frac{\pi}{2}\right)$ mai negativa nè mai crescente in esso, l'integrale

$$\int_a^b f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha, \quad h=2n+1,$$

si annulla con $\frac{1}{n}$, quando si possa assegnare un valore $\mathrm{M}(>0)$ in guisa, che si abbia $f(x)<\mathrm{M}$, qualunque sia x.

Alcune osservazioni relative a questo teorema.

par. 2. L'integrale

$$\int_0^b f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} h\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha \quad \left(h=2n+1,\ 0<b\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

tende uniformemente al valore $f(0)$ all'annullarsi di $\frac{1}{n}$, $f(\alpha)$ essendo una funzione qualsivoglia di una varietà di funzioni egualmente continue, ciascuna delle quali non è mai crescente e negativa, nè supera un valore assegnabile $M (> 0)$.

Questo teorema può generalizzarsi alquanto.

par. 3. Se $f(x)$ è una funzione qualsivoglia appartenente ad una varietà di funzioni periodiche secondo 2π, uniformemente continue e tali, che si possa assegnare un numero m per modo, che nessuna delle medesime muti più di m volte il suo andamento nell'intervallo $0\,2\pi$, la espressione

$$\frac{1}{\pi} \sum_{t}^{n} \int_{0}^{2\pi} f(\alpha) \cos n (\alpha - x)\, d\alpha$$

si annulla in egual grado con $\frac{1}{t}$, quando sia mod $f(x) < M$, qualunque sia x, mentre M è una quantità positiva assegnabile.

V. *Una applicazione delle ricerche che precedono.*

par. 1. Supponiamo che la funzione $f(x, y)$ doppiamente periodica secondo 2π sia ovunque continua e scevra da infiniti massimi e minimi rispetto ad x nel segmento $0\,2\pi$, qualunque sia y, mentre una proprietà analoga ha luogo rispetto alla variabile y. — Questa funzione soddisfa a tutte le condizioni enunciate al par. 1 del N.° III; si può di conseguenza costruire una serie doppia trigonometrica della specie $\underset{\sim}{A}$, che in questo caso è quella di Fourier, la quale ha per somma la funzione data in ciascun punto in cui converge. — La convergenza ha poi luogo ovunque ed uniformemente.

CONTENUTO DELLE NOTE.

Nota 1. Sul concetto di funzione a due variabili.
» 2. Un teorema relativo alla rappresentabilità per serie trigonometrica di una funzione periodica secondo 2π non finita, la quale è scevra da infiniti massimi e minimi.
» 3. Costruzione di una funzione sempre crescente nel tratto 0 1 e dotata di un insieme ovunque compatto di discontinuità nel medesimo.
» 4. Al teorema II. del N.° II della mia Memoria si sostituisce l'altro: La quantità $\alpha^2 \varphi(\alpha)$ si annulla in egual grado con α.
» 5. Un'osservazione al contenuto del par. 1 del N.° III della mia Memoria.
» 6. Alcune osservazioni relative al par. 2 del N.° III della mia Memoria.
» 7. Un'obbiezione alla prima Nota che succede alla Memoria di Riemann. — Due osservazioni critiche a quanto Riemann asserisce all'articolo 9.
» 8. Anche l'asserzione di Riemann fatta a principio dell'articolo 10 non è inappuntabile.
» 9. Alcune osservazioni critiche alla seconda delle Note poste in fine della Memoria di Riemann.

Sulla natura geologica dei terreni incontrati nelle fondazioni tubulari del nuovo ponte di ferro costruito sul Tevere a Ripetta, e sull'Unio sinuatus Lamk. rinvenutovi.

Nota dell'ing. ROMOLO MELI

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell' anno 1879-80.

Nelle fondazioni tubulari ad aria compressa del ponte in ferro di recente costruito sul Tevere a Ripetta, per mettere in facile comunicazione la città di Roma coi Prati di Castello, si incontrarono i seguenti terreni:

A partire dal fondo dell'alveo, il quale prima della immersione dei cilindri, componenti le pile del ponte, si trovava elevato in media di 2,^{m} 10 sopra lo zero dell'idrometro di Ripetta, si rinvennero melme e sabbie di moderno trasporto, le quali, nei cilindri della pila destra del ponte, giunsero fino a 2,30 sotto zero. Seguirono poi sabbie grossolane o sabbioni di trasporto fluviale, con piccola ghiaia, che nella pila destra furono ritrovati fino a 2,^{m}92 sotto zero, mentre nei cilindri della pila sinistra continuarono fino a raggiungere maggiore profondità. Da 2,^{m} 92 fino a 4,^{m} 42 sotto zero si ebbero argille sabbiose d'acqua dolce, che poi passarono a marne plastiche, e continuarono fino a 7,^{m} 50 sotto lo zero. Le marne si trovarono solo nell'affondare i cilindri della pila e della spalla destra del ponte.

Frammenti di oggetti laterizî, e di manufatti di epoche diverse si rinvennero a vario livello solo nei primi strati dell'alveo, non essendosi ritrovati ad una profondità di oltre 6,^{m} 00 (3,^{m} 90 sotto lo zero idr.). Dagli strati di sabbia grossolana con piccoli ciottoli, a profondità comprese tra 6,^{m} 00 ed 11,^{m} 00 sotto il fondo (ossia tra 3,^{m} 90 ed 8,^{m} 90 sotto lo zero dell'accennato idrometro) si estrassero parecchie valve di *Unio sinuatus* Lamk. molto bene mantenute; si ritrovarono con frequenza nell'impianto dei due cilindri che costituiscono la pila sinistra del ponte. Finalmente nelle sabbie marnose, rinvenute nella fondazione della spalla destra a 8,^{m} 60 sotto il fondo del fiume (6,^{m} 50 sotto lo zero), si contenevano vegetali insieme a frammenti di legno, steli e foglie in molta copia. Queste ultime per gran parte spettano al *Quercus*, e si mostrano disposte in sottili strati. I campioni, che estrassi, di tali marne sabbiose con vegetali, essendosi lentamente prosciugati, si aprirono secondo i numerosi piani di stratificazione, mostrando in ciascuno di essi foglie accumulate le une sulle altre in modo da risultarne quasi una torba papiracea.

La profondità, raggiunta nella fondazione della coppia dei cilindri formanti la spalla sinistra del ponte, è appena di 1,^{m} 20 sotto il piano del selciato che li

circonda, giacchè si fondarono sul masso della banchina del porto, ampliato e ricostruito negli anni 1703-1704 sotto il pontefice Clemente XI.

Nella fondazione dei due cilindri formanti la pila sinistra, si raggiunse la profondità di 15,^{m} 96 nell'uno, e di 15,^{m} 98 nell'altro, sotto il pelo di magra ordinaria. E, poichè il livello di magra è a 5,^{m} 80 sullo zero dell'idrometro di Ripetta, così si pervenne fino a 10,^{m} 17 in media sotto lo zero.

I quattro rimanenti cilindri, due della pila destra, e gli altri due della spalla destra sono approfondati nell'alveo ugualmente, giacchè tutti e quattro furono conficcati fino a 13,^{m} 30 sotto la linea di magra, ossia fino a 7,^{m} 50 sotto zero, e sono incassati per 2,^{m} 00 entro la marna bigia.

In queste escavazioni del fondo del fiume non si incontrarono depositi marini, ma sempre, come ho già notato, sedimenti di acque dolci. Parimenti non vennero attraversate roccie marine nelle esplorazioni del terreno, eseguite nel decorso anno 1879 colla trivella sulla sponda destra del Tevere, per lo studio del progetto di nuovo inalveamento del fiume attraverso i Prati di Castello (1). Mercè la gentilezza del cav. G. Zucchelli ingegnere capo dell'ufficio tecnico per la sistemazione del Tevere, e dell'ing. Botto, mi fu possibile di vedere i saggi estratti da tutte le trivellazioni eseguite e mi accertai così che in queste si rinvennero sempre terreni deposti dalle acque dolci, quantunque le profondità, a cui si spinse la trivella, sieno state ben maggiori di quelle raggiunte nelle fondazioni dei cilindri del ponte di Ripetta (2).

(1) Notizie sulla natura geologica degli strati incontrati nelle sopraccennate trivellazioni, trovansi pubblicate nell'interessante *Relazione che accompagna il progetto di una nuova inalveazione del Tevere attraverso i Prati di Castello, dalla risvolta della Farnesina a valle di Ponte Milvio fino a quella di S. Spirito a valle di Ponte Elio*, ecc. Roma 1879. (Vedi parte III. *Costituzione geologica del terreno sul quale devesi operare*: pag. 23 e segg., ed alleg. 4.° Tav. II. *Profilo altimetrico e geognostico del terreno lungo l'asse della nuova inalveazione*).

(2) Ecco l'indicazione degli assaggi fatti ai Prati di Castello, a cura dell'ufficio tecnico speciale per la sistemazione del Tevere, e la natura della roccia estratta dalla massima profondità di ciascun tasto:

Nel 1° assaggio praticato alla vigna Brosshardt (in corrispondenza della ordinata 10 del profilo altimetrico e geognostico annesso alla sopracitata *Relazione per il progetto di nuova inalveazione*) si giunse a 20.^{m} di profondità dal piano di campagna (= — 4,90 rispetto lo zero dell'idrom.) e si rinvenne a tale quota marna argillosa di color grigio. In questo tasto a 0,^{m} 43 sullo zero la trivella portò fuori colla marna un'esemplare di *Bithynia tentaculata* (Lin.) benissimo conservata, che ho ottenuto dalla cortesia dell'ing. Botto per il Museo geologico dell'Università. L'esemplare presenta una spira allungata a differenza della specie vivente, che in generale ha una forma più gonfia, raccorciata, a spira corta e meno acuta, analoga alla var. riportata nella fig. 20 della tav. I. dell'opera di Draparnaud, *Histoire naturelle des mollusques terrestres et fluviatiles de la France.*

Nel 2° assaggio praticato alla vigna Piacentini (corrispondente all'ordinata 21 dell'accennato profilo) si giunse a 29,^{m} 00 sotto il piano di campagna (= — 14,86 dell'idrom.), estraendo la medesima marna di color cenerino a — 12,^{m} 86, e marna alquanto sabbiosa a — 14,^{m} 86 sotto lo zero.

Nel 3° assaggio alla vigna Scatena (corrisp. all'ordinata 26 del profilo suddetto) si ebbe la stessa marna argillosa fino a 30,^{m} 00 dal piano di campagna (= — 16,^{m} 22 sotto lo zero dell'idrom.). Dopo la marna, alla massima profondità raggiunta in questo tasto, cioè a 31,^{m} 00 di profondità dalla superficie del terreno (17,22 sotto zero) si rinvenne sabbia un poco argillosa con granellini neri riferibili in parte ad augite ed in parte a magnetite. In questa esplorazione del terreno si estrassero alla profondità di 25,^{m} 00 dal piano di campagna (= — 11,22 sotto lo zero) due esemplari di *Valvata pisci-*

Anche nei lavori di fondazione del muro di sponda, o del Lungo-Tevere, sulla sinistra ripa del fiume a valle di Ponte Sisto, sotto al fabbricato dei Cento Preti si rimossero terreni di trasporto deposti da recenti alluvioni. Peraltro, in questi lavori non si escavò il fondo del fiume che di 2.^{m} a 3.^{m} giungendo in media a 0,^{m} 90 sotto lo zero idrometrico. Alla spalla destra del ponte Sisto poi si ebbe marna plastica grigia con molluschi terrestri e d'acqua dolce (¹). Si rinvenne presso il ponte a 3,^{m} 00 sullo zero idrom., mentre a monte del ponte, ad una distanza orizzontale di 110.^{m}, si abbassò fino a 3,^{m} 00 sotto lo zero; ed a valle la stessa marna si trovava alla quota di 1,^{m} 00 sopra zero, ad una distanza di 25,^{m} 00 dalla spalla del ponte. La potenza di questo deposito di marna, sulla quale trovasi fondata la spalla destra del ponte Sisto, è abbastanza ragguardevole, giacchè si esplorò per una profondità di 6,^{m} 00, dopo la quale venne sospeso l'affondamento della trivella nella marna, giudicandosi lo spessore accertato essere più che sufficiente per sostenere il muraglione del Lungo-Tevere, che in seguito vi venne costruito.

Uguali risultati si ottennero nelle tre esplorazioni praticate sulla sponda sinistra alle radici dell'Aventino. Difatti nella trivellazione eseguita presso l'ultimo magazzino di legna alla Marmorata, si pervenne a 7,^{m} 28 sotto lo zero idrometrico,

nalis (Müll.), compresi nella marna grigia con frammenti di vegetali; tali esemplari si trovano ora nel Museo geologico dell'Università .

Il 4° assaggio nella vigna Carini (corrispondente all' ordinata 29 del detto profilo) si spinse fino a 19,^{m} 05 sotto il piano di campagna (= — 5,30 dell'idrometro) ed a questa profondità si trovò la medesima marna grigia d'acqua dolce.

Nel 5° tasto nella vigna della Banca industriale di Genova (in corrispondenza dell'ordinata 34 dell'indicato profilo) a 29,^{m} 00 sotto il piano di campagna, ossia a 14,^{m} 87 sotto lo zero dell'idrom., si ebbe la medesima roccia.

La 6^{a} e 7^{a} trivellazione si effettuarono nella vigna Baldini (in corrispondenza delle ordinate 39 e 43 dell'accennato profilo) giungendo l'una a 23.^{m} sotto il suolo di campagna (8,^{m} 90 sotto lo zero) e l'altra a 20.^{m} di profondità ossia 6,^{m} 91 sotto zero dell'idrometro. In entrambi i tasti si rinvenne a questa quota sabbia un poco argillosa.

L'ottavo assaggio fu operato in corrispondenza dell'ordinata 49 del profilo, nella vigna dei P. P. delle Scuole cristiane, giungendo a 7,^{m} 17 sotto zero dell'idrometro di Ripetta, rinvenendo marna sabbiosa a questa profondità.

Finalmente il 9° assaggio fu fatto entro Roma a Borgo Nuovo, in corrispondenza dell'ordinata 54 del profilo altimetrico e geognostico più sopra citato, e si ebbe sabbia di trasporto a 12,^{m} 52 sotto lo zero.

La marna, rinvenuta in queste trivellazioni, è analoga a quella scoperta nelle fondazioni del ponte di Ripetta; essa è di color bigio o cenerino, fa forte effervescenza toccata cogli acidi, e bagnata coll'acqua si rende plastica: ridotta in polvere, la calamita estrae in poca quantità piccoli granellini neri, riferibili a magnetite, quando non voglia supporsi che tali piccolissime particelle possano provenire dalle aste di ferro, e dai varî pezzi della trivella; lo che del resto è molto improbabile.

(¹) Ecco la nota dei molluschi che rinvenni nella marna di tale località:

Limnaea palustris (Müll.) var. β. Drap.
Planorbis umbilicatus Müll. = *Pl. marginatus* Drap.
Bithynia tentaculata (Lin.) = *Paludina impura* Lamk.
Helix carthusiana Müll. = *Helix carthusianella* Drap.
Helix apicina Lamk.
Hyalina Draparnaldi Beck = *H. lucida* (Drap.)
Bulimus acutus (Müll.).

estraendo a tale quota, marna grigia alquanto sabbiosa di acqua dolce. Dall'altro foro praticato all'Orto della Salara, in cui si approfondò la trivella fino a ben 16,^{m} 46 sotto lo zero, si estrasse a tale profondità marna grigia con vegetali e frammenti di molluschi terrestri e d'acqua dolce (*Helix, Planorbis*). Finalmente nel perforamento del terreno a Porta Leone, si cavò la medesima marna grigia alquanto sabbiosa; in tale scandaglio si giunse ad 11,^{m} 90 sotto lo zero.

Ho creduto di indicare questi interessanti scandagli, operati nell'antico alveo del Tevere, per mettere in rilievo che, anche a profondità notevoli sotto il livello del mare (1) si trovano, nel tratto urbano del fiume, depositi fluviali e marne racchiudenti fossili di acqua dolce (2).

(1) Lo zero dell'idrometro di Ripetta, al quale si riferiscono tutte le quote indicate, è superiore di 0,^{m} 971 al livello medio del mare. Quindi nelle riportate trivellazioni la massima profondità rispetto il livello del mare si sarebbe raggiunta nel 3° assaggio praticato alla vigna Scatena ai Prati, arrivando cioè a 16,^{m} 25 sotto il mare. Seguirebbe poi lo scandaglio eseguito nell'orto della Salara, nel quale la trivella avrebbe toccata la quota 15,^{m} 49 sotto il detto livello del mare.

(2) Dopo i risultati delle sopracitate trivellazioni (risultati che s'accordano perfettamente colle ipotesi e colle osservazioni diligentissime del Brocchi pubblicate nel suo importantissimo libro: « *Dello stato fisico del suolo di Roma, memoria per servire di illustrazione alla carta geognostica di questa città.* Roma 1820) si può ora ritenere che le marne rinvenute dall'architetto Poletti nei fondamenti della colonna della Concezione in piazza di Spagna, le quali furono credute plioceniche pel solo fatto che, essendo marne di color bigio si mostrano in apparenza simili alle marne grigie del piano inferiore del pliocene antico, scoperte e sollevate fino a 85,^{m} 00 circa sul mare nella opposta sponda del Tevere, sono invece quaternarie e deposte da acque dolci. A conferma di ciò, il Brocchi già rilevò deposizioni fluviali (marne e sabbie) nella stessa piazza di Spagna nella casa distinta col n.° 32, e nelle adiacenze di via Condotti e di via Frattina, ecc. (vedi op. cit. pag. 87 e seguenti); ed io mi ricordo di avere osservato, tre o quattro anni fa, a non grande distanza dalla piazza medesima, e precisamente al principio di via del Tritone, nella fondazione della parte interna del fabbricato distinto col n.° 6, ove trovasi attualmente l'Hôtel d'Orient, depositi alluvionali di ghiaie e sabbie contenenti elementi vulcanici e frammenti di ossa fossili di vertebrati, logorate per il trasporto operato dalla corrente fluviale.

Parimenti a marne d'acqua dolce riferisco quelle altre che l'egregio ing. Canevari indica rinvenute nelle due perforazioni eseguite, l'una in piazza Barberini presso la fontana, e l'altra in prossimità della Villetta Massimo in piazza S. Maria Maggiore (vedi Canevari, *Notizie delle fondazioni dell'edificio del Ministero delle Finanze in Roma.* Atti della r. Accademia dei Lincei, tom. II. serie 2ª 1874-75 — Vedi la nota alla pag. 429). Io sono condotto a questa conclusione, non tanto da ciò che il Brocchi scrive sulla costituzione geologica del Quirinale, e dei prossimi colli, Viminale ed Esquilino, e dall'esame della sua *Carta fisica del suolo di Roma*, ma dal fatto che, marne grigiastre con fossili d'acqua dolce in molta copia [*Limnaea stagnalis* (Lin.), *L. auricularia* (Lin.), *L. palustris* (Müll.), *Bithynia tentaculata* (Lin.), *Planorbis complanatus* (Lin.), *Planorbis corneus* (Lin.), *Achatina acicula* (Müll.), *Helix nemoralis* Lin., frammenti di ossa di vertebrati, ecc.] furono scoperti al di sotto del tufo terroso nella trincea eseguita pel proseguimento della via Nazionale quasi sulla sommità del Quirinale. Queste marne che esplorai con trivella mostrarono una forte potenza. Non reca quindi alcuna maraviglia che forse le medesime marne ricompaiano nello stesso Quirinale a piazza Barberini, ovvero all'ingresso della Villetta Massimo, e, si noti bene, in condizioni identiche di giacitura, giacchè sottostanno al tufo terroso, analogamente a quelle della trincea nella via Nazionale. Ma che le marne dei tasti di piazza Barberini e della Villetta Massimo, non siano la continuazione delle marne plioceniche, sollevate sulla sponda destra del Tevere (le quali rappresentano, e per il carattere litologico, e per la fauna che racchiudono, un deposito marino di alto fondo), risulta evidente anche dal fatto di aver rinvenuto la ghiaia sotto l'argilla. Ciò fa escludere un deposito di mare profondo, ed accenna piuttosto alle alternanze delle magre e delle piene nelle deposizioni d'indole fluviale.

Dai depositi d'alluvione, scavati nell'affondare i cilindri del ponte di Ripetta, si estrassero parecchie specie di conchiglie parte marine, e parte terrestri o d'acqua dolce.

Le prime sono erratiche, e provengono dai depositi pliocenici circostanti alla valle del Tevere; i loro gusci sono corrosi, in diverso grado logorati, ed accusano così un cammino più o meno lungo, percorso dal luogo in cui originariamente furono deposti.

Invece le conchiglie d'acqua dolce o terrestri sono ben mantenute, di più recente deposizione e per la maggior parte ora viventi nei nostri dintorni (1).

È poi da notare che, sebbene in varie pubblicazioni si citino le roccie plioceniche rinvenute entro Roma sulla sinistra sponda del Tevere (vedi, per esempio, Mantovani, *Descrizione geologica della campagna Romana.* Roma 1875 pag. 75; vedi ancora le notizie fornite dal medesimo e riportate nel lavoro del Serra-Carpi, *I coefficienti di conducibilità calorifica di alcune terre dell' Agro Romano.* Roma 1874 pag. 12), non si fa poi alcuna menzione dei fossili contenuti, e perciò dal solo carattere litologico della roccia, e dalla simiglianza del suo colore si stabilisce la identità delle marne quaternarie con quelle del pliocene inferiore del monte Mario, e dei colli Vaticani. Tale identità resta ora distrutta dalla presenza dei fossili di acqua dolce contenuti nelle marne estratte dalle trivellazioni eseguite dall'ufficio tecnico governativo, superiormente indicate.

Però, riguardo alle argille di acqua dolce, rinvenute sul Quirinale alla fine del rettilineo di via Nazionale, devo avvertire che il sig. dott. G. Terrigi nelle sue, *Osservazioni geologiche sul Quirinale*, (vedi Transunti della r. Accademia dei Lincei, serie III. vol. I. fascic. 7, giugno 1877 pag. 209), pubblicò che al di sotto di esse, e precisamente a 0,m 60 sotto il piano della fogna avea trovato una marna giallastra finamente sabbiosa nella quale contenevasi una fauna marina di foraminiferi, dall' autore riferiti al pliocene. Peraltro nel tasto, che venne eseguito per cura del gabinetto di Geologia della r. Università di Roma sulla fine del novembre 1877 nella via del Quirinale, in prossimità dello sbocco di via Nazionale, precisamente presso la piccola chiesa di S. Silvestro, usando la trivella del Comune di Roma, gentilmente concessa a tale scopo dall' onor. Sindaco, si raggiunse la profondità di ben 16m 58 sotto il piano stradale, ossia di 10,m 58 sotto il piano di fondazione della fogna, e si ebbero sempre le medesime marne con frammenti di vegetali e fossili terrestri e d' acqua dolce. L'ultimo saggio, tolto dalla cartoccia della trivella non presentò traccia di foraminiferi! Del resto i risultati di tale trivellazione verranno meglio indicati in altra piccola Nota, che spero quanto prima di pubblicare.

(1) Ecco la nota delle specie rinvenute nell'affondare i cilindri della spalla destra del ponte:

Erratiche, trasportate dai terreni pliocenici

Natica millepunctata Lamk.
Cerithium tricinctum (Broc.)
» *vulgatum* Brug. var. *minutum* Phil.
Cerithiolum scabrum (Olivi)
Chenopus pes-pelicani (Lin.)
Melanopsis nodosa Féruss.
Turritella subangulata (Brocc.)
» » var. *acutangula* (Brocc.)
» *Brocchii* Bronn.
» *tricarinata* (Brocc.)
Ostrea lamellosa Brocc.
Arca diluvii Lamk.
Pectunculus inflatus (Brocc.)
» *obliqualus* Ponz.-Rayn.
Chama gryphoides Lin..
Cardium oblongum Chemn.
» *edule* Lin.
Venus ovata Penn.
Arcopagia corbis (Bronn.)
Corbula gibba (Olivi).

Di recente deposizione, e viventi

Bithynia tentaculata (Lin.)
Neritina fluviatilis (Lin.)
Helix apicina Lamk.
» *rotundata* Müll.
Buliminus detritus (Müll.)
Ferussacia Hohenwardti (Rossm.)?
Pupa minutissima Hartm.?
Limnaea stagnalis (Lin.)
» *palustris* (Müll.)
» *ovata* Drap.
Carychium minimum (Müll.)
Unio Requienii Michd. var. *romanus* Rigacci
» *sinuatus* Lamk.

Oltre le accennate specie di molluschi, nelle roccie estratte per l'impianto del cilindro a monte nella spalla destra del ponte si rinvennero frammentini di *Balanus* e di *Briozoari* fossili non che

Fra le specie d'acqua dolce rinvenute a Ripetta devo menzionare l'*Unio sinuatus* Lamk. Avendolo ritrovato anche nei depositi diluviali, e nelle alluvioni antiche della vallata del Tevere, ho creduto di tenerne parola distintamente.

Unio sinuatus Lamk.

(Vedi tavola annessa)

1797. . . . . *Tableau encyclopédique et méthodique des trois regnes de la nature.* XIX^me^ part. — Vers testacés à coquilles bivalves. Tav. 248 fig. 1 *a b.*

1819. Unio sinuata Lamarck. *Histoire natur. des an. sans vertébr.* Tom. VI. 1^re^ partie pag. 70 n. 1.

1825. Unio margaritifera. Draparnaud, *Hist. natur. des mollusq. terrestr. et fluv. de la France* pag. 132 n. 2 Tav. X. fig. 17-19 (per errore tipograf. 8, 16, 19) (non Lin.).

1827. Unio sinuata De Blainville. *Manuel de malacologie et de conchyliol.* pag. 539 Tav. 67 fig. 3.

1830. Unio sinuata Encyclopédie méthodique. *Hist. nat. des vers* par Bruguière et de Lamarck, continuée par G. P. Deshayes Tom. II — 2.^me^ partie (Vers) pag. 579 n. 4 (partim) Tav. 248 fig. 1 *a b.*

1835. Unio sinuata. Deshayes in Lamarck. *Hist, natur. des an. sans vertébr.* 2^e^ édition Tom. VI. pag. 530 n. 1 (ved. anche la nota).

1836. Unio sinuatus Rossmässler *Iconogr. d. Land-und Süsswass. - Moll.* Vol. I. dispensa III. pag. 22 Tav. XIII fig. 195.

1847. Unio sinuatus Dupuy. *Hist. nat. des mollusq.* pag. 630 Tab. XXIII. fig. 7.

1854. Unio sinuatus Rossmässler. *Iconogr. d. Land-und Süsswasser. - Moll. Eur.* Vol. III dispensa 1-2 pag. 38 Tav. LXX. fig. 853.

1855. Unio sinuatus Moquin-Tandon. *Hist. natur. des mollusq. de France.* Vol. II. pag. 567 Tav. XLVIII. fig. 1-3.

1864. Unio solida Bleicher. *Essai d'une monographie géologique du Mont Sacré* (Bullet. de la Soc. d'hist. nat. de Colmar. 5^e^ année pag. 150).

1865. Unio solida. Bleicher. *Recherches géologiques faites dans les environs de Rome* (Bullett. de la Soc. d'hist. nat. de Colmar. 6^e^ année p. 94.)

1875. Unio solida Ponzi. *Cronaca subappennina o abbozzo d'un quadro generale del periodo glaciale* (Atti dell'XI congresso degli scienziati italiani tenuto in Roma nel 1873) pag. 55 n. 33 e pag. 58-59 dell'estratto.

parecchi gusci di Entomostraci spettanti alla *Cypris ovum* (Jurine) ed alla *Candona candida* (Müll.) piccoli crostacei viventi nelle acque dolci. Finalmente dall'esame delle sabbie del medesimo cilindro si ricavarono i seguenti foraminiferi, trasportati dai vicini terreni pliocenici: *Pullenia bulloides* (D'Orb.), *Nonionina communis* D'Orb., *Polystomella crispa* (Lin.), *Bulimina ovata* D'Orb., *Rotalia Beccari* Lin., *Orbulina universa* D'Orb. In ultimo, specialmente dallo stato torboso a 6,^m^ 50 sotto lo zero dell'idrom. si ebbero belle foglie di *Quercus*, e semi di vegetali. L'egregio D.^r^ Giuseppe Cuboni, assistente alla cattedra di Botanica nella R. Università di Roma, il quale ebbe la gentilezza di studiare i residui vegetali provenienti da tale strato, vi riscontrò inoltre diverse specie di muschi *(Hypnum?)*, frammenti di foglie di graminacee o ciperacee, qualche pezzetto di foglia di una Dicotiledone, molti semi di piante appartenenti a diverse famiglie (Crucifere, Ombrellifere, Borraginee), che non sarebbero da riportarsi a nessuna specie della nostra flora attuale.

1877. Unio sinuatus Locard *Malacologie Lyonnaise ou description des mollusques terrestres et aquatiques des environs de Lyon*, pag. 106 e 144.

1878. Unio sinuatus Paulucci. *Materiaux pour servir à l'étude de la faune malacologique terrest. et fluviatil. de l'Italie et des ses îles*, pag. 20 n. 511, pag. 52 n. 132.

1879. Unio sinuatus Locard. *Description de la faune malacologique des terrains quaternaires des environs de Lyon*, pag. 193.

Questa bella specie, che vive di preferenza nelle acque profonde, fu rinvenuta a Ripetta nei depositi superiori dell'alveo attuale del Tevere, negli strati di sabbia con piccola ghiaia, incontrati, come ho anteriormente notato, tra 6,^{m} 00 ed 11,^{m} 00 sotto il fondo (3,^{m} 90 ed 8,^{m} 90 sotto lo zero dell'idrom.) nella pila sinistra.

Secondo quello che mi dissero gli operai addetti allo scavo delle terre nei cilindri, tale specie si incontrò con maggiore frequenza nell'affondare i cilindri della pila sinistra, ed io ho potuto procurarmi per lo studio della specie, ben 12 esemplari tra valve o frammenti di valve rinvenute nel solo impianto di tale pila. Cinque di queste valve più o meno frammentarie furono gentilmente donate al Museo di Geologia della Università dal sig. C. Tuccimei, ingegnere nel r. Genio civile, ed incaricato governativo per la costruzione del ponte; altre 6 tra valve e frammenti di essi mi furono favorite dal distinto pittore sig. A. Martinetti, il quale mi fornì anche tutto il materiale di conchiglie e foraminiferi da lui raccolto nell'affondarsi dei cilindri della spalla destra.

Tutte le valve che ho avuto, quantunque più o meno rotte nella loro estrazione, si mostrano bastantemente bene conservate, nè sono corrose per trasporto o calcinate; lo strato interno perlaceo è bene mantenuto; in parecchie esiste ancora traccia del legamento della cerniera, e parte dell'epidermide, o periostraco. Le valve rinvenute presentano varia grandezza ed alcune appartengono a giovani individui; tuttociò dimostra che questa specie ha vissuto sul posto, ed in epoche non molto lontane, ma recenti d'assai (1).

Peraltro questa stessa specie si rinviene in un grado avanzato di fossilizzazione anche in quei più antichi depositi fluviali, che trovansi nella grande valle del Tevere e che giungono ad altezza abbastanza rilevante sull'ordinario livello del fiume (2). Così l'on.

(1) Dall'ing. Paolo Emilio De Sanctis, dirigente i lavori del Lungo-Tevere sulla sponda sinistra presso il ponte Sisto, vennero donate al Museo di Geologia, tre valve frammentarie di *Unio sinuatus*, rinvenute a valle del ponte presso la spalla sinistra in sabbie grossolane contenenti antichità romane (vasi, frammenti di oggetti di bronzo, monete, ecc.) a 7,^{m} 00 sotto magra, ossia — 1,84 sotto lo zero dell'idrom. di Ripetta. Queste 3 valve di Unio si ritrovarono allo stesso livello dei crani umani (secondo e terzo cranio) accennati dal chiarmo Prof. Ponzi nella sua nota « *Sui lavori del Tevere e sulle variate condizioni del suolo romano.* (Ved. Transunti R. Accad. Lincei - Seduta 6 giugno 1880). Inoltre, durante la stampa della presente nota, si estrassero circa 40 altre valve della medesima specie, di varia età e grandezza: si rinvennero nelle fondazioni, eseguite presso la spalla sinistra, sotto il primo arco, e nel tratto, che ora si sta fondando, immediatamente a monte del Ponte Sisto, alla quota di 6,^{m} 20 sotto magra (= — 1^{m} 04 dell'idrom.).

(2) Il Brocchi ritiene di 130 a 140 piedi l'elevazione di tali sedimenti sul livello medio attuale del Tevere (vedi *Stato fisico del suolo di Roma*, pag. 85 e 97), ed il Ponzi valuta a 30.^{m} in media l'elevazione dei travertini quaternarî sul mare (vedi Ponzi, *Sulla storia fisica del bacino di Roma memoria da servire di appendice all'opera del suolo fisico di Roma di G. B. Brocchi.* Roma 1850. Annali di scienze matematiche e fisiche, pag. 17 dell'estratto).

Prof. Ponzi rinvenne nei depositi alluvionali presso il ponte Molle alcune conchiglie del genere *Unio*, e ne estrasse in maggior quantità dalle ghiaie diluviali nella vigna dei gesuiti sotto s. Prisca all'Aventino nell'interno di Roma (1) e dalle ghiaie di Monte Verde, fuori Porta Portese. Tale *Unio*, ritenuta per estinta, venne spesso citata col nome di *Unio solida* (2). Ora nella collezione universitaria trovansi alcune valve di tale *Unio* estratte dai citati depositi alluvionali di ponte Molle e dell'Aventino. Gli esemplari provengono dalle raccolte del prof. Ponzi e del Calandrelli, come rilevasi dalle scritte originali che li accompagnano. Or bene, dal confronto fatto sugli esemplari dell'*Unio* di Ripetta ho potuto stabilire che anche l'*Unio* di quei depositi non è altro che l'*Unio sinuatus* Lamk., generalmente molto corroso ed in cattivo stato di conservazione. Il Bleicher rinvenne questa specie nei depositi dell'Aniene a s. Agnese sulla via Nomentana, e sotto il nome di *U. solida* la indicò colle seguenti parole: « grande espéce à nacre brillante, « à test assez solide pour supporter le transport de l'eau ; on la retrouve fraîche « dans les dépôts diluviens anciens, roulée et encroutée de calcaire dans les alluvions « plus récentes » (3); ed in altro lavoro (4) egli ne dà anche le dimensioni: « nous « citons surtout l'*U. solida*, dont les valves ont un décimetre à un décimetre et demi « en longueur ». Tali dimensioni corrispondono molto bene a quelle delle nostre valve di *U. sinuatus*. E qui devo avvertire che tra le valve donate dall'ing. Tuccimei, dopo che fu eseguita la figura che trovasi unita alla presente nota, ve ne sono talune, che, sebbene frammentarie, accennano a dimensioni maggiori di quelle riportate nella figura. Così un bel frammento, mancante della parte posteriore, ha una larghezza di mm. 70: se ora da questa vogliasi dedurre la lunghezza, deducendola dal rapporto di $\frac{135}{65}$ tra la lunghezza e la larghezza (il quale rapporto medio, risulta dalle misure che ho eseguito su tutte le valve più integre), si otterrebbe una lunghezza

(1) Ponzi G. Memoria ora citata (vedi pag. 8, 17, 20) e 2ª edizione corretta (Atti pont. Accad. dei Nuovi Lincei, 1867. Ved. pag. 7, 14, 17 dell'estratto). Id. *Le ossa fossili subappennine dei dintorni di Roma* (Atti r. Accad. Lincei, Serie 3.ª Memorie della classe di scienze fisiche ecc. Vol. II. 1878. Vedi pag. 29 dell'estratto).

(2) Nelle varie pubblicazioni in cui è riportata l'*U. solida* dei dintorni di Roma è sempre omesso il nome dell'autore della specie. Nel *Catalogus molluscorum imperii austriaci, complectens Gasteropoda testacea nec non conchifera*, pubblicato dallo Schröckinger e che trovasi inserito nei *Verhandlungen der k. k. zoolog. botan. Gesellschaft in Wien* vol. XX. 1865, è citata alla pag. 322 l'*Unio solidus* Zelebor come vivente nel fiume March. Tale specie deve corrispondere alla var. *solida* dell'*Unio tumidus*, che il Zelebor accennò nel « *Systematisches Verzeichniss der im Erzherzogthume Oesterreich bisher entdeckten Land-und Süsswasser - Moll.* ». — Inserito nel Vol. VII. « *Berichte über die Mittheilungen von Freunden d. Naturwissenschaften, gesammelt von W. Haidinger* ». Wien 1851. (Ved. gen. Unio n. 6. pag. 22 dell'estratto). In questa pubblicazione il Zelebor l'accenna come semplice varietà rinvenuta nel fiume March presso Theben (Austria) — Non so se in appresso ne abbia fatto una specie col nome di *U. solidus*: però la trovo mancante nell'opera di Rossmässler continuata dal D.r Kobelt. Non avendo potuto procurarmi la descrizione di tale specie, ignoro quali rapporti essa abbia con la specie fossile dei dintorni di Roma; se però l'*U. solidus* Zel. è quello riportato con tal nome nella spendida opera dello Chenu [« *Illustrations conchyliologiques, ou description et figures de toutes les coquilles connues vivantes et fossiles.* Paris A. Franck éditeur] alla fig. 2 (*a b*) della tav. 25 della monografia del genere *Unio*, non avrebbe la benchè minima analogia colla specie del Tevere.

(3) Bleicher, *Recherches géolog.* etc. Bullet. de Colmar op. cit. pag. 94.

(4) Bleicher, *Essai d'une monographie* etc. op. cit. pag. 150

restaurata di mm. 145, che starebbe perfettamente colle dimensioni date dal Bleicher, e coinciderebbe colla lunghezza di mm. 140 a 145 assegnata dal Deshayes nella descrizione dell'*Unio sinuatus* (vedi Deshayes in Lamarck. *Hist. nat. des an. sans vert.*2me édit. op. cit. vol. VI. pag. 531) e con la lunghezza di mm. 145 riportata dal Locard (op. cit. pag. 106).

Anche Frère Indes (1) accenna ad un *Unio* fossile rinvenuto nei depositi dell'Aniene, che egli ritiene estinto, e che deve senza dubbio riferirsi alla nostra specie (2). Mercè poi la gentilezza dei sig. Rigacci ho potuto effettuare un confronto tra l'*Unio* di Ripetta, ed un bell'esemplare di *U. sinuatus* Lamk. proveniente dall'Ebro (Spagna) e che trovasi nella loro bella collezione di conchiglie (3), io l'ho riscontrato identico, sia per le dimensioni, sia per le particolarità della conchiglia.

L'*U. sinuatus* non si riteneva vivente in Italia, ma recentemente la sig. M. Paolucci lo indicò nel suo interessante lavoro, *Materiaux p. l'étude de la faune malacol. terr. et fluv.* etc. come specie esistente in più località della Lombardia. Sembrandomi molto importante il fatto di rinvenire l'accennata specie, e nei depositi quaternarî della valle del Tevere, e nei più recenti dell'alveo attuale ne feci disegnare la prima valva che mi ebbi, ed ho creduto di dare anche un poco di sinonimia della specie.

L'*U. sinuatus* fu rinvenuto fossile nel pleistocene medio del Delfinato e del Giura (Locard).

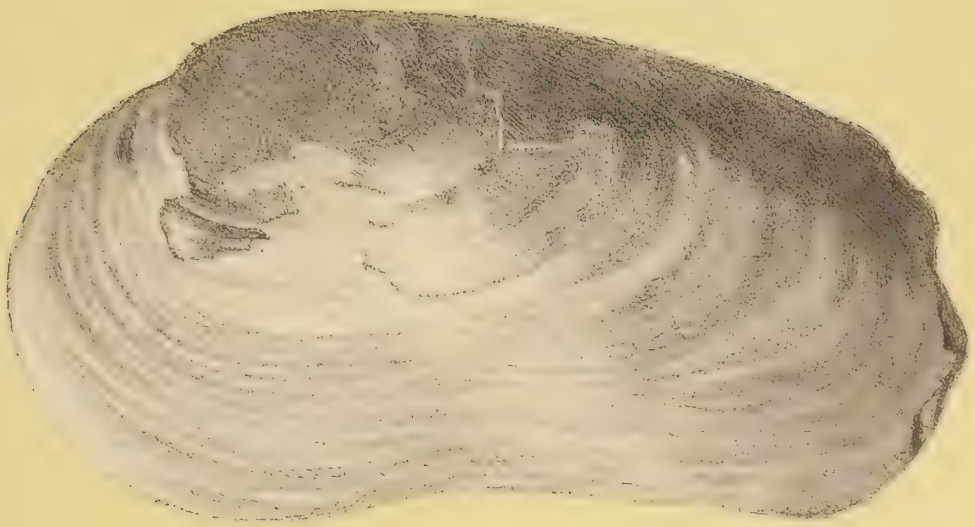
Riassumendo; nelle fondazioni del ponte di Ripetta, e nelle esplorazioni effettuate a maggiore profondità con la trivella sui terreni giacenti nella sponda sinistra del Tevere, non furono finora incontrati o raggiunti gli strati del pliocene marino.

E, poichè questi si trovano scoperti ed inclinati nel prossimo Monte Mario, e nei colli gianicolensi e vaticani sull'opposto lato, mentre non appariscono dallo sbocco dell'Aniene fino oltre Roma per essere il suolo della sponda sinistra molto più depresso dell'altra, così deve ammettersi il fatto, notato già dal prof. Ponzi, che, lungo questa porzione della valle Tiberina, dopo la deposizione delle roccie plioceniche avvenne una frattura principale con movimento del suolo e sollevamento nella sponda destra.

(1) *Lettres du Frère Indes des écoles chrétiennes sur la formation des tufs dans la Campagne Romaine, sur une caverne à ossements, et sur les monuments préhistoriques des environs de Dreux.* 2me édit. Béthune 1875 pag. 11.

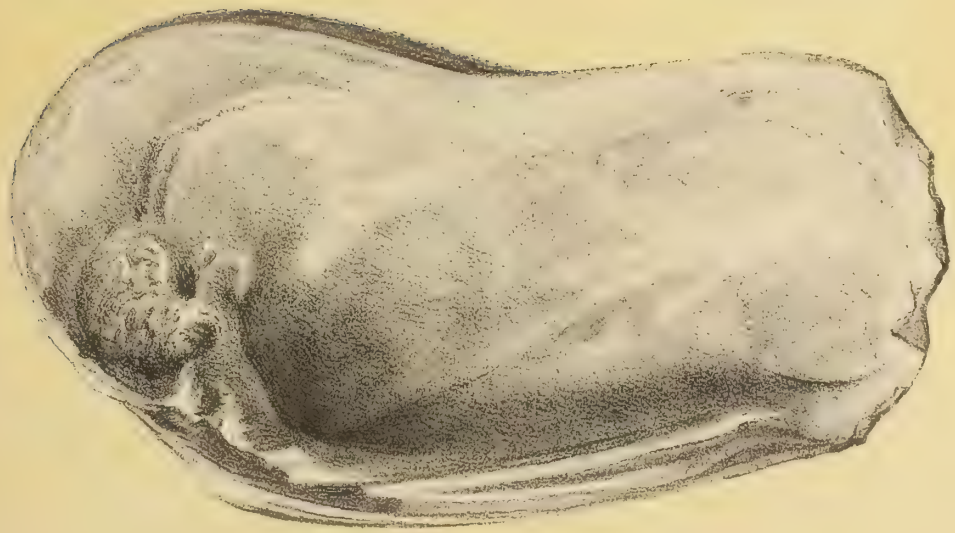
(2) L'egregio capitano A. Verri mi disse ultimamente di aver trovato presso la Città di Castello (Umbria), appena passato il ponte sul Tevere, grosse valve di Unio giacenti a pochi metri sul livello di magra del fiume. Su tali vaghe indicazioni suppongo che forse possa essere l'*U. sinuatus* e sarebbe interessante di vederne un esemplare per fissarne la specie.

(3) Tale specie è segnata col n. 1396 nel *Catalogo delle conchiglie componenti la collezione Rigacci.* Roma 1874 (vedi pag. 18.)



VNIO SINVATVS LAMK

Grandezza naturale



R. Pistoni dis.

Roma. Fototipia Danesi

I Brachiopodi degli Strati a Terebratula Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale.

Memoria del dott. MARIO CANAVARI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 6 giugno 1880.

INTRODUZIONE

Il primo che desse conto dell' esistenza di brachiopodi nell'Appennino centrale, quando la paleontologia italiana appena iniziata non era stata ancora arricchita dal celebre lavoro del Brocchi (1), fu il valente naturalista Spadoni dell'Università di Macerata, nell'anno 1807 (2). Egli descrisse e figurò un fossile che rapportò al genere « delle *Anomie Linneane*, ossia delle *Terebratole* di altri accreditati naturalisti » trovato presso Cingoli nella focaia interposta ad una calcarea compatta, della quale non saprei precisare l' età. L'*Anomia Cingulana*, a giudicare dalla descrizione e dalla figura che ne dà lo Spadoni, appartiene, senza alcun dubbio, al genere *Rhynchonella*, che in quei tempi andava confuso con quello delle *Terebratule* propriamente dette, e di altri generi di brachiopodi, che furono più tardi distinti mercè i classici lavori del Fischer, del Sowerby, del De-Buch, del Davidson e di molti altri.

In seguito allo Spadoni percorriamo un periodo di quasi mezzo secolo nel quale nessuno scenziato tornò a parlare di brachiopodi nell' Appennino centrale, finchè il conte A. Spada e il prof. A. Orsini nel 1855 ne ricordarono alcune specie, *Terebratula lampas, T. diphya, T. resupinata, T. Buchi, T. Erina,* nel lavoro che in quel turno pubblicarono nel *Bulletin de la Société géologique de France* (3), e molte altre ne raccolsero e donarono al museo di Pisa. La *Terebratula lampas* e la *T. diphya* dello Spada e dell'Orsini appartengono ad una stessa specie, alla *T. Erbaensis* (4), la *T. resupinata* ad una giovine *T. Aspasia*, la *T. Buchi* alla *Rhynchonella Mariottii*. Di tali piccoli errori paleontologici nei quali essi caddero per la titubanza nel proporre nuove specie, furono già scusati dal Meneghini (5).

Altri brachiopodi furono al museo di Pisa donati dall' estinto abate Rusconi e dal prof. Ponzi, provenienti da Monticelli nel gruppo dei monti Cornicolani nella

(1) *Conchiologia fossile subappennina.* Milano, 1814.

(2) Lettera litologico-marina del dott. P. Spadoni prof. di St. nat. e bot. nell'Università di Macerata al sig. Amoretti, inserita nella nuova raccolta di opusc. interess. t. II. Milano, 1087; ripubblicata nell'anno successivo (1808) a Macerata coi tipi di B. Capitani.

(3) *Quelq. obs. géol. sur les apenn. de l' Italie centrale.* 2.e sér., T. XII, p. 1147.

(4) Meneghini, *Monogr. d. foss. app. au calc. rouge amm. de Lombardie* etc. p. 167. Milan, 1867-1880.

(5) *Commemorazione scient. del conte A. Spada*, p. 15. Pisa, 1876.

campagna orientale romana. Alcuni dei brachiopodi di Monticelli si trovano al museo geologico di Roma ed or non è molto furono ricordati dal Mantovani (1).

Con i materiali esistenti nel museo di Pisa intraprese il Meneghini, prima ancora della pubblicazione dello Spada e dell' Orsini, nel 1853, una illustrazione dei brachiopodi del Lias medio dell'Appennino centrale, che mai pubblicò. Trovandomi io in Pisa con l'incarico dal r. Comitato geologico d'Italia dello studio dei fossili sotto la direzione del prof. Meneghini, questi mise a mia disposizione l'intero suo lavoro perchè lo facessi mio e lo portassi a compimento, con l'aggiunta delle nuove specie in seguito pervenute nel museo suddetto mercè l' opera dell' estinto abate Mariotti di Cagli, del prof. Mici d'Urbino, del conte F. Toni di Spoleto, del senatore Scarabelli d'Imola e di altri. Molte delle specie del Meneghini rimangono sempre buone anche dopo le più recenti pubblicazioni e di alcune di esse trascrivo letteralmente le descrizioni che ne diede; alcune sono state poi da altri e principalmente dallo Zittel (2) illustrate, onde ho dovuto per queste accettare i nomi di chi primo le pubblicò.

Gli « Strati a *T. Aspasia* Mgh. » dell'Appennino centrale, così denominati dallo Zittel (3), risultano di un calcare biancastro o carnicino, picchiettato di grigio, ricco di pirite di ferro, talora subcristallino, stratificato, intercalato da schisti marnosi sottilissimi: occupano un orizzonte costante tra il calcare bianco ceroide, alcune volte d'apparenza dolomitica o travertinosa, del Lias inferiore e i calcari biancastri, alquanto rosati o giallognoli, ad *Harpoceras bifrons*, *H. comense*, *H. Mercati*, *Phylloceras Nilsoni*, *Ph. Spadae* ecc. o le marne rosse ammonitifere a *Posidonomya Bronni* del Lias superiore. La potenza di essi variabilissima oscilla dai 15 ai 30 o 40 metri raggiungendone talora persino i 100. Non sono fossiliferi che in ispeciali località e prevalentemente nella porzione superiore, e in tal caso risultando da calcari costituiti da minuti articoli di crinoidi insieme commisti a nuclei e frammenti di ammoniti e di altre conchiglie e a brachiopodi copiosissimi e per varietà di forme e per ricchezza d'individui, assumono quella *facies* che si presenta a Hierlatz nelle Alpi salisburgesi e, divenuta classica mercè gli studi che ne fecero l'Hauer (4), l'Oppel (5) e lo Stoliczka (6), è conosciuta col nome di *facies* hierlatziana. Nel rimanente questi calcari sono oltremodo poveri di fossili, tuttavia alcuni brachiopodi vi si rinvengono non di raro, ma rarissimi ne sono i cefalopodi, e tra questi quei pochi sino ad ora trovati possono dirsi rappresentati da unici esemplari.

Tali depositi a *facies* hierlatziana, che nell'êra mesozoica con faune successive ed ineguali si ripeterono, per quanto ora è noto, dal Lias inferiore al Titonico inferiore, interposti ordinariamente a calcari di mare profondo, caratterizzati in ispecie dalla

(1) *Descrizione geol. della Campagna romana*, p. 21. Torino, 1875.

(2) *Geol. Beob. a. d. Central-Apenninen.* München, 1869.

(3) *Geol. Beob.* ecc.

(4) Sitzb. d. k. Wr. Ak. d. Wiss. Bd. XII, p. 861; Bd. XIII, p. 90, 401.

(5) *Ueber die Brach. des unt. Lias.* Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1861, p. 529.

(6) *Ueber die Gastr. u. Aceph. der Hierlatzsch.* Sitzb. der k. Ak. d. Wiss. in Wien, math. nat. Classe. 1861, XLIII, p. 157.

presenza di frammenti di acefali, gasteropodi, piccoli ammoniti uniti a brachiopodi e crinoidi, nel mentre indicano una condizione anormale dei mari nei quali essi avvennero, danno cagione a sospettare che fossero originati dall' azione meccanica d'una qualche corrente marina. A simile questione puramente geologica relativa ai calcari a *facies* di Hierlatz, se ne aggiunge un'altra paleontologica riguardante lo sviluppo e la successione di alcuni esseri organici e specialmente dei brachiopodi. L'esatta conoscenza delle faune di tutti i depositi a *facies* di Hierlatz potrà sola dare gli elementi per risolvere l'ultima questione ed è per arrecare in tale senso un contributo alla paleontologia, che si intraprende il presente lavoro.

I brachiopodi sino ad ora notati negli strati a *T. Aspasia* Mgh. dell'Appennino centrale e che mi propongo descrivere sono i seguenti:

1. *Spiriferina rostrata* Schl. sp.
2. » *obtusa* Opp.
3. » *apenninica* Canav.
4. » *Meneghiniana* Canav.
5. » *Bosniackii* Canav.
6. » *Tonii* Canav.
7. » cfr. *angulata* Opp.
8. *Terebratula Aspasia* Mgh.
9. » *fimbrioides* E. Desl.
10. » *sphenoidalis* Mgh.
11. » *undata* Mgh. ms.
12. » *Erbaensis* Suess.
13. » *Rotzoana* Schaur.
14. » *Renieri* Cat.
15. » *Paronai* n. f.
16. » *Piccininii* Zitt.
17. » *cerasulum* Zitt.
18. » cfr. *punctata* Sow.
19. » (*W?*)*Meneghinii* Parona,ms.
20. » (*W?*)*filosa* Mgh. ms.
21. *Waldheimia bilobata* Stopp.
22. *Waldheimia indentata* Sow. sp.
23. » *furlana* Zitt.
24. » *amygdaloides* Mgh.ms.
25. » *apenninica* Zitt.
26. *Rhynchonella aptyga* Canav.
27. » *deltoidea* Mgh. ms.
28. » *pisoides* Zitt.
29. » *zeina* n. f.
30. » *Mariottii* Zitt.
31. » *retroplicata* Zitt.
32. » *flabellum* Mgh.
33. » *dolabriformis* Mgh.ms.
34. » *Meneghinii* Zitt.
35. » *subdecussata* Münst. var.
36. » *fissicosta* Mgh. ms.
37. » cfr. *Fraasi* Opp.
38. » *Sordellii* Parona, ms.
39. » *Paolii* Canav.
40. » *variabilis* Schl. sp. var.
41. » n. f?

Oltre ai citati fossili vi si riscontrano i seguenti (1):

42. *Harpoceras radians* Reyn.
43. » *Boscense* Reyn.
44. » *Algovianum* Opp.
*45. » *Kurrianum* Opp.
*46. » *Affricense* Reyn.
*47. » *Fieldingi* Reyn.
*48. » cfr. *planispira* Reyn.
49. *Stephanoceras Ragazzonii* Hauer.
50. » *italicum* Mgh. ms.
51. *Aegoceras Davoei* Sow.
52. » *muticum* d'Orb.
53. » *Vernosae* Zitt.
54. *Amaltheus* sp.
55. *Phylloceras mimatense* d'Orb.
56. *Lyloceras fimbriatum* Sow.
57. *Nautilus* sp.
*58. *Rhynchoteuthis liasinus* Zitt.
59. *Aulacoceras orthoceropsis* Mgh.
60. *Belemnites* sp.
61. *Emarginula Gemmellaroi* n. f.
62. *Natica* sp.
63. *Pecten. Rusconii* n. f.
64. *Hypodiadema marconisse* Mgh.ms.
65. *Cidaris rhopalophora* Zitt.
66. *Eugeniacrinus* o *Apiocrinus* sp.
67. *Pentacrinus* sp.
68. *Millericrinus* cfr. *Adnethicus* Quenst.
69. » cfr. *Hausmanni* Quenst.
70. *Sphenodus* sp.

(1) Le specie segnate con (*) si trovano solo al museo di Monaco (Baviera) e le riporto dal citato lavoro dello Zittel.

Di queste 70 specie nei calcari a *facies* hierlatziana del Lias medio della provincia mediterranea se ne riscontrano 10 anche nei monti palermitani (1), cioè:

Harpoceras Algovianum Opp.	*Terebratula Aspasia* Mgh.
» *Kurrianum* Opp.	» *sphenoidalis* Mgh.
Phylloceras mimatense d'Orb.	» *Piccininii* Zitt.
Spiriferina rostrata Schl. sp.	*Rhynchonella flabellum* Mgh.
» cfr. *angulata* Opp.	» *Mariottii* Zitt.

A Gozzano (2) le 7 che seguono:

Harpoceras Algovianum Opp.	*Rhynchonella Sordellii* Par. ms.
Spiriferina rostrata Schl. sp.	*Millericrinus* cfr. *Hausmanni* Quenst.
Terebratula Meneghinii Parona, ms.	» cfr. *Adnethicus* Quenst.
Rhynchonella flabellum Mgh.	

A Sospirolo (3) semplicemente le seguenti:

Spiriferina obtusa Opp.	*Terebratula Aspasia* Mgh.
» cfr. *angulata* Opp.	*Rhynchonella subdecussata* Münst. sp.

La parte della fauna appenninica risultante di cefalopodi non corrisponde in senso assoluto, ad alcuna delle suddivisioni liassiche estralpine, ma presenta le maggiori analogie con quella del Lias medio, al cui piano superiore fu riferita. Che non debba rapportarsi al Lias superiore, col quale per altro ha molte affinità, risulta dal fatto di non contenere le più spiccate forme di un tale orizzonte; d'altronde il gruppo degli *Aegoceras*, a cui appartengono alcune specie degli strati a *T. Aspasia* dell'Appennino, ha un *habitus* piuttosto antico e predominò nel Lias inferiore e l'*Aegoceras Davoei*, che abbiamo ricordato, caratterizza nel Giura dell'Europa centrale una zona molto antica del Lias medio (4).

Basandosi quindi sugli ammoniti, tutta quella massa di calcari che comprendiamo sotto il nome di « Strati a *T. Aspasia*. Mgh. » potrà forse ripartirsi in due zone; l'una più antica nella quale predominarono gli *Aegoceras* e perciò in istretta parentela col Lias inferiore, l'altra più recente nella quale invece doverono svilupparsi i falciferi a coste fine, precursori immediati degli svariati tipi del medesimo ordine d'ammoniti che crebbero poi e meravigliosamente si moltiplicarono nelle marne rosse o nei calcari biancastri del Lias superiore. Tale suddivisione è per ora puramente ipotetica e qualora anche si potesse effettuare, le due zone medio-liassiche dell'Appennino centrale non troverebbero posto esatto nella serie delle zone stabilite già nelle formazioni mesozoiche della provincia dell'Europa centrale; ma bensì ciascuna di esse avrebbe il valore stratigrafico e paleontologico di parecchie zone estralpine.

(1) Anche il Gemmellaro (*Sopra i fossili della zona con Terebratula Aspasia* Mgh. *della provincia di Palermo e di Trapani.* Palermo, 1874) cita dieci specie comuni alla Sicilia e all'Appennino centrale, però egli vi computa la *Rh. Zitteli*, che ci sembra diversa da quella appenninica, mentre noi vi aggiungiamo il *Ph. mimatense*, che abbiamo raccolto al Suavicino.

(2) C. F. Parona, *Appunti geologici sul bacino del lago d'Orta.* Novara, 1880. – *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili* (manoscritto).

(3) V. Uhlig, *Ueber die lias. Brachiopodenfauna v. Sospirolo bei Belluno.* Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. LXXX. Wien, 1879.

(4) Neumayr, *Ueber unvermittelt auftretende Cephalopodentypen im Jura Mittel Europa's.* Jahrb. d. k. k. geol. Reichs. Wien, 1878.

Alla parte superiore della superiore delle due zone del Lias medio appenninico stabilite sugli ammoniti, dovrebbe ascriversi la maggior parte dei brachiopodi menzionati; e invero mentre le spiriferine darebbero un'età alquanto più antica, la maggior parte di essi, ad esempio le *T. Erbaensis*, *T. Rotzoana*, *T. Renieri*, appartengono a tipi che ebbero il loro massimo sviluppo nel Lias superiore, come eziandio le *Rhynchonellae* lisce, che potrebbero indicarsi col nome di *Aptygae* (senza pieghe), trovano analogia con quelle successive della *facies* hierlatziana degli strati a *Posidonomya alpina* (1). Avrebbe quindi la fauna di brachiopodi dell'Appennino centrale un carattere più recente delle faune del Lias medio di Gozzano, di Sicilia e di Sospirolo, con le quali ha a comune, come abbiamo visto, pochissime specie.

Le diverse *facies* hierlatziane liassiche, prendendo come punto di partenza quelle della Selva Bakonica riferita già dal Böckh alla parte inferiore del Lias inferiore e di Hierlatz rapportata al piano superiore del Lias inferiore, e considerando che la fauna di Sospirolo ha con esse notevoli analogie, mentre poi solo con la fauna di Hierlatz ha maggior affinità quella di Sicilia, da considerarsi coeva alla fauna di Gozzano, potrebbero ordinarsi in serie discendente nel modo seguente:

Lias medio	Strati a *T. Aspasia* (parte sup.) dell'Appennino centrale.
	Zona a *T. Aspasia* di Sicilia e calcare rosso-giallastro e talora brecciato di Gozzano, presso il lago d'Orta.
	Calcare grigio di Sospirolo, presso Belluno.
Lias inferiore	Strati di Hierlatz.
	Strati della Selva Bakonica.

Uno smembramento di questi diversi piani liassici, in zone, dando a tale parola la significazione assegnatale dal Neumayr (2) e dagli altri paleontologi tedeschi, basato ad esempio sullo sviluppo e sulla successione dei brachiopodi, sembra nello stato attuale della scienza quasi impossibile. Una formazione invero isomesica nella quale gli spazi di formazione rimanessero isotopici con isopiche (meglio *isotipiche*) *facies* (3) non è ancora conosciuta per i brachiopodi, onde riesce difficilissimo afferrare i caratteri del loro sviluppo e delle loro mutazioni; difficoltà che viene anche aumentata, a giudicare dagli esteriori caratteri, dalla persistenza di forme che si verifica di essi in epoche successive. Certamente con ulteriori e pazienti ricerche paleontologiche si arriverà a stabilire per i brachiopodi analoga serie di mutazioni a quella ora conosciuta per i cefalopodi e applicarla poi alla cronologia geologica. Per le *Spiriferidae* e per molti dei generi antichi di brachiopodi si può già prevedere effettuabile un tale ordinamento; per generi più recenti e in ispecie per le *Rhynchonellae* sembra davvero impossibile. Le mutazioni invece delle *Terebratulae* potranno in seguito prestarsi assai bene per la classificazione zoo-cronologica dei terreni mesozoici. E difatti come tentativo di ciò accenniamo a due gruppi di terebratule, l'uno dall'altro derivante, che si svilupparono in due diversi periodi. Il gruppo cioè delle *Aspasiae* e quello delle *Diphyae*, appartenenti il primo al genere nuovo testè creato dal

(1) Oppel, *Ueber d. Vork. v. jurass. Pos. Gest. in d. Alpen.* 1863.

(2) *Ueber unvermittelt* ecc.

(3) Edmond v. Mojsisovics, *Die Dolomit-Riffe von Süd Tirol und Venetien.* Wien, 1878.

Douvillé (1) delle *Glossothyris* e non accettato dallo Zittel (2), il secondo a quello delle *Pygope*. Risulta palese lo sviluppo successivo di questi due generi mercè l'esame della classica monografia del gruppo della *T. Diphya* del Pictet (3) e della lunga serie delle *Aspasiae* che figuriamo (Tav. I) e delle affini a questa che dall'Oppel, dal Davidson, dal Quenstedt, dallo Zittel, dal Gemmellaro, dall' Uhlig si descrissero. E difatti le forme transitorie delle giovini *Pygope*, sono quelle persistenti nelle adulte *Glossothyris*. Tale osservazione fatta ora in un semplice caso e che potrebbe riferirsi solo a due faune a brachiopodi, liassica l'una e giurassica superiore l'altra, sarebbe applicabile in un senso troppo ampio e in uno spazio di tempo che racchiude parecchie formazioni e diverse mutazioni di cefalopodi.

Nel senso sopraccennato la denominazione « zona a *T. Aspasia* » comprenderebbe un periodo maggiore di tempo di quello nel quale visse la fauna che illustriamo. Il Gemmellaro la usò in un senso che si può solo accettare come convenzionale, noi abbiamo preferito, seguendo l'esempio dello Zittel, comprendere la formazione dell'Appennino centrale, analoga a quello di Sicilia, col nome di « Strati a *T. Aspasia* Mgh. »

DESCRIZIONE DELLE SPECIE.

Gen. **Spiriferina** D'Orbigny.

Spiriferina rostrata Schl. sp.

Tav. III, fig. 10.

Terebratulithes rostrata Schlotheim, *Nachträge zur Petref.* 1822, p. 95, Taf. XVI, Fig. 4.

Delthyris rostrata Zieten, *Die Versteinerungen Würt.* 1830, p. 51, tab. XXXVIII, fig. 4.

Spiriferina rostrata Deslongchamps, *Ét. crit. sur des Brach. nouv. ou peu connus.* 1862, p. 10, pl. II, fig. 7-9. — Davidson, *A Monogr. of the British foss. Brach.* 1876, p. 95, pl. XI, fig. 6.

Non riporto qui che una parte della lunga sinonimia di questa specie, che andò per lungo tempo confusa con altre affini. Fu il Deslongchamps (l. c.) il primo che la separasse dalle *Sp. verrucosa*, *pinguis*, *Hartmanni* ecc. con le quali dal Davidson e da altri si riuniva; separazione che poi fu accettata anche dallo stesso Davidson (l. c.)

L'esemplare che figuro proviene dal Lias medio del Suavicino e fa parte della collezione privata del conte Toni di Spoleto. Esso, come feci altrove notare (*La montagna del Suavicino.* Boll. r. Com. geol. n. 1 e 2, 1880, p. 70), presenta i seguenti caratteri: nella valva perforata ha un piccolo seno mediano, al quale nella valva brachiale corrisponde un indizio di lobo; ambedue le valve sono ornate da sottilissime e numerose

(1) *Ét. monogr. des Térébratules du groupe de la T. diphya. Mél. pal.* Trois. livr. Genève, 1867.

(2) *Handbuch d. Palaeont.* I. Bd. p. 700. München, 1880.

(3) *Note sur quelq. genr. de Brach. (Terebratulidae et Waldheimiidae).* Bull. de la Soc. géol. de France. Trois. série t. VII. Paris, 1878-79.

linee concentriche; la valva perforata inoltre è ornata da strie radianti dall'apice non visibili ad occhio nudo, punteggiatura assai minuta, l'area abbastanza alta è ben limitata e misura circa un terzo della larghezza della conchiglia.

Dimensioni

Lunghezza 36^{mm} Larghezza 40^{mm} Spessezza 25^{mm}

Il Meneghini riferì alla *Sp. rostrata* tre esemplari provenienti dal Lias medio di Monticelli. Ad eccezione delle dimensioni, molto minori di quelle dell'esemplare precedente, corrispondono per tutti i caratteri esterni alla forma tipica dello Schlotheim. Esemplari ancora più piccoli di questi li ho raccolti nel Lias medio dei *Campi delle Monnece* presso Gagliole e ai *Campi dell'Acqua* presso Ficano nel gruppo Suavicino.

Lo Zittel (*Geol. Beob.* ecc. p. 42) dice essere la citata specie abbastanza frequente tra Cagli e Cantiano.

La *Spiriferina rostrata,* sebbene incominci a manifestarsi nel Lias inferiore, e arrivi a quello superiore, pure è nel Lias medio e particolarmente negli strati ad *Amaltheus margaritatus* (Francia) che ebbe il massimo sviluppo.

Spiriferina obtusa Opp.

Tav. III, fig. 9.

Spiriferina (cfr. angulata) obtusa Oppel, *Ueber d. Brach. des untern Lias.* Zeitsch. der deutsch. geol. Gesellsch. 1861, p. 541, Taf. XI, Fig. 8.

Spiriferina obtusa Uhlig, *Ueber die lias. Brach. v. Sospirolo bei Belluno.* Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. Naturw. Cl. LXXX, Bd., II, Abth. 1879, p. 13, Taf. I, Fig. 5.

Conchiglia ordinariamente piccola, in alcuni casi alquanto assimetrica, ornata da ambedue le valve da sottilissime ondulazioni concentriche. Valva perforata quasi subpiramidale, con un seno mediano non molto profondo, stretto nella regione apiciale, sufficientemente ampio alla fronte: apice poco ricurvo, acuminato; area abbastanza grande, deltidio molto alto, stretto. Valva brachiale quasi ovale poco rigonfiata. Commissura delle valve retta ai lati, incurvata verso la valva brachiale alla fronte. La punteggiatura non è visibile.

Dimensioni

Lunghezza 12^{mm} Larghezza 16^{mm} Spessezza 11,5^{mm}

L'esemplare che figuro è quello che corrisponde più degli altri alla tipica *Spiriferina obtusa* Opp. del Lias inferiore di Hierlatz e a quella del Lias medio di Sospirolo (Uhlig, l. c.). Ha inoltre molta rassomiglianza con la *Sp. cfr. angulata* della zona a *T. Aspasia* di Sicilia (Gemmellaro, *Sopra alcune faune giur.* ecc. 1874, p. 56, tav. X, fig. 6, 7).

Da questa forma per graduali passaggi, divenendo l'apice alquanto più corto e curvato in avanti, l'area un poco più stretta e il deltidio più basso, si arriva ad alcuni individui che presentano molta analogia con la *Sp. Sicula* (Gemmellaro, l. c. p. 54, tav. X, fig. 5), la quale insieme alla precedente e successive appartiene al gruppo della *Sp. rostrata.*

La *Spiriferina obtusa* Opp. è abbastanza frequente nel Lias medio di Monticelli, della quale località se ne trovano sette esemplari nel museo di Pisa.

Spiriferina apenninica Canav.

Spiriferina apenninica Canavari, *La montagna del Suavicino.* Boll. r. Com. geol. 1780, n. 1 e 2, p. 71, tav. I, fig. 2.

Questa specie, affine alla *Sp. Gümbeli* Neum. (*Zur Kenn. d. fauna des unt. Lias*, 1879), fu raccolta nel Lias medio dei *Campi dell'Acqua* al gruppo Suavicino.

Spiriferina Meneghiniana Canav.

Spiriferina Meneghiniana Canavari, *La montagna del Suavicino.* Boll. r. Com. geol. 1880, n. 1 e 2, p. 71, tav. I, fig. 5.

La *Spiriferina Meneghiniana*, affine alla *Sp. pinguis* Zitt., raccolta nel Suavicino, fa parte della collezione privata del conte Toni in Spoleto.

Spiriferina Bosniackii Canav.

Spiriferina Bosniackii Canavari, *La montagna del Suavicino.* Boll. r. Com. geol. 1880, n. 1 e 2, p. 73, tav. I, fig. 3.

Raccolsi questa specie nei *Campi dellAcqua* al Suavicino.

Spiriferina Tonii Canav.

Spiriferina Tonii Canavari, *La montagna del Suavicino*, Boll. r. Com. geol. 1880, n. 1 e 2, p. 72, tav. I, fig. 4.

Anche la *Spiriferina Tonii* fu rinvenuta nel Lias medio del Suavicino. Questa elegante specie si trova ora nella collezione particolare del conte Toni in Spoleto.

Spiriferina cfr. angulata Opp.

Spiriferina angulata Opp., *Ueber d. Bach.* ecc. 1861, p. 541, Taf. XI, Fig. 7.— Zittel, *Geol. Beob. aus den Centräl-Apenn.* 1869, p. 130.

Un unico esemplare mal conservato rinvenuto dallo Zittel negli strati a *T. Aspasia* di Cagli.

Gen. **Terebratula** (Lhwyd.) Davids.

Terebratula Aspasia Mgh.

Tav. I.

Terebratula Aspasia Meneghini, *Nuovi foss. toscani*, 1863, p. 13.— Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apenn.* 1869, p. 38, Taf. 14, Fig. 1-3. — G. G. Gemmellaro, *Sopra alcune faune giur. e liass.* 1874, p. 63, Vav. XI, Fig. 1-3. — Meneghini, *Monogr. des foss. du calc. rouge amm. Pal. lomb.* 1879, p. 168. — Uhlig, *Ueber d. lias. Brach. v. Sospirolo b. Belluno.* Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl., LXXX. Bd., I, Abth., 1879, p. 16.

Terebratula Backeriae (David.) Stoppani, *Studi* ecc. 1857, p. 228. — non David.

Conchiglia molto inequivalve, più larga che lunga, ma a rapporto variabile secondo la età. Valva perforata molto convessa, con la parte mediana, a cominciare

circa da un terzo della lunghezza, rilevata in lobo alquanto rotondato, che va leggermente allargandosi verso la fronte e, mercè due solchi più o meno profondi, talora anche appena indicati, rimane separato dalle due parti laterali esse pure sensibilmente convesse; apice variabilissimo, ma sempre robusto, incurvato, margini affatto rotondati, falsa area strettissima e non ben limitata, deltidio molto basso, ampio, concavo, forame rotondo, mediocre. Valva brachiale lateralmente poco convessa, talvolta piana con ampio seno longitudinale che comincia circa a metà della lunghezza, ma talora leggermente anche in vicinanza dell'umbone, si allarga alla fronte ad occupare ordinariamente poco più di $^1/_3$ e talora $^1/_2$ della larghezza della conchiglia e, ripiegando generalmente all'indietro, abbraccia (Aspasia) la fronte della grande valva. Commissura palleale più o meno rotondata a margini raramente taglienti, leggermente sinuosa quella latero-frontale, fortemente arcuata alla fronte, quasi a semicerchio verso la piccola valva. Linee d'accrescimento parallele al margine palleale, punteggiatura della superficie fina, uniformemente distribuita.

I vasi venosi palleali presentano una certa simmetria bilaterale. Due vasi venosi principali si diramano dalla regione apiciale della valva brachiale verso le due ali laterali e si prolungano per via dicotoma sino al margine palleale in una serie di canaletti che non molto si vanno impiccolendo, nè molto complicando; altri due vasi partono dalla regione apiciale e si prolungano ancora per via dicotoma nel seno mediano, ma in modo molto incerto in tutti gli esemplari esaminati. L'apice della valva perforata è contornato da piccoli vasi, dai quali se ne diramano due principali alle parti laterali della conchiglia. Indizi molto incerti dell'apparato apofisario.

Le dimensioni dei moltissimi esemplari esaminati oscillano tra le seguenti:

	(I)	(II)
Lunghezza	24^{mm}	8,5^{mm}
Larghezza	32^{mm}	10,5^{mm}
Spessezza	16,5^{mm}	9,^{mm}

La *T. Aspasia* Mgh. è di forma e dimensioni variabilissime, talchè le forme estreme paiono appartenere a due tipi ben diversi, ma che si collegano mediante tutte le forme intermedie. Fu descritta dal Meneghini fin dal 1853, come risulta dal suo lavoro inedito sui Brachiopodi del Lias medio nell'Appennino centrale, ma pubblicato allora ne fu soltanto il nome (*Nuovi foss. tosc.*). Più tardi (1869) fu figurata dallo Zittel (*Geol. Beob.* ecc.), il quale ne distinse due varietà, la var. *major* e la var. *minor* « die sich lediglich durch ihre Grösse unterscheiden »; ma poi nei due esemplari che rappresenta a tipo delle due varietà si riscontrano diversità di caratteri essenzialissimi, notati dal Meneghini (*Monogr. des foss.* ecc. p. 168). L'esemplare preso a tipo per la var. *major* proviene dal classico deposito del Lias medio alla Marconessa presso Cingoli e si trova conservato nel museo paleontologico di Pisa. Fu figurato dallo Zittel (l. c. fig. 1) ma « on ne peut reprocher à cette figure que les angles latéraux du sinus un peu trop accusés, tandis qu'ils sont dans cet échantillon, comme dans tous les autres, toujours emoussés » (Meneghini, l. c. p. 168), quindi ho creduto conveniente rappresentarlo di nuovo. Si può inoltre rimarcare nella figura data dallo Zittel la incerta ed incompleta indicazione delle diramazioni venose palleali che si veggono benissimo per trasparenza su ambedue le valve come

la rappresento con le fig. 1^{e}, 2^{f} e come si osserva in moltissimi altri esemplari tutti provenienti dal Lias medio appenninico.

Tra i numerosi esemplari che ho avuto campo di osservare al museo di Pisa, molti dei quali sono stati raccolti da me, per quanto diligentemente osservati, non ne ho riscontrato alcuno che possa identificarsi all'esemplare figurato dallo Zittel (fig. 2) a tipo della varietà *minor*. Le due varietà *major* e *minor* come furono notate dallo Zittel nella descrizione della *T. Aspasia* (l. c.) e non come furono figurate, si debbono piuttosto ripartire nelle due forme *adulta* e *giovanile*, escludendo poi da quest'ultima quella che rappresenta con la fig. 4, perchè se ne allontana specificamente per la conformazione della regione apiciale e per l'intera configurazione della conchiglia; mentre poi « les jeunes individus de la *T. Aspasia* conservent toujours les caractères essentiels de l'espèce » (Meneghini, l. c. p. 169). Lo Zittel faceva inoltre osservare ch'era singolare il fatto di rinvenirsi le due varietà della *T. Aspasia* in località diverse; al che però posso dire che nei molti luoghi da me visitati nell'Appennino centrale per quanto o nell'una o nell'altra predominasse o la var. *major* Zitt. o la var. *minor* Zitt. (non come furono figurate) le ho sempre riscontrate insieme mescolate.

La forma della *T. Aspasia* che rappresento con le fig. 4, 7 è quella che dal Meneghini fu distinta col nome di *T. Myrto*, ma poi identificata con la *T. Aspasia*. È a questa varietà che il Meneghini (l. c. p. 169) riunì la forma figurata dal Gemmellaro (l. c. fig. 1, 3) come appartenente alla var. *minor* Zitt., dalla quale è differentissima.

Alle due varietà: I. *major* Zitt.; II. *Myrto* Mgh. var. *minor* Gemm. non Zitt.; se ne debbono aggiungere alcune altre:

III. Forma dilatata, a contorno laterale molto arrotondato, a valva brachiale quasi totalmente piana (fig. 6).

IV. Forma col lobo mediano molto acuto comparabile alla *T. Aspasia* var. *Myrto* dello Zittel come fu figurata (fig. 3).

V. Forma comparabile alla *T. diphoros* (Quenstedt, *Die Brach.* ecc. tab. 48, fig. 7) e alla *T. rupicola* dello Zitt. ed uguale alla forma di Bicicola descritta dal Meneghini (*Monogr.* ecc. p. 168) rapportata dallo Zittel alla var. *minor* (fig. 5, 9).

Differente da tutte queste è la forma raccolta dal Lotti nel Lias inferiore di Gerfalco e che, per completare la serie della *Aspasiae*, rappresento con la fig. 8. A questa forma corrisponde l'esemplare raccolto dal Capellini nel calcare nero a piccoli *arietiti* della Spezia, e che ho esaminato al museo di Bologna.

Dalle citate varietà si rileva per altro che i caratteri relativi alla conformazione della regione apiciale e alla commissura laterale delle valve rimangono sempre costanti e sempre diversi da quelli degli altri tipi affini appartenenti ad epoche geologiche diverse, e che inoltre, come accade in altre specie giuresi (*T. diphyoides* d'Orb.), le varietà accennate non sono dipendenti dall' età, poichè la maggior parte di esse si trovano contemporaneamente in grandi e in piccoli individui.

Per tutte le altre analogie che la *T. Aspasia* presenta con altre specie liassiche, si potrebbe ripetere quanto scrisse già il Meneghini (*Monogr. des foss.* ecc. p. 169). Qui non ricorderò che la *T. Chrysilla* testè descritta dall' Uhlig (*Ueber die Brach.* ecc. 1879, p. 17, Taf. 1, Fig. 6), e raccolta nel Lias medio di Sospirolo presso Belluno, la quale

differisce dalla *T. Aspasia* per la forma molto meno dilatata e per il lobo assai prolungato alla fronte.

Il gruppo della *T. Aspasia* appartiene, come si è accennato (vedi intr. pag. 334), al genere delle *Glossothyris*, le quali si moltiplicarono nel periodo liassico per poi trasformarsi nel giura superiore nel gruppo delle *diphyae*.

La *T. Aspasia* Mgh. è diffusissima nel Lias medio dell'Appennino centrale. È stata fino ad ora riscontrata alla *Marconessa* presso Cingoli, al Catria, a Cagli, a Val d'Urbia, a Pietralata (Furlo), a monte Gemmo, alle Grotte di S. Eustachio (Sanseverino-Marche), in tutto il gruppo montano del Suavicino, non che a Monticelli nella parte orientale della campagna romana. Anche nel Lias medio di Sicilia è frequentissima, come pure negli strati superiori di Klauss (Neumayr, *Die Zone des T. Aspasia in den Südalp.* Verhandl. d. k. k. g. Reichs. 1877).

La distribuzione geologica della *T. Aspasia* Mgh. è molto ampia; incomincia a manifestarsi nel Lias inferiore (marmo bianco di Gerfalco, calcare hierlatziano di Fagstein, calcare nero della Spezia) assume il suo massimo sviluppo nel Lias medio, parte superiore (Appennino centrale, Sicilia, Alpi meridionali) e persiste ancora nel Lias superiore (Lombardia, Breitenberg), mentre poi delle forme molto ad essa affini arrivano al Titoniano (*T. rupicola* Zitt.).

Terebratula fimbrioides E. Desl.

Tav. II, fig. 1, 2.

Terebratula fimbria D'Orbigny, *Prodrome*, 1er vol., 1847, p. 287 - non *T. Fimbria* Sow.

Terebratula fimbrioides E. Deslongchamps, *Mém. de la Soc. linn. de Normandie*, 1855, t. X, p. 303, pl. XVII, fig. 2-9. — E. Deslongchamps, *Brach.* nella *Pal. franç.* 1863, p. 171, pl. 44, pl. 45, fig. 1-3.

Il Meneghini (*Monogr. des foss.* ecc. p. 172), parlando incidentemente degli strati a *T. Aspasia* dell'Appennino centrale, notò esservisi rinvenute le due forme plicata e liscia della *T. fimbrioides* E. Desl.

L'esemplare liscio è largo quanto lungo (17mm) e non molto convesso (10mm), e, salvo leggerissime differenze, corrisponde per forma e dimensioni, e per ampiezza, forma, ed obliquità del forame all'esemplare figurato dal Deslongchamps (l. c. pl. 44, fig. 1) come un giovine individuo di *T. fimbrioides*. L'altro esemplare, molto più grande, è più lungo (30mm) che largo (27mm), non molto convesso (17mm): « liscio verso le regioni cardinali e ornato di pieghe più o meno profonde sulle regioni frontali e latero-frontali della valva perforata. Valve egualmente convesse, un poco gibbose specialmente nella parte mediana, riunite sotto una curva piuttosto forte. Commissura delle valve retta nei lati, ma alquanto ricurva alla regione frontale (convessità brachiale). La valva brachiale ha un lobo mediano frontale pochissimo pronunciato, opposto ad una depressione appena distinta sulla valva perforata. Indizi di pieghe nella regione frontale del lobo della valva brachiale ». (E. Desl. l. c.).

L'esemplare descritto ha a comune con la *T. fimbrioides* tutti i citati caratteri, che in parte ho tradotti dalla diagnosi che ne dà il Deslongchamps (l. c., p. 172). Però diversifica alquanto dalla specie di Francia per l'apice della valva perforata

assai più ricurvo e non troncato obliquamente dal forame, caratteri che non inducono a diversità specifica, perchè possono dipendere da accidentalità puramente individuali.

Una forma molto vicina alla *T. fimbrioides* è stata notata a Sospirolo e descritta dall'Uhlig col nome di *Terebratula* n. f. cfr. *fimbrioides* (*Ueb. d. lias. Brach. v. Sospirolo*, 1879, p. 21, Taf. II, Fig. 3).

Le due citate forme plicata (adulta) e liscia (giovine) di *T. fimbrioides* E. Desl. furono raccolte dal Mici negli strati a *T. Aspasia* del monte Pietralata (Furlo).

Terebratula sphenoidalis Mgh.

Tav. II, fig. 5, 6.

Terebratula sphenoidalis Meneghini, *Manoscritto*, 1853. — G. G. Gemmellaro, *Sopra alcune faune giur. e liass.* 1874, p. 62, tav. X, fig. 16-19.

Terebratula cfr. sphenoidalis Canavari, *Sui foss. del Lias inf. nell'Appenn. centr.* 1879, p. 20.

Dai due esemplari conservati al museo geologico di Pisa, raccolti negli strati a *T. Aspasia* di Monticelli, sui quali il Meneghini fondò la nuova specie, si ha:

Conchiglia piuttosto grande, ovale, a rapporto variabile tra lunghezza e larghezza, liscia, non molto convessa. Valva perforata uniformemente convessa; apice piccolo, non carenato ai lati, fortemente incurvato da nascondere in parte il largo e basso deltidio, forame piccolo e rotondo. Valva brachiale meno convessa della perforata, talora anche alquanto depressa alla regione frontale in cui presenta un indizio di seno mediano. Commissura laterale delle valve quasi retta, frontale alquanto arcuata verso la valva perforata. Punteggiatura sottilissima e uniformemente distribuita.

Dimensioni

	(I)	(II)
Lunghezza	18^{mm}	16,5^{mm}
Larghezza	16.5^{mm}	17.5^{mm}
Spessezza	8^{mm}	9,5^{mm}

Il Gemmellaro, che ebbe campo di osservare moltissimi esemplari di *T. Sphenoidalis* Mgh. degli strati a *T. Aspasia* di Sicilia potè anche rilevare « che, quando ha la superficie conservatissima, la si vede, con lente d'ingrandimento, ornata elegantemente di linee raggianti finissime e vicine fra loro, che dagli apici della conchiglia scorrono fino al suo contorno esterno » (l. c.). Riguardo alla forma poi notò che alcune volte è inequilaterale.

La *T. sphenoidalis* Mgh. presenta delle analogie con la *T. Andleri* (Oppel, *Brach. des unt. Lias*, Zeitsch. d. deutsch. geol. Ges. 1861, p. 536, Taf. X, Fig. 4), dalla quale però facilmente si distingue per essere meno allungata, per avere l'apice meno ricurvo e per non essere troncata alla fronte.

Una forma di *T. sphenoidalis* Mgh. alquanto più convessa ed a forame un poco più ampio della forma tipica incomincia a manifestarsi sin dal Lias inferiore, nel quale orizzonte ne rinvenni un esemplare incompleto al Suavicino (*Sui foss. del Lias inferiore* ecc.).

Terebratula undata Mgh.

Tav. II, fig. 7, 8.

Terebratula undata Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

Conchiglia subequivalve, orbicolare od allungata, subglobosa, alquanto assimetrica.

Valva perforata convessa, rilevata nel mezzo verso l'apice, che risulta comparativamente grosso e nettamente distinto dai fianchi cardinali, ripiegato alquanto dal lato sinistro, terminante in un forame oblungo, molto obliquo, contiguo all'umbone; nessun indizio di margini all'apice, deltidio molto ampio. Valva brachiale massimamente convessa all'umbone, scende rapidamente ai margini cardinali, molto più dolcemente verso la fronte, apice alquanto piegato dal lato destro. Linea marginale affatto diritta; la commissura delle valve si effettua sotto un angolo di circa 80°. Grossolana punteggiatura, molto spessa. Pieghe ondose concentriche più o meno marcate su ambedue le valve, le quali sono ornate da circa 40 costicine sottilissime irraggianti dagli apici, ma più costantemente visibili sulla valva perforata, non esattamente equidistanti, nè tutte eguali in sottigliezza, separate da spazi piani, non visibili ad occhio nudo.

	Dimensioni		
	(I)	(II)	(III)
Lunghezza	14mm	15mm	8mm
Larghezza	13mm	12mm	6,5mm
Spessezza	9mm	10mm	5mm

La *T. undata* Mgh., per la mancanza della falsa area, per le pieghe ondose, per la punteggiatura grossolana e sopratutto per le costicine e per avere gli apici, guardata la conchiglia dalla valva brachiale, alquanto ripiegati verso il lato destro, non si avvicina ad alcuna delle conosciute.

Il Mantovani (*Descr. geol. della Camp. romana*, 1875, p. 21) citò questa specie della collezione Rusconi, al quale era stato comunicato il nome dal Meneghini.

Si trovano al museo geologico di Pisa 5 esemplari di *T. undata* Mgh. del Lias medio di Monticelli.

Terebratula Erbaensis Suess.

Terebratula diphya? var. Suess, Sitzungb. der k. Akad. d. Wiss. Wien, VIII, 1852, p. 557, Taf. 31, Fig. 18, 19.

Terebratula Erbaensis Suess in Pictet, *Mél. Paléont. III.* 1869, p. 184, pl. 33, fig. 8. — Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 47, Taf. 15, Fig. 5-10. — Meneghini, *Monogr. des foss. du calc. rouge amm.* ecc. 1879, p. 165, pl. XXIX, fig. 6-8.

Terebratula mutica (Cat.) Stoppani, *Studi* ecc. 1857, p. 229, ex parte, non Catullo.

Terebratula digona (Sow.) Stoppani, *ibid.*-non Sowerby.

Terebratula incisiva, Villae, longicollis, circumvallata Stoppani, ibid. p. 229 e p. 402, 403.

La sinonimia citata fu stabilita dallo Zittel sin dal 1869 e riportata poi dal Meneghini (l. c.).

Dopo di aver riscontrato nell'ellissoide del Suavicino il Lias superiore litologicamente identico al Lias medio, ero in dubbio se gli esemplari di *T. Erbaensis* raccolti dal conte A. Spada nell'Appennino centrale e conservati nel museo di Pisa, appartenessero effettivamente al Lias medio, anzichè a quello superiore, in cui

nell' Italia settentrionale, come è noto, è frequentissima. Se non che avendone trovato un frammento assai caratteristico nella località denominata i *Campi dell'Acqua* presso Ficano, insieme alle più comuni forme di terebratule e d'ammoniti del Lias medio, ho potuto convincermi incominciare a manifestarsi sin da tale periodo la *T. Erbaensis*.

Dagli esemplari esaminati si ha:

Conchiglia inequivalve, triangolare, a fronte rotondata, a fianchi più o meno incavati. Angolo apiciale 62°-70° e fino 90°. Valva perforata più o meno convessa, brachiale molto meno e talora anche piana. Apice non molto sporgente, incurvo, troncato da un forame alquanto ellittico, di mediocre grandezza, molto obliquo, solo per minima parte compito da deltidio triangolare a base larghissima in paragone alla brevissima altezza. Rughe e linee concentriche d'accrescimento poco sporgenti, ma evidentissime. Punteggiatura minuta e molto spessa.

Diramazioni venose marcatissime, regolarmente irraggianti dagli apici per via dicotoma al margine palleale, visibili per trasparenza su ambedue le valve, talora rilevate anche nel guscio. L'apparato apofisario non è punto conservato.

Dimensioni

	(I)	(II)
Lunghezza	49^{mm}	27^{mm}
Larghezza	48^{mm}	32^{mm}
Spessezza	20^{mm}	15^{mm}

La *T. Erbaensis* Suess è, dopo la *T. Aspasia* Mgh., uno dei brachiopodi più frequenti nel Lias medio dell'Appennino centrale. La forma predominante è quella « très-élargie, à angles arrondis, et deprimée » (Meneghini, *Monogr.* ecc. p. 166) figurata già dallo Zittel (*Geol. Beob.* ecc. Taf. 15, Fig. 8) e alla quale lo Stoppani aveva imposto il nome di *T. Villae*. Parecchi esemplari poi corrispondono a quella varietà indicata dallo Stoppani col nome di *T. mutica*. È rimarchevole anche il fatto di rinvenirsi nell' Appennino centrale la *T. Erbaensis* quasi sempre in valve separate.

Nella memoria dello Spada e dell'Orsini (*Boll. Soc. geol. XII*, 1855, p. 1205, 1207) questa specie viene indicata col nome di *T. diphya* e di *T. lampas* Sow. (Meneghini, l. c. p. 167).

Nel museo di Pisa si trovano conservati 17 esemplari di *T. Erbaensis* Suess della *Marconessa* presso Cingoli, 4 del Catria, ed 1 dei *Campi dell'Acqua* presso Ficano (Suavicino). Alcuni esemplari si trovano pure in Urbino nella collezione privata del Mici, il quale li raccolse nel Lias medio del monte Pietralata (Furlo).

Terebratula Rotzoana Sch.

Tav. II, fig. 3, 4.

Terebratula Rotzoana Schauroth, *Verz. der Verstein. in H. Nat. Cab. zu Coburg.* 1865, p. 125, Taf. II, Fig. 6. — Benecke, *Ueber Trias u. Jura in den Südalp.* 1866, p. 167, tab. III, fig. 1-5. — Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 49, Taf. 15, Fig. 4. — Meneghini, *Monogr. des foss. du calc. rouge amm.* nella *Pal. lomb.* 1879, p. 170.

Terebratula intermedia (Sow.) Stoppani, *Studi* ecc. 1851, p. 229-non Sowerby.

Due esemplari, l'uno della *Marconessa*, l'altro del monte Pietralata (Furlo), furono già dal Meneghini riferiti a questa specie.

L'esemplare « provenant du Lias moyen de la *Marconessa* a 29^{mm} de longeur et presque 28^{mm} de largeur; 17^{mm} d'épaisseur; petite valve très-peu et uniformement convexe; le crochet de moyenne grandeur, le bord du foramen touche presque à la petite valve; les arêtes bornent une fausse area très-étroite » (Meneghini, l. c.).

Il secondo esemplare fu raccolto dal Mici nel Lias medio del Furlo. Ha conservato semplicemente la valva perforata di forma triangolare; misura 30^{mm} di lunghezza, 27^{mm} di larghezza; ha l'apice robusto e più incurvato di quello che non sia nel precedente e prolungato al disotto del deltidio, troncato da un forame ovale abbastanza grande. Questo esemplare è assai più allungato di quello che non sia l'esemplare raccolto nel Lias superiore della *Villa Moderna* presso Cagli e figurato dallo Zittel (*Geol. Beob.* ecc.), come anche ha una forma alquanto più triangolare e più dilatata alla regione frontale dell'esemplare rinvenuto nel Lias superiore alle *Cave delle Foci* sul fianco occidentale del Catria, citato già dal Meneghini (l. c.) e conservato nel museo geologico di Pisa.

Terebratula Renieri Cat.

Tav. II, fig. 9, 10.

Terebratula Renieri Catullo, *Saggio di zoolog. foss.* 1827, p. 167, tav. X, fig. *i*, *l*. — Zittel, *Geolog. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 35, Taf. 15, Fig. 3. — Meneghini, *Monogr. des foss. du calc. rouge amm.* nella *Pal. lomb.* 1879, p. 171.

Terebratula fimbriaeformis Schauroth, *Verzeich. d. Verstein. in H. Nat. Cab. zu Coburg*, 1865, p. 124, Taf. II, Fig. 5. — Benecke, *Ueber Triàs und Jura in d. Südalp.* 1866, p. 166, Taf. III, Fig. 8, 9.

Terebratula fimbria (Sow.) Benecke, l. c.-non Sowerby (scd. Zittel).

Terebratula sphaeroidalis (Sow.) Stoppani, *Studi* ecc. 1857, p. 229-non Sowerby.

Furono dal Meneghini riferiti già a questa specie due esemplari trovati dal Mici nel Lias medio del monte Pietralata (Furlo). Nell'esemplare maggiore « onze gros plis rayonnent du crochet fortement recourbé et très-bien conservé; la petite valve et toute la région palléale sont au contraire en très-mauvais état » (Meneghini, *Monogr.* ecc. p. 171). Il piccolo esemplare « parfaitement conservé a 17^{mm} de longueur, 14^{mm} de largeur, 10^{mm} d'épaisseur, 9 gros plis un peu inégaux sur la grande valve et 9 aussi ou 10 mais très-inégaux sur la petite, les uns et les autres effacés vers les crochets » (Meneghini, l. c.).

Due altri esemplari di *T. Renieri* Cat. si trovano al museo di Pisa. Il più grande di questi mi è stato comunicato dal prof. Mariani come proveniente dal Lias medio di monte Guallo o Fargno presso Camerino. Misura 26^{mm} di lunghezza, 24^{mm} di larghezza e 16^{mm} di spessezza; presenta 9 pieghe molto grossolane e alquanto irregolari sulla valva perforata, 8 sulla valva brachiale; apice non molto ricurvo, troncato da un forame abbastanza grande, obliquo; deltidio ampio, concavo. Si allontana alquanto dall'esemplare di *Villa Moderna* presso Cagli descritto e figurato dallo Zittel per le coste assai più rare e più grossolane, mentre poi si avvicina molto all'esemplare

plare tipico di questa specie raccolto dal Meneghini insieme al Catullo nel monte Sochero e che si trova nel museo di Pisa.

L'altro esemplare fu raccolto nel Lias medio delle *Cave delle Foci* sulla chinata occidentale del Catria; è a coste meno grossolane e più spesse, pressochè lungo (21,5^{mm}) quanto largo (21^{mm}), con una spessezza di 14,5^{mm}. Nella valva perforata si contano 12 coste delle quali due laterali dicotome; nella valva brachiale se ne contano invece 14 o 15 molto irregolari, che svaniscono quasi totalmente nella regione umbonale. Apice molto ricurvo e quasi contiguo all'umbone.

Oltre ai citati esemplari lo Zittel (*Geol. Beob.* ecc.) ne rinvenne due negli strati superiori al Lias medio del *Castellaccio* presso monte Catria, e un esemplare fu raccolto dal Mariotti nel calcare grigio (Lias medio?) immediatamente inferiore alle marne rosse del Lias superiore presso *Villa Moderna* non lungi da Cagli. Questi esemplari si trovano nel museo paleontologico di Monaco (Baviera).

Nel calcare del Lias medio di Sospirolo (Belluno) è stata rinvenuta una forma di terebratula molto affine alla *T. Renieri*, che dall'Uhlig fu designata col nome di *T. pacheia* (*Ueber d. Brach. von Sospirolo* ecc. 1879, pag. 20, Taf. II, Fig. 1,2).

Terebratula Paronai, nov. f.

Tav. II, fig. 11.

Terebratula sp. nov. Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

« Conchiglia subequivalve, convessa, allargata, triangolare, biloba. Valva perforata divisa in tre regioni: media quasi lineare, eguale ad un quinto della larghezza, poco convessa e separata mercè due solchi dalle laterali. Apice poco sporgente (rotto); margini dell'apice e falsa area affatto indistinti. Valva brachiale scavata da solco mediano corrispondente al mesolobo della opposta e che comincia a poca distanza dall'umbone; commissura laterale quasi diritta, frontale leggermente sinuosa al seno. Pieghe concentriche di accrescimento forti; punteggiatura poco profonda, non minuta, regolare ».

Dimensioni

Lunghezza 23^{mm} Larghezza 31,5^{mm} Spessezza 12^{mm}

Nel manoscritto del Meneghini, dal quale n'è tolta la descrizione, questa specie è indicata col nome di *Terebratula* sp. n.

La *T. Paronai* è una delle forme più antiche del gruppo della *T. diphyoides* d'Orb. e presenta analogie notevoli con la figura che di questa specie ne dà il Pictet (*Ét. pal. sur la faune à T. diphyoides de Berrias* pl. 24, fig. 14*a,b*. Genève, 1867). Se ne distingue alquanto per la forma ed essenzialmente per non avere sul lobo della valva perforata il seno longitudinale.

La descritta specie fu rinvenuta negli strati a *T. Aspasia* del Lias medio di Monticelli.

Terebratula cerasulum Zitt.

Terebratula cerasulum Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 37, Taf. 14, Fig. 5, 6. — Canavari, *La Montagna del Suavicino, Oss. geol. e pal.* Boll. r. Com. geol. 1880, n. 1-2, p. 68.

I due esemplari che riferisco a questa specie li raccolsi nel Lias medio dei *Campi dell'Acqua* presso Ficano nel gruppo del Suavicino. Di uno è conservata semplicemente la valva perforata quasi semisferica e con forti rughe di accrescimento. Il secondo esemplare è una « conchiglia ellissoidale, convessa e liscia ed offre d'ogni parte contorni rotondeggianti » (Zittel, l.c.); non misura che 9^{mm} di lunghezza 7,5^{mm} di larghezza, 6^{mm} di spessezza. Corrisponde quindi per le dimensioni al piccolo esemplare citato dallo Zittel (fig. 6). La regione palleale non è ben conservata, sicchè in tale parte della conchiglia resta indecisa la linea di commissura delle valve, però la sua forma esterna e la conformazione dell'apice sono caratteri molto importanti e molto simili a quella della *T. cerasulum*, per indurre a identificarla, come facciamo, a questa.

Lo Zittel rimarcò (l. c.) che tale singolare terebratula rammenta la *Hinniphoria globularis* Suess del calcare di Stramberg.

Parecchi esemplari di *T. cerasulum* raccolti dallo Zittel negli strati a *T. Aspasia* alle cave di pietra delle *Foci di Cantiano* (Catria) si trovano nel museo paleontologico di Monaco (Baviera).

Terebratula Picciniinii Zitt.

Terebratula Picciniinii Zittel, *Geolog. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 37, Taf. 14, Fig. 7. — G. G. Gemmellaro, *Sopra alcune faune giur. e liass.* 1874, p. 64, tav. XI, fig. 4.

Lo Zittel raccolse tre esemplari di questa piccola terebratula nel Lias medio del *Passo del Prete* presso monte Catria. Il Meneghini riferì alla *T. Picciniinii* Zitt. un esemplare molto incompleto rinvenuto alla *Marconessa* presso Cingoli e conservato al museo geologico di Pisa. Esso presenta semplicemente la parte posteriore della conchiglia, mentre l'anteriore è inclusa nella roccia. Per quanto si può arguire da ciò che si vede nella regione palleale, corrisponde moltissimo all'esemplare descritto e figurato dallo Zittel.

Il Gemmellaro trovò un unico esemplare di *T. Picciniinii* Zitt. negli strati a *T. Aspasia* Mgh. dei dintorni di Palermo, alquanto diverso però dalla specie tipica dell'Appennino centrale per essere « un poco più sviluppato, meno ovale e con seno sulla regione frontale alquanto più largo » (G. G. Gemmellaro, l. c.).

Terebratula cfr. punctata Sow.

cfr. Terebratula punctata Sowerby, *Min. conch.* 1812, vol. I, p. 46, tab. XV, fig. 4. — Davidson, *A Mon. of Brit. Foss. Brach.* 1850, vol. I, p. 45, pl. VI, fig. 1-6. — Quenstedt, *Der Jura.* 1857, p. 144, Taf. XVIII, Fig. 5. — E. Deslongchamps, *Brach.* nella *Pal. franç.* 1863, p. 160, pl. 12, fig. 1-3, pl. 40, pl. 41, fig. 1, 2. — Davidson, *A Mon.* ecc. 1876, pl. XVI, fig. 6-8, 11, 12.

cfr. Terebratula sinemuriensis Oppel, *Ueb. Brach. der untern Lias*, Zeitsch. der deutsch. geol. Gesellsch. 1861, p. 534, Taf. X, Fig. 2.

Conchiglia più lunga (21^{mm}) che larga (18^{mm}) e alquanto depressa (10,5^{mm}). Valva perforata uniformemente convessa, apice robusto, poco incurvato, senza traccia di carena ai lati; forame oblungo, abbastanza grande. Valva brachiale con una leggera

depressione mediana che dalla fronte si estende fin quasi alla regione cardinale. Commissura delle valve retta ai lati, leggermente sinuosa alla fronte. La punteggiatura, che in questa specie secondo il Sowerby (loc. cit.) dovrebbe essere molto minuta e disposta in linee ondulate, non è molto distinta nell'unico esemplare esaminato, rinvenuto nel Lias medio di Monticelli.

La *T. punctata* Sow. è una delle più variabili del genere (E. Deslongchamps, l. c.) e si avvicina per la sua forma obovale a molte specie liassiche, con le quali con facilità potrebbe confondersi. E perciò che l'esemplare descritto non si riferisce con certezza alla *T. punctata* Sow. con la quale ha di certo molti caratteri esterni a comune, in ispecie se si paragona con la *T. punctata* tipica del Sowerby illustrata e figurata da Davidson (*A Mon.* ecc. 1876 fig. 6); ma nulla si può dire riguardo ai caratteri interni del tutto sconosciuti nella specie appenninica.

Terebratula (W?) Meneghinii Parona, ms.

Tav. II, fig. 12.

Conchiglia inequivalve, subpentagonale, piuttosto piccola, lunga quasi quanto larga (1,5^{mm} di differenza), liscia, troncata leggermente alla fronte. Valva perforata convessa, con la massima convessità ad un terzo dall'apice, si abbassa poi alla fronte, ove forma un piccolo seno ma distintissimo, limitato lateralmente mercè due pieghe rotondate non molto sviluppate. Apice piccolissimo, robusto, incurvo, poco sporgente, forame contiguo all'umbone; margini dell'apice ottusi, falsa area mediocre. Valva brachiale con la maggiore convessità all'umbone, si abbassa poi alla fronte rialzandosi verso la valva perforata e producendo un seno mediano longitudinale corrispondente al lobo della valva perforata; nella parte marginale di questo seno vi è un indizio di un leggerissimo rialzo. Linea marginale subpentagonale. La commissura delle valve si effettua sotto un angolo ottuso. Superficie finamente punteggiata e con sottili linee d'accrescimento.

L'esemplare descritto presenta le seguenti dimensioni:

Lunghezza 14,5^{mm} Larghezza 16,5^{mm} Spessezza 8,5^{mm}

Per le proporzioni la *T.* (*W?*) *Meneghinii* ha gradissima affinità con la *Waldheimia Furlana* Zitt. var. *abbreviata* Mgh., dalla quale diversifica per la conformazione della commissura frontale, per il lobo mediano sulla valva perforata e per lo sviluppo maggiore della falsa area.

Un solo esemplare del Lias medio di Monticelli conservato nel museo di Pisa, e che il Meneghini ascriveva dubbiosamente alla menzionata varietà. Il Parona trovò a Gozzano questa medesima forma che intitolò al Meneghini, al quale ne comunicò privatamente la descrizione e la figura.

Terebratula (W?) filosa Mgh.

Tav. II, fig. 13.

Terebratula filosa Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

Conchiglia triangolare, cordiforme, più larga che lunga, più o meno convessa, con la massima convessità nella regione apiciale, appianata sulle facce laterali cardinali. Valva perforata leggermente scavata nel mezzo presso alla fronte; apice robusto,

incavato, poco sporgente, senza margini laterali nè falsa area, forame piccolo, deltidio bassissimo e molto ampio. Valva brachiale depressa nel mezzo alla fronte, molto convessa all'umbone, con un solco longitudinale ben distinto che dalla fronte si protende verso la regione apiciale. Commissura delle valve leggermente sinuosa nella regione apiciale, pel rimanente diritta; rughe e linee d'accrescimento molto marcate e molto irregolari; punteggiatura minutissima assai evidente. In un esemplare poi la conchiglia è ornata da filetti raggianti sottilissimi, fitti, regolari, che intersecando sottili linee concentriche rendono la superficie elegantemente clatrata.

Dimensioni

	(I)	(II)	(III)
Lunghezza	26,5^{mm}	24^{mm}	19,5^{mm}
Larghezza	35^{mm}	27^{mm}	23^{mm}
Spessezza	13,5^{mm}	15^{mm}	10^{mm}

La descritta specie ha grandissima analogia con alcune forme della *Terebratula* (*W.*) *cor* Lamk. (Deslongchamps, *Brach.* nella *Pal. franç.* pl. X, XI.), dalla quale si distingue facilmente per non essere depressa nella regione apiciale e gibbosa verso la fronte nonchè per la mancanza assoluta di margini laterali all'apice. Per questo stesso carattere l'esemplare di *T. filosa* che rappresento con la fig. 13 è nettamente separato da quella forma della *Terebratuta* (*W.*) *numismalis* Lamk. figurata dal Deslongchamps (l. c. pl. XIII, fig. 4), alla quale pel rimanente molto si avvicina. Gli ornamenti esteriori poi che si osservano nella *Terebratula* (*W?*) *filosa* Mgh. la distinguono dalle due specie affini menzionate.

I tre esemplari della descritta specie, che si trovano nel museo geologico di Pisa, furono rinvenuti negli strati a *T. Aspasia* di Monticelli; li riferisco dubbiosamente alla sezione delle *Waldhemiae* per le analogie che presentano con le *W. cor* e *numismalis.*

Gen. **Waldheimia** King.

Waldheimia indentata Sow. sp. var.

Tav. III, fig. 6.

Terebratula indentata Sowerby, *Min. conch.* 1825, vol. V, p. 65, pl. 455, fig. 2.

Waldheimia indentata Deslongchamps, *Brach.* nella *Pal. franç.* 1863, p. 133, pl. 32, fig. 1-13. — Davidson, *Brach. Suppl. to the jurass.* ecc. 1878, p. 159, pl. XXI, fig. 10-15.

L'esemplare che riferisco a questa specie, per la forma corrisponde precisamente a quello rappresentato dal Davidson con la fig. 12 (l. c.). È più lungo (15^{mm}) che largo (12^{mm}) e molto convesso (10^{mm}). Valva perforata alquanto più convessa nella regione apiciale che alla fronte in cui è troncata, ma senza indizio di seno, per il qual carattere si scosta un poco dalla forma tipica della *W. indentata*; anche l'apice è meno ricurvo di quello che non si osservi negli esemplari figurati dagli autori che si occuparono di questa conchiglia; ma tale carattere, come si è osservato, non può indurre a diversità specifica. Valva brachiale con un seno mediano frontale ampio, poco profondo, ben poco esteso. Commissura delle valve diritta se si toglie una

leggera inflessione nella regione frontale verso la valva perforata. Punteggiatura elegantissima, minuta, regolarmente distribuita.

Il menzionato esemplare fu raccolto nel Lias medio di Monticelli.

Waldheimia furlana Zitt.

Tav. III, fig. 1, 2, 3.

Terebratula (Waldheimia) Furlana Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 40, Taf. 14, Fig. 8 *a-d*

Terebratula Labellum Meneghini, *Manoscritto*, 1853 (1).

Conchiglia inequivalve più o meno allungata, talchè ora è di forma ovale ed ora bislunga, liscia, compressa, la fronte rotondata ed i margini laterali ad essa convergenti con pochissima inclinazione, leggermente escavati. La valva perforata è convessa a tetto sulla linea mediana, ma senza decisa carena, con la massima convessità in vicinanza all'apice. Questo è molto piccolo, pochissimo sporgente, incurvo, forame contiguo all'umbone, per modo che il deltidio sembra del tutto mancare. Falsa area molto angolosa, frequentemente indeterminata: margini ottusi, pochissimo manifesti, spesso affatto indistinti, ma quando sono visibili continuati lateralmente senza raggiungere il margine cardinale. Valva brachiale convessa all'umbone, dolcemente concava nel mezzo, passa poi gradatamente a costituire il seno più o meno profondo, alcune volte appena distinto, che occupa tutta la fronte ed al quale nella valva perforata talora, ma raramente, corrisponde una debole ripiegatura. Commissura delle valve alquanto ondulata nelle regioni laterali, fortemente arcuata alla fronte (concavità brachiale). Sottili linee d'accrescimento parallele alla regione palleale ; superficie minutamente punteggiata. Traccia indistinta del setto mediano.

Lo Zittel che descrisse questa specie (l. c.) la cita rarissima negli strati a *T. Aspasia* del Furlo, sicchè non potè osservare la grande variabilità a cui va soggetta. Il Meneghini chiamò questa specie col nome di *Terebratula Labellum* e ne distinse due varietà, la var. *abbreviata* e la var. *angustata*.

Var. *abreviata* Mgh. Conchiglia lunga quanto larga con la regione frontale della valva brachiale fortemente ripiegata verso la valva perforata (fig. 2).

Var. *angustata* Mgh. Conchiglia alquanto più lunga che larga, con la fronte più angustata e colla linea marginale più sinuosa (fig. 3).

A queste due varietà ne aggiungo una terza, var. *elongata*, nella quale la valva brachiale è più rigonfiata che non sia nelle descritte e manca del seno mediano (fig. 2).

Dimensioni della var. *abreviata* Mgh.

Lunghezza $11{,}5^{mm}$ — 15^{mm} Larghezza 12^{mm} — 15^{mm} Spessezza $6{,}5^{mm}$ — 10^{mm}

Dimensioni della var. *angustata* Mgh.

Lunghezza 18^{mm} Larghezza 16^{mm} Spessezza 8^{mm}

Dimensioni della var. *elongata* m.

Lunghezza 18^{mm} Larghezza 14^{mm} Spessezza 9^{mm}

(1) Si cita questa sinonimia, quantunque solamente manoscritta, perchè impiegata in varie collezioni private d'Italia.

L'esemplare figurato dallo Zittel (l. c.) non corrisponde esattamente ad alcuno di quelli da noi rappresentati, ma ha una forma intermedia tra la var. *elongata* e la var. *angustata*.

La var. *angustata* Mgh. presenta qualche rassomiglianza con la *Waldheimia florella* D'Orb. (Davidson, *Foss. Brach. suppl.* 1878, p. 178, pl. XXIII, fig. 11), dalla quale è distinta per la piccolezza dell'apice, per la piccolezza o mancanza di falsa area, per il minor sviluppo del seno mediano sulla valva brachiale e per la minor lunghezza della conchiglia, onde le dimensioni ne risultano abbastanza differenti.

La var. *elongata* m. invece presenta analogie con la *Waldheimia amygdaloides* Mgh. (vedi specie seguente).

Negli strati a *T. Aspasia* Mgh. di Monticelli la *Waldheimia Furlana* è frequentissima; al Furlo invece è piuttosto rara. Alcuni esemplari di quest'ultima località si conservano nel museo geologico di Monaco di Baviera (Zittel, l. c.); 18 esemplari si trovano al museo di Pisa, tutti provenienti da Monticelli, della quale località ne abbiamo osservati alcuni al museo geologico di Roma.

Waldheimia amygdaloides Mgh.

Tav. III, fig. 4, 5.

Terebratula amygdaloides Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

« Conchiglia subequivalve, ovoidea, allungata, liscia, margini cardinali convergenti con angolo leggermente acuto, margini laterali convergenti verso la fronte rotondata. Valva perforata convessa a tetto pianeggiante nel mezzo verso la fronte, rimanendo la regione posteriore mediana separata mercè spigoli ottusi e tondeggianti dai fianchi che ne succedono con rapido declivio. Apice molto piccolo, pochissimo sporgente, appena incurvo; forame contiguo all'umbone; margini dell'apice ottusi, ma distintissimi; essi incurvandosi raggiungono all'estremità il margine cardinale, circoscrivendo così una falsa area che in ciascuno dei due lati presenta una forma lanceolata. Valva brachiale molto convessa all'umbone, che sorge con superficie normale al piano di congiunzione delle due valve, la convessità poi va uniformemente diminuendo verso la fronte e verso i fianchi. Commissura laterale quasi diritta, solo leggermente convessa nell'ultima sua estremità frontale, superficie ornata da sottilissime linee raggianti, inegualmente distribuite e appena distinte (4-8 su ciascuna valva). Punteggiatura regolarmente ed uniformemente distribuita » (Meneghini, l. c.). Traccia indistinta del setto mediano.

Le dimensioni della specie descritta ordinariamente sono le seguenti:

Lunghezza 20^{mm} Larghezza 14^{mm} Spessezza $10{,}5^{mm}$

La *Waldheimia amygdaloides* ha grandissima affinità con la *Valdheimia Furlana* Zitt. var. *elongata*, come pure ha qualche analogia riguardo alla forma esterna con la *T. punctata* Sow., ma ne differisce per la forma a tetto della valva perforata, per la piccolezza dell'apice e per la grande convessità della valva brachiale.

I 4 esemplari conservati nel museo di Pisa provengono dal Lias medio di Moncelli, alcuni esemplari si trovano nella collezione del Rusconi, e che furono ricordati dal Mantovani (*Descrizione della Campagna romana*. 1875, p. 21) ed altri nel museo di Roma.

Waldheimia bilobata Stopp.

Terebratula bilobata Stoppani, *Studi geol. e pal. sulla Lombardia*, 1857, p. 404.

Terebratula (Waldheimia) bilobata Zittel, *Geol. Beob. auf den Central-Apennin.* 1869, p. 39, Taf. 15, Fig. 1, 2.

Waldheimia bilobata Meneghini, *Monogr. des foss. du calc. rouge amm. Pal. lomb.* 1879, p. 173.

Lo Zittel cita questa specie degli strati a *T. Aspasia* del Furlo. Noi non ne possediamo alcun esemplare.

Waldheimia apenninica Zitt.

Terebratula (Waldheimia) apenninica Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 39, Taf. 14, Fig. 9 *a-d.*

Rinvenuta dallo Zittel nel Lias medio tra Cagli e Cantiano. Nessun esemplare di questa specie è conservato al museo di Pisa.

Gen. **Rhynchonella** Fischer.

Rhynchonella aptyga Canav.

Tav. III, fig. 7.

Rhynchonella aptyga Canavari, *La montagna del Suavicino. Oss. geol. e pal.* Boll. r. Com. geol. n. 1 e 2, 1880, p. 69.

Rinvenni due esemplari di questa specie negli strati a *T. Aspasia* dei campi dell'Acqua presso Ficano e la descrissi, senza darne la figura, nel lavoro che pubblicai intorno al Suavicino (l. c.) Credo opportuno riportare qui le osservazioni che feci proponendo questa nuova forma di *Rhynchonella*. Essa, scrivevo, ha grandissima affinità con la *Rh. Mariotti* Zitt., dalla quale si discosta principalmente per la conformazione del seno mediano sulla valva perforata, per il lobo corrispondente sull'altra valva e per la mancanza assoluta di pieghe longitudinali. Per essa si potrebbe ripetere quanto lo Zittel accennava per la *Rh. pisoides*, che cioè l'insieme del suo *habitus* consiglierebbe a porla nel genere *Terebratula*, se la struttura fibrosa non la dimostrasse appartenere al genere *Rhynchonella.*

È assai rimarchevole il rinvenirsi nel Lias medio dell' Appennino centrale un gruppo di *Rhynchonellae* a conchiglia liscia; che, laddove si ponesse mente al modo tutto speciale con il quale nei brachiopodi il mantello è legato alla conchiglia, meriterebbe certamente di essere distinto dalle *plicosae* (de-Buch) e dai sottogeneri di queste, con le quali sarebbe collegato mediante la *Rh. Mariotti* Zitt.

Questa specie ha molta analogia con la *Rh. capillata* Zitt. (*Die Fauna der alt. Ceph.* ecc. Cassel, 1870, p. 267, Taf. 38, Fig. 38) del titonico di Czorstyn.

Rhynchonella deltoidea Mgh. *ms.*

Tav. IV, fig. 1.

Conchiglia inequivalve, triangolare, alquanto più larga che lunga, ornata da sottilissime strie concentriche. Valva perforata con la massima convessità nella regione

apiciale, dolcemente si abbassa alla fronte, in cui ripiega alquanto verso la valva brachiale. Apice ricurvo, non molto acuto, falsa area nulla, deltidio non visibile. Valva brachiale convessa nella regione apiciale, si abbassa alla fronte. Linea commissurale retta nelle regioni laterali, alquanto incurvata verso la valva brachiale alla fronte.

Dimensioni

Lunghezza 13^{mm} Larghezza 14^{mm} Spessezza 17^{mm}

Questa *Rhynchonella* del gruppo delle *Aptygae* trova corrispondenza con la *Rh. laevis* Sss. degli strati di Hallstat e con la *Rh. Zisa* Opp. del Dogger superiore. Al tipo più antico, cioè alla *Rh. laevis*, si avvicina per gli ornamenti esteriori, ma se ne allontana per essere alquanto più dilatata, per la mancanza totale di falsa area e per avere la linea di commissura frontale ripiegata verso la valva brachiale, anzichè verso l'opposta. Dalla *Rh. Zisa* facilmente si distingue per essere meno rigonfia e per avere la maggiore convessità nella regione apiciale, anzichè verso la fronte e per essere più dilatata.

L'unico esemplare di questa specie conservato al museo di Pisa proviene dagli strati a *T. Aspasia* della Marconessa presso Cingoli.

Rhynchonella pisoides Zitt.

Rhynchonella pisoides Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 41, Taf. 14, Fig. 15, 16.

Terebratula zeina Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

Lo Zittel fondò questa specie sopra alcuni esemplari che raccolse alle Foci di Cantiano e la definì con le seguenti parole:

« Conchiglia a palla, in forma di pisello, liscia, rotonda, triangolare, un po' più larga che lunga, assai turgida. L'apice altamente rilevato e fortemente ricurvato da toccare quasi la valva brachiale, il deltidio non visibile. Valva brachiale con un profondo seno mediano, in fondo al quale appena accennate due lievi pieguzze; la valva perforata è in proporzione mediocremente convessa. I margini sogliono spesso essere un po' ricurvi, cosicchè riguardando la regione palleale, questa offre un caratteristico spessore ».

Lo Zittel inoltre ne figurò due forme, una delle quali (fig. 15) si allontana alquanto dalla tipica (fig. 16) per essere alquanto più triangolare, più dilatata, meno turgida e per avere il seno mediano della valva brachiale più marcato e quasi senza indizio di pieguzze, cosicchè ne risulta diversa anche la commissura frontale delle valve. Al Suavicino si rinvengono entrambi queste forme. In alcuni esemplari di *Rh. pisoides* della Marconessa e di Cagli la linea commissurale frontale delle valve presenta una forma intermedia a quella delle due figurate dallo Zittel, dalle quali alcune si allontanano alquanto per avere il solco mediano frontale della valva brachiale pochissimo sviluppato e talora quasi nullo. Ma tutte queste varietà legate da passaggi graduali e insensibili, e che si osservano tra esemplari raccolti nello stesso posto, non possono indurre a diversità specifiche.

Alla menzionata conchiglia il Meneghini (l. c.), avuto riguardo alla forma a guisa di granturco, aveva già imposto il nome di *Terebratula zeina*, facendo rimarcare per altro nella descrizione manoscritta che aveva la superficie fibrosa e non punteggiata.

Per tale carattere, non che poi per la conformazione dell'apice, che in alcuni esemplari esaminati è conservatissimo, si deve riferire la descritta specie al genere *Rhynchonella*, come osservò lo Zittel.

La *Rh. pisoides* Zitt. fu comparata dall'autore alla *Rh. retroplicata* Zitt., da cui fu distinta per la forma a palla, per il maggiore sviluppo dell'apice, per il seno più profondo della valva brachiale e per la mancanza di pieghe laterali. Quest'ultimo carattere per altro non è sempre costante nella *Rh. retroplicata*, della quale ho osservata una forma a superficie pressochè liscia, che indica quasi un passaggio tra essa e la *Rh. pisoides*.

Si trovano al museo di Pisa 11 esemplari di *Rh. pisoides*, dei quali 4 provenienti da Cagli, e di questi 1 raccolto dallo Scarabelli a Ponticello, 4 dalla Marconessa e 3 dal Suavinio.

Rhynchonella zeina nov. f.

Tav. III, fig. 8.

Conchiglia piccola, a forma di granturco, lunga quanto alta, minutamente fibrosa. Valva perforata rigonfiata, con un seno mediano che dalla regione apiciale, in cui è poco manifesto, si estende fino alla fronte, in cui il lembo mediano della valva ripiega verso l'opposta; questo seno è limitato da due distintissimi rialzi, ai quali succedono due pieguzze appena marcate; apice pochissimo sporgente e quasi contiguo all'umbone, onde bassissimo ne risulta il deltidio, forame rotondo abbastanza grande. Valva brachiale con un forte lobo mediano limitato da due solchi laterali poco profondi, ai quali fanno seguito due leggere pieghe. Commissura diritta nelle regioni laterali, fortemente sinuata alla fronte, in cui la conchiglia assume la maggiore spessezza. Sotto alla lente la conchiglia si mostra ornata da sottilissime e numerose linee concentriche.

Dimensioni

Lunghezza 9^{mm} Larghezza 9^{mm} Spessezza 9^{mm}

La forma caratteristica di questa conchiglia è meglio palese con la figura che con la descrizione che ne abbiamo data. Essa a nessuna delle liassiche si avvicina, e per essa sua forma le abbiamo imposto il nome di *zeina*, che il Meneghini già usò per un'altra specie, che lo Zittel pubblicò sotto il nome di *Rh. pisoides* e che precedentemente si è descritta.

Rhynchonella Mariottii Zitt.

Tav. IV, fig. 2, 3.

Rhynchonella Mariottii Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 41, Taf. 14, Fig. 17 *a-d.* — G. G. Gemmellaro, *Sopra alcune faune giur. e liass.* 1874, p. 84.

Lo Zittel che rinvenne questa specie alle *Foci di Cantiano* ne diede la seguente definizione:

« Conchiglia più larga che lunga, molto convessa, a contorno rotondato. Apice corto, appena rilevato, contiguo talmente alla valva brachiale da non lasciare spazio per il deltidio. Valva brachiale nella regione apiciale fortemente convessa; nella regione palleale forma un rialzo mediocremente alto, sottile, fiancheggiato d'ogni lato da

una piega bene scolpita e provvista di un seno mediano infossato. I lati portano due o tre pieghe secondarie appena distinte, o sono del tutto lisci. Nel seno ampio e profondo della valva perforata si rileva appena una sottile piega mediana ».

Rinvenni due esemplari di questa specie negli strati a *T. Aspasia* dei *Campi dell'Acqua* presso Ficano; come altrove notai (*La montagna del Suavicino* ecc. Boll. r. Com. geol. n. 1-2, 1880). Essi si riferiscono a quella varietà nella quale le parti laterali sono del tutto lisce; le loro valve a struttura fibrosa marcatissima sono ornate da strie concentriche assai sottili. Questi esemplari si allontanano poi alquanto dalla descrizione che ne dà lo Zittel per non avere l'apice della valva perforata contiguo all'umbone della valva brachiale e per mostrare quindi, però non molto distinte, le due linee che limitano il deltidio assai basso. Questo carattere per altro, non espresso nella descrizione che ne dà lo stesso Zittel, è evidente nell'esemplare che rappresenta con la fig. 17 (l. c.) e che corrisponde a quello che io figuro, il quale ha le seguenti dimensioni:

Lunghezza 12^{mm} Larghezza 13^{mm} Spessezza 8^{mm}

Il Gemmellaro (*Sopra alcune faune* ecc.) ha rinvenuta nei calcari marmorei (zona a *T. Aspasia*) dei monti palermitani una forma di *Rh. Mariottii* alquanto diversa dalla tipica per essere meno dilatata.

La *Rh. Mariottii* Zitt., come fece rimarcare l'autore (l. c.), ha qualche somiglianza con la *Rh. Buchi* Roem., dalla quale si distingue per il seno assai più corto, per le pieghe laterali più rilevate; è anche affine alla *Rh. acuta* Sow. sp., nella quale il rialzo mediano è più sottile, lungo e acuto. Le forme poi lisce della specie descritta appartengono al gruppo della *Rh. coarctata* Opp. (*Ueber d. Vork. v. jurass. Pos. Gest. in d. Alpen*, 1863, p. 209, tab. 6, fig. 4).

I due esemplari di *Rh. Mariottii* Zitt. raccolti nella montagna del Suavicino si trovano conservati al museo di Pisa, insieme ad undici della *Marconessa*; alcuni esemplari poi delle *Foci di Cantiano* si trovano nel museo paleontologico di Monaco (Baviera).

Rhynchonella retroplicata Zitt.

Rhynchonella retroplicata Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Alpen.* 1869, pag. 40, Taf. 14, Fig. 13, 14.

Alle *Foci di Cantiano* negli strati a *T. Aspasia* lo Zittel rinvenne questa specie che definì nel modo seguente:

« Conchiglia piccola, a contorno triangolare rotondato, mediocremente convessa. La larghezza della regione palleale supera d'alcun poco la lunghezza della conchiglia. Il corto e poco saliente apice ha un piccolo forame; mancano deltidio ed area. La regione palleale della valva perforata ha due forti pieghe, cui nella valva brachiale corrisponde un seno mediocremente profondo; sui lati si ritrovano inoltre una o due pieghuzze debolmente sviluppate. Sotto la lente la conchiglia apparisce distintamente fibrosa, ornata da fine linee radiali ».

La forma che riferisco a questa specie, e che ho ricordato nella descrizione della *Rh. Mariottii* (pag. 352) si scosta alquanto dalla tipica per essere alla superficie pressochè liscia o almeno per avere appena indicate le pieguzze.

Rhynchonella flabellum Mgh.

Tav. IV, fig. 4-7.

Rhynchonella flabellum Meneghini, *Manoscritto*, 1853. — G. G. Gemmellaro, *Sopra alcune faune giur. e liass.* 1874, p. 83, tav. 11, fig. 1-3.

Il Meneghini caratterizzava questa specie nel modo seguente:

« Conchiglia subequivalve, triangolare, acutangola. Valva perforata quasi uniformemente convessa e quasi tutta occupata da un seno pochissimo marcato, lateralmente limitato dalle penultime o antipenultime coste, oltre le quali i fianchi succedono normalmente, non presentando più che una sola costa decisa, ma minore delle altre, e appena l'indizio di un'altra o altre due piccolissime. Dall'apice, oltre quelle due laterali, se ne partono quattro, ma una quinta s'interpone, in uno dei solchi laterali, e cinque eguali arrivano alla fronte, grosse, rotonde e che rendono crenato il margine frontale. Il rilievo maggiore e la lunghezza un po' minore delle due laterali mettono in evidenza il seno. In altro esemplare quattro sole coste nel seno, ed una di esse pure interposta. Apice pochissimo sporgente, incurvo; contiguo all'umbone. Valva brachiale di forma analoga, cinque coste maggiori nel lobo, una o due incomplete e provenute da biforcazione nel solco che separa il lobo dai fianchi (talvolta mancano queste coste incomplete), una maggiore per lato e due o tre successivamente minori e poco distinte. Linea marginale dei fianchi in modo particolare e caratteristico appianata, ornata da distinte linee concentriche di accrescimento ».

Dimensioni

	(I)	(II)	(III)
Lunghezza	13^{mm}	24^{mm}	23,5^{mm}
Larghezza	12,5^{mm}	26^{mm}	22,5^{mm}
Spessezza	7^{mm}	14^{mm}	13^{mm}

I. Varietà a coste così dilatate alla fronte da fare quasi scomparire i solchi interposti, seno pochissimo manifesto, commissura frontale appena denticulata (fig. 5).

Dimensioni

Lunghezza 23,5^{mm} Larghezza 25^{mm} Spessezza 12^{mm}

II. Varietà affatto mancante di seno, meno turgida, con la regione dei fianchi concava anzichè piana, e la linea marginale sporgente nel suo mezzo, più dilatata della forma tipica; coste irregolarmente dicotome ed interposte indistintamente nelle due valve (fig. 6).

Dimensioni

Lunghezza 17^{mm} Larghezza 21^{mm} Spessezza 9^{mm}

A queste due varietà si deve aggiungerne un'altra (fig. 7), che assume la conchiglia allo stato giovanile; si assomiglia allora talmente alla *Rh. triquetra* Gemm. che riesce quasi impossibile distinguernela, per modo che abbiamo lasciati indeterminati alcuni esemplari che corrispondono alla specie siciliana, indecisi se alla *Rh. triquetra* o ad una giovine *Rh. flabellum* dovessero riferirsi.

La *Rh. flabellum*, del gruppo della *Rh. Greppini* Opp., è una delle specie più comune negli strati a *T. Aspasia* dell'Appennino centrale e di Sicilia.

Rhynchonella dolabriformis Mgh.

Tav. IV, fig. 8.

Rhynchonella dolabriformis Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

Conchiglia triangolare più larga che lunga non molto turgida. Valva perforata convessa alquanto ripiegata alla fronte verso la valva brachiale; ornata da sette costicine che assumono la maggior grossezza alla fronte, e alle quali se ne interpongono alcune sottilissime semplicemente alla regione apiciale. Apice ricurvo, acuminato, sporgente, coi margini laterali che succedono sino alla fronte, forame assai piccolo; falsa area concava con indistinta linea marginale. Agli ampi solchi interposti tra le costicine della valva perforata corrispondono in quella brachiale sei coste poco rilevate e allargate alla fronte, la quale risulta leggermente crenata.

Dimensioni

Lunghezza 14,5^{mm} Larghezza 19^{mm} Spessezza 9^{mm}.

La *Rh. dolabriformis* è molto vicina alla specie precedente, e insieme ad essa appartiene al gruppo della *Rh. Greppina* Opp., ma n' è eminentemente distinta per i margini laterali all'apice, per la conformazione di questo e per la dentatura della commissura frontale delle valve.

Rhynchonella Meneghinii Zitt.

Rhynchonella Meneghinii Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 42, Taf. 14, Fig. 10, 11.

Non possediamo alcun esemplare di questa specie che fu raccolta dallo Zittel negli strati a *T. Aspasia*, tra Cagli e Cantiano.

Rhynchonella subdecussata Münst. sp. var.

Terebratula Amalthei Quenstedt, *Petrefakt. Deutsch.* II, tab. 37, fig. 154-159.

Rhynchonella dysonymus Seebach, *Hannover'scher Jura*, p. 90.

Rhynchonella liasica Reynès, *Essai de Géol. et Pal.* pl. 4, fig. 5.

Rhynchonella subdecussata Münster in Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apennin.* 1869, p. 41, Taf. 14, Fig. 12 *a-c.* —. Uhlig, *Ueber die lias. Brachiopodenfauna v. Sospirolo*, 1879, p. 37, Taf. IX, Fig. 5-8.

La sinonimia riportata è quella dello Zittel, che ebbe la fortuna rinvenire questa specie insieme alla precedente. Nessun esemplare di *Rh. subdecussata* si trova al museo di Pisa.

Rhynchonella fissicosta Mgh.

Tav. IV, fig. 9.

Rhynconella fissicosta Meneghini, *Manoscritto*, 1853.

Conchiglia piccola, ovale, subequivalve, fissicostata. Valva perforata meno convessa della opposta, dolcemente depressa alla fronte, in cui costituisce un piccolo seno; apice piccolissimo; margini laterali all'apice e falsa area indistinti; quattro coste nel seno, due delle quali per biforcazione, ed una che va al lato di esso e proviene per

biforcazione dalla prima del fianco, alla quale ne succedono altre quattro, una delle quali dicotoma. Inversamente nella valva brachiale; in ciascuna in complesso 15, 16, da 8, 9 che si distinguono posteriormente. Dentature del margine molto ottuse.

Dimensioni

Lunghezza 11^{mm} Larghezza 10^{mm} Spessezza 7^{mm}

Questa specie ne ha moltissime affini liassiche, ma da tutte è facile distinguerla.

Due esemplari di *Rh. fissicostà* si trovano al museo di Pisa, raccolti negli strati a *T. Aspasia* di Monticelli.

Rhynchonella cfr. Fraasi Opp.

Rhynchonella cfr. Fraasi (Oppel) Zittel, *Geol. Beob. aus den Central-Apen.* 1869, pag. 130, Taf. 14, Fig. 18 *a-d.*

Questa specie fu trovata dallo Zittel al Catria; il Gemmellaro ne raccolse una specie simile in Sicilia che indicò col nome di *Rh. Zitteli* identificandola a quella appenninica. La *Rh. Zitteli* Gemm. ci sembra però specie diversa dalla *Rh.* cfr. *Fraasi.*

Rhynchonella Sordellii Parona, ms. var.

Tav. IV, fig. 10

Conchiglia piuttosto grande, inequivalve, arrotondata lunga quasi quanto larga. Valva perforata alquanto depressa, ripiegata alla fronte producendo un seno mediano appena distinto; apice acuto, poco sporgente con spigoli laterali delimitanti un' ampia falsa area concava; forame oblungo, determinato dalle placche deltidiari benissimo conservate, come raramente accade in tutte le altre specie descritte. Valva brachiale rigonfia, con la maggiore convessità all'umbone, rialzata leggermente alla fronte in corrispondenza al seno della valva opposta. Tutta la conchiglia è ornata da 32-34 pieghe sottili, molto acute, che dalla regione palleale vanno perdendosi a quella apiciale. Commissura latero-apiciale alquanto convessa verso la valva brachiale, in seguito molto acutamente dentellata.

Dimensioni

Lunghezza 19^{mm} Larghezza 20^{mm} Spessezza 13,5^{mm}

Il Meneghini, a cui fu comunicata dal Parona la descrizione e la figura della *Rh. Sordellii*, vi riferì come varietà la forma descritta che se ne allontana solo per un numero alquanto maggiore di costicine.

Questa *Rhynchonella*, tra le *Rhynchonellae* liassiche della provincia mediterranea, ricorda per la sua forma la *Rh. Orsinii* Gemm., dalla quale specificamente diversifica per la conformazione apiciale e per un maggior numero di pieghe.

La *Rh. Sordellii* Par. fu rinvenuta negli strati a *T. Aspasia* di Monticelli.

Rhynchonella Paolii Canav.

Rhynchonella Paolii Canavari, *La Montagna del Suavicino. Oss. geol. e pal.* Boll. r. Com. geol. n. 1 e 2, 1880, pag. 69, tav. I, fig. 1*a-d.*

« Conchiglia piuttosto piccola, un poco più larga (13^{mm}) che lunga (13,5^{mm}), rigonfia (9^{mm}); apice acuto, alquanto ricurvato, forame non ben visibile e racchiuso dalle

due linee che costituiscono il deltidio, falsa area bassissima, leggermente concava, ma ben definita; valva perforata depressa, con un seno mediano amplissimo e poco profondo, limitato da due leggeri rialzi; valva brachiale abbastanza convessa, con un leggero lobo limitato da due pieghe ben distinte in corrispondenza al seno della valva perforata. Ambedue le valve sono ornate da sottilissime costicine che vanno perdendosi alla regione apiciale; se ne contano sei nel seno mediano della valva perforata e sette nel lobo corrispondente sulla valva brachiale; quelle delle regioni laterali ascendono, circa da 7 od 8 per parte, appena pronunciate e sovente non distinte nella grande valva. Commissura latero-frontale leggermente flessuosa, arcuata alla fronte verso la valva brachiale e leggermente dentellata » (l. c.).

Questa specie degli strati a *T. Aspasia* del Suavicino ha molte analogie con parecchie specie liassiche, ma da tutte rimane nettamente distinta.

Rhynchonella variabilis Schl. sp. var.

Tav. IV, fig. 11, 12.

Terebratulites variabilis Schlotheim, *Beit. zur Nat. der Vers.* 1813, vol. VII, p. 1, fig. 4.

Rhynchonella variabilis degli autori (pars).

Conchiglia inequivalve, allargata, triangolare, sinuata, con tre grosse pieghe angolose nel seno. I due lati cardinali ad angolo retto occupano metà della lunghezza; fronte tutta occupata dal seno. Valva brachiale quasi uniformemente convessa con piccolo umbone. Le tre pieghe del lobo sorgono poco a poco e lungi dall'umbone. Da esso invece procedono le due pieghe che vanno a finire negli angoli sporgenti, coi quali terminano i margini cardinali. Lo stesso per le due pieghe laterali della valva perforata, che ne ha due nel profondo seno nel quale la sua parte media si inflette. Linea marginale laterale piegata ad angoloretto verso la faccia perforata, alla fronte denticolata.

Molti esemplari di questa conchiglia furono rinvenuti nel Lias medio di Monticelli e riferiti dal Meneghini, come varietà, alla *Rh. variabilis*. Differiscono tra loro notevolmente per gli ornamenti esteriori, ma rimangono eguali per la conformazione apiciale. Essi possono ripartirsi, tra le diverse forme che della *Rh. variabilis* furono descritte in ispecie dal Davidson (*A Mon. of Br. ool. and lias. Brach.* 1852, p. 78, pl. XVI, fig. 1-6, pl. XV, fig. 8-10) e che probabilmente dovranno separarsi con nomi diversi. Il piccolo numero di esemplari che possediamo delle medesime forme, non ci possono fare apprezzare la variabilità dei caratteri e quindi la separazione di forme distinte.

I due esemplari che figuro, forma *laevis* e forma *plicata*, sono legati da moltissime forme intermedie.

Rhynchonella n. f?

Tav. IV, fig. 13.

Conchiglia piccola, più larga che lunga, subpentagonale. Valva perforata depressa, con un ampio seno mediano molto profondo e con il lembo frontale della valva ripiegato verso l'opposta; apice ricurvo, acuminato, con spigoli laterali e falsa area appena distinti; forame piccolissimo compito dal deltidio molto basso. Valva

brachiale rigonfiata con un leggero lobo mediano. Tutta la conchiglia, a struttura fibrosa, è ornata da 14-18 pieghe appena distinte, cinque nel seno della valva perforata delle quali la laterale sinistra assai sottile e indecisa, e quattro nel lobo corrispondente.

Dimensioni

Lunghezza 9^{mm} Larghezza $11{,}5^{mm}$ Spessezza $6{,}5^{mm}$.

Questa *Rhynchonella* eminentemente distinta dalla precedente, appartiene tuttavia allo stesso gruppo, che tanti e svariati rappresentanti ebbe nel periodo liassico; è affine a molteplici specie, ma da tutte diversa; però l'unicità dell'esemplare rinvenuto dall'ab. Mariotti al Furlo, non mi permette caratterizzarla con certezza come nuova forma.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

		Località dell'esemplare figurato
Fig.	1*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. *major* Zitt.	Cagli.
»	1*e-f.* Disegno del sistema venoso palleale dell'esemplare precedente.	»
»	2*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. *major* Zitt.	Monticelli presso Roma.
»	3*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. a lobo mediano molto acuto, affine alla *T. Aspasia* var. *Myrto* come fu figurata dallo Zittel	Marconessa presso Cingoli.
»	4*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. *Myrto* Mgh. = var. *minor* Gemm. — non Zitt.	Monte Suavicino.
»	5*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. comparabile alla *T. diphoros* Quenst. e alla *T. rupicola* Zitt. ed uguale alla var. della *T. Aspasia* di Bicicola descritta dal Meneghini.	Furlo.
»	6*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. dilatata a contorno laterale molto arrotondato, a valva brachiale quasi totalmente piana	Marconessa presso Cingoli.
»	7*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. piccolo individuo della var. *Myrto* Mgh.	Monte Suavicino.
»	7*e.* Ingrandimento di una porzione di guscio dell'esemplare precedente	»
»	8*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var.	Lias inferiore di Gerfalco.
»	9*a-d.* Terebratula Aspasia Mgh. var. eguale a quella rappresentata con la fig. 5	Monticelli presso Roma.

Tavola II.

Fig.	1*a-d.* Terebratula fimbrioides E. Desl. forma adulta.	Furlo.
»	2*a-d.* Terebratula fimbrioides E. Desl. forma giovanile.	»
»	3*a,b.* Terebratula Rotzoana Sch.	Furlo.
»	4*a-d.* Terebratula Rotzoana Sch.	Marconessa presso Cingoli.
»	5*a-d*, 6*a-d.* Terebratula sphenoidalis Mgh.	Monticelli presso Roma.
»	7*a-d*, 8*a-d.* Terebratula undata Mgh.	»
»	8*e.* Ingrandimento di una porzione di guscio dell'esemplare precedente	»
»	9*a-d.* Terebratula Renieri Cat.	M. Guallo presso Camerino.
»	10*a-d.* Terebratula Renieri Cat.	Monte Catria.
»	11*a-d.* Terebratula Paronai Canav.	Monticelli presso Roma.
»	12*a-d.* Terebratula (W?) Meneghinii Par.	»
»	13*a-d.* Terebratula (W?) filosa Mgh.	»

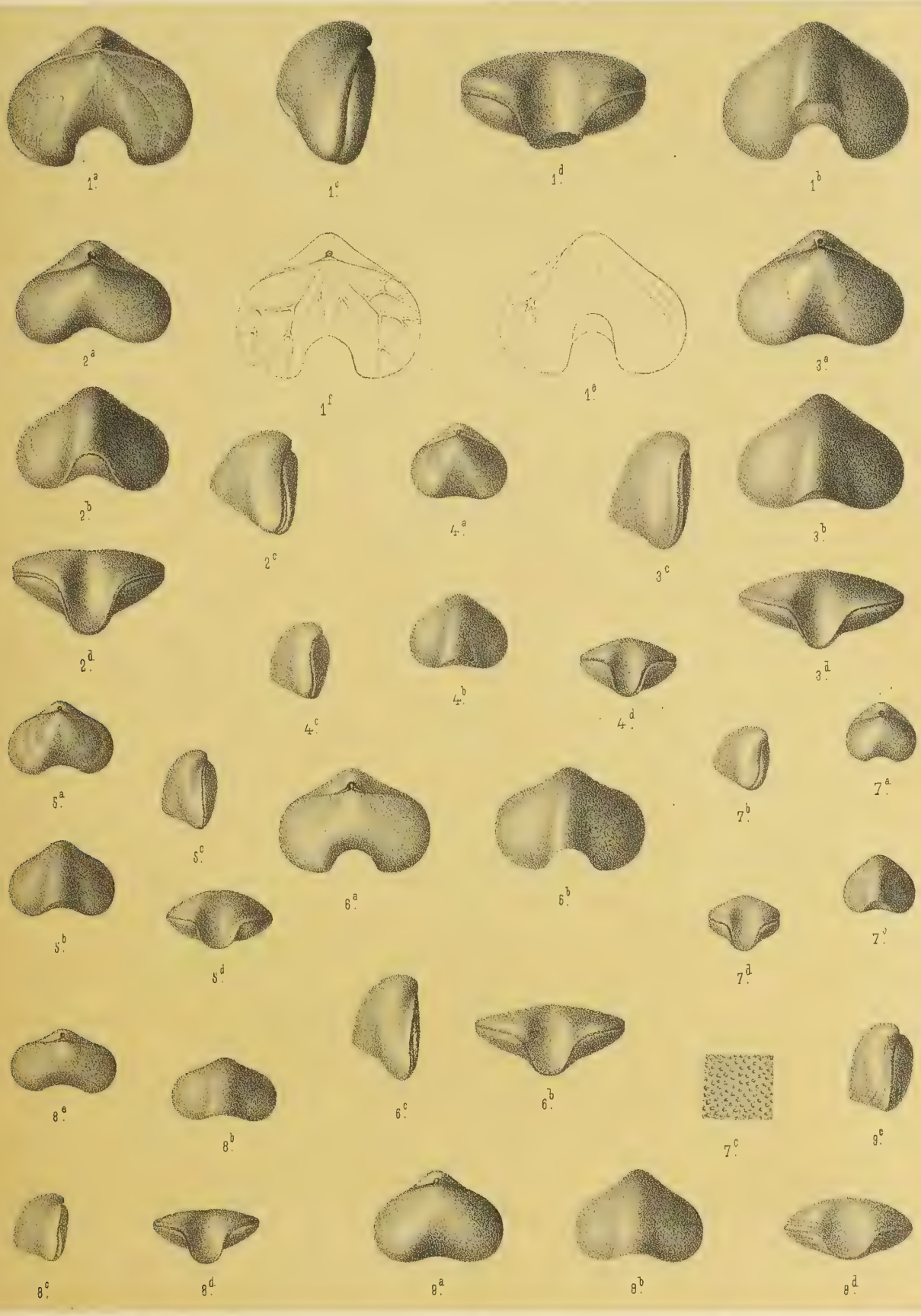
Tavola III.

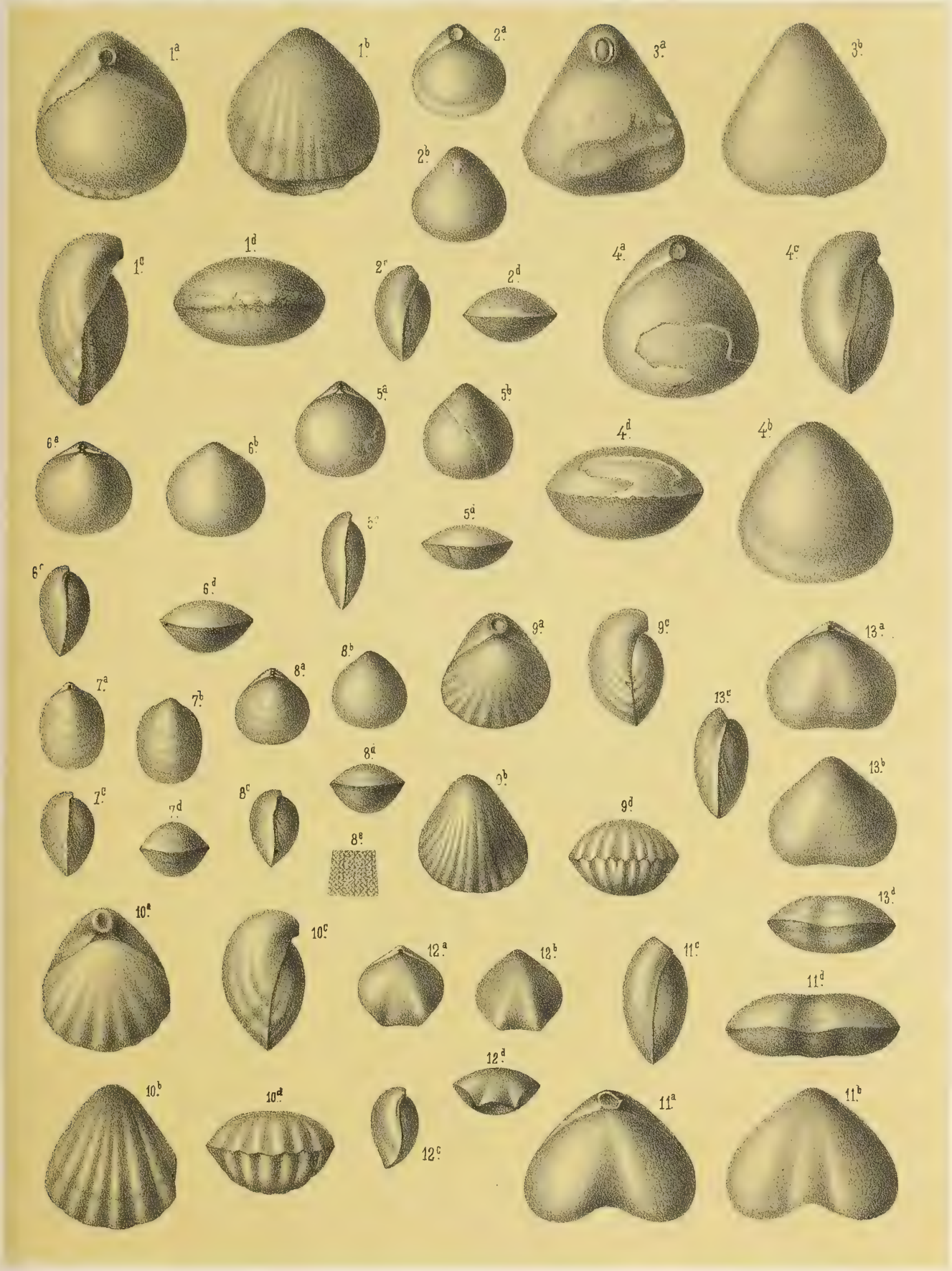
Fig.	1*a-d.* Waldheimia furlana Zitt. var. *elongata* M. . .	Monticelli presso Roma.
»	2*a-d.* Waldheimia furlana Zitt. var. *abreviata* Mgh. .	»
»	3*a-d.* Waldheimia furlana Zitt. var. *angustata* Mgh. .	»
»	4*a-d*, 5*a-d.* Waldheimia amygdaloides Mgh.	»

			Località dell'esemplare figurato
Fig.	6*a-d.*	Waldheimia indentata Sow. sp. var.	Monticelli presso Roma
»	6*e.*	Ingrandimento di una parte di guscio dell' esemplare precedente	»
»	7*a-d.*	Rhynchonella aptyga Canav.	Monte Suavicino.
»	8	Rhynchonella zeina Canav.	Furlo.
»	8*a-d.*	Ingrandimento della specie precedente	»
»	9*a-d.*	Spiriferina obtusa Opp.	Monticelli.
»	10*a-e.*	Spiriferina rostrata Schl.	Monte Suavicino.

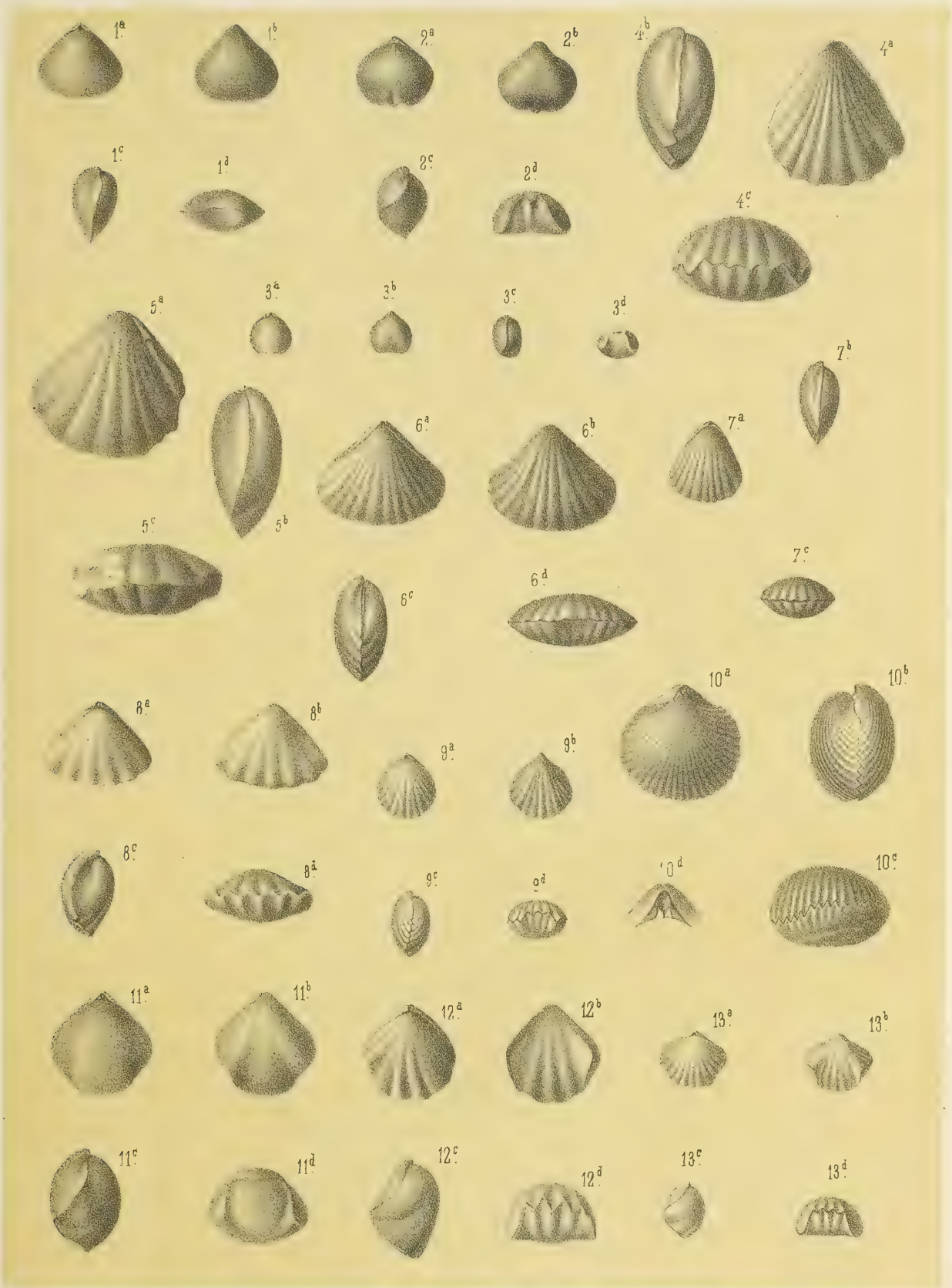
Tavola IV.

Fig.	1*a-d.*	Rhynchonella deltoidea Mgh.	Marconessa presso Cingoli
»	2*a-d.*	Rhynchonella Mariottii Zitt.	Monte Suavicino.
»	3*a-d.*	Rhynchonella Mariottii Zitt. forma *junior* . . .	Marconessa presso Cingoli.
»	4*a-c.*	Rhynchonella flabellum Mgh.	Monticelli presso Roma.
»	5*a-c.*	Rhynchonella flabellum Mgh. var.	»
»	6*a-d.*	Rhynchonella flabellum Mgh. var.	Cagli.
»	7*a-c.*	Rhynchonella flabellum Mgh. forma *junior* . . .	»
»	8*a-d.*	Rhynchonella dolabriformis Mgh.	Monticelli presso Roma.
»	9*a-d.*	Rhynchonella fissicosta Mgh.	»
»	10*a-d.*	Rhynchonella Sordellii Par. var.	»
»	11*a-d.*	Rhynchonella variabilis Schl. var. f. *laevis* . . .	»
»	12*a-d.*	Rhynchonella variabilis Schl. var. f. *plicata* . . .	»
»	13*a-d.*	Rhynchonella n. f?	Furlo.


1a
1c
1d
1b
2a
1f
1e
3a
2b
2c
4a
3c
3b
2d
4c
4b
4d
3d
5a
5c
6a
6b
7b
7a
5b
5d
7d
7
8e
8b
6c
6b
7c
9c
8c
8d
9a
9b
9d


1a
1b
2a
2b
3a
3b
1c
1d
2c
2d
4a
4c
5a
5b
6a
6b
4d
4b
5c
5d
6c
6d
9a
9c
13a
7a
7b
8a
8b
13c
8d
9b
13b
7c
7d
8c
8e
9d
13d
10a
10c
12a
12b
11c
11d
12d
10b
10d
12c
11a
11b

Cristofani e Canavari dis. Cristofani lit. Lit. Ach. Paris-Firenze e Roma


1a
1b
2a
2b
4b
4a
1c
1d
2c
2d
4c
5a
3a
3b
3c
3d
7b
6a
6b
7a
5c
5b
6c
6d
7c
8a
8b
9a
9b
10a
10b
8c
8d
9c
9d
10d
10c
11a
11b
12a
12b
13a
13b
11c
11d
12c
12d
13c
13d

Sulle vibrazioni de' corpi elastici isotropi.

Memoria del prof. VALENTINO CERRUTI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 1 febbraio 1880.

Nella Memoria che ho l'onore di sottoporre al giudizio dell'Accademia, do un metodo generale per lo studio delle vibrazioni de' corpi elastici isotropi. Nell'esposizione di questo metodo prendo le mosse da un teorema assai importante dovuto al ch.° prof. Betti (1) e da lui utilizzato largamente nell'analisi dei problemi di equilibrio de'corpi elastici: a primo aspetto l'applicazione del teorema ai problemi di movimento sembra presentare qualche difficoltà, ma io spero d'aver superato questa difficoltà e di aver messo in chiaro il metodo generale, a cui ho principalmente indirizzato le mie indagini. Imperocchè, valendomi del teorema in discorso, io ho ottenuto le espressioni della dilatazione cubica e delle componenti della rotazione di una particella, scelta comunque nell'interno od alla superficie di un corpo elastico omogeneo isotropo, alla fine di un tempo qualsivoglia ed in funzione soltanto delle condizioni iniziali, delle forze che agiscono sopra ogni elemento della superficie e delle condizioni ai limiti: e in seguito, ho mostrato come si possano, conosciute la dilatazione e le rotazioni, ricavare con un processo semplicissimo i valori della velocità e dello spostamento di un punto qualunque del corpo. Nei casi particolari l'applicazione del metodo presenta per lo più difficoltà molto gravi, perchè richiede la determinazione di certi gruppi di funzioni ausiliarie, determinazione più o meno difficile secondo la natura della superficie che termina il corpo: ma, trovate una volta per un dato corpo queste funzioni, si hanno immediatamente tutti gli elementi che ne definiscono il moto, qualunque sieno le condizioni iniziali, le forze che lo sollecitano e le condizioni ai limiti, senza dire delle proprietà, relative al movimento de'corpi elastici, che il metodo stesso somministra e de'problemi sussidiarî per sè non privi d'interesse alla cui soluzione esso conduce. In taluni casi per altro il metodo riesce di applicazione abbastanza spedita, ed io me ne son giovato in questa Memoria per lo studio delle vibrazioni di un corpo indefinito; sono poi anche riuscito ad applicarlo allo studio delle vibrazioni delle membrane elastiche piane e di alcuni corpi finiti, come mostrerò in altro lavoro che farà seguito a questo.

(1) V. Annali di Matematica pura ed applicata, ser. II, t.° VI, *Sopra l'equazioni di equilibrio de'corpi elastici*, pp. 100-111; — e la *Teoria dell'elasticità* nel Nuovo Cimento, ser.II, t. VI, VII, IX, X.

Le condizioni ai limiti possono esigere: 1° che su una data porzione della superficie del corpo agiscano forze determinate (1): 2° che gli spostamenti de'punti di un'altra porzione sieno funzioni conosciute delle coordinate e del tempo: 3° che per certe parti della superficie il corpo debba rimanere a contatto con altri corpi. Nel mio lavoro io considero soltanto i primi due casi, riserbandomi di presentare in un'altra Memoria lo studio particolareggiato del terzo (2).

1. *Teorema del prof. Betti ed equazioni del moto pei corpi elastici isotropi.* — Dicansi: S lo spazio occupato da un corpo elastico omogeneo, ρ la sua densità: X, Y, Z; L, M, N le componenti delle forze applicate ai diversi punti della massa o della superficie s del corpo: u, v, w le proiezioni sui tre assi dello spostamento di un punto qualunque: e poi con X_1, Y_1, Z_1; L_1, M_1, N_1; u_1, v_1, w_1 si denoti un altro sistema di forze applicate al medesimo corpo e di spostamenti provocati in esso. Il teorema del prof. Betti pel caso in cui nel corpo abbiano luogo moti vibratorî, è contenuto nell'eguaglianza

$$\rho \int_S \left[\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u_1 + \left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) v_1 + \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) w_1 \right] dS + \int_s (L u_1 + M v_1 + N w_1) ds =$$

$$= \rho \int_S \left[\left(X_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) u + \left(Y_1 - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) v + \left(Z_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) w \right] dS + \int_s (L_1 u + M_1 v + N_1 w) ds . \quad (1)$$

Gli spostamenti u, v, w, se il corpo elastico è isotropo, debbono in tutto lo spazio S soddisfare alle equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega^2 \Delta^2 u , \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \omega^2 \Delta^2 v , \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \omega^2 \Delta^2 w , \end{aligned} \quad (2)$$

e sulla superficie s o ridursi a funzioni determinate delle coordinate e del tempo, o soddisfare a queste tre altre equazioni

$$\begin{aligned} &\frac{L}{\rho} + \left((\Omega^2 - 2\omega^2)\Theta + 2\omega^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{dn} + \omega^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dy}{dn} + \omega^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{dz}{dn} = 0, \\ &\frac{M}{\rho} + \omega^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{dx}{dn} + \left((\Omega^2 - 2\omega^2)\Theta + 2\omega^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{dy}{dn} + \omega^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{dz}{dn} = 0, \\ &\frac{N}{\rho} + \omega^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{dx}{dn} + \omega^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{dy}{dn} + \left((\Omega^2 - 2\omega^2)\Theta + 2\omega^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{dz}{dn} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

(1) Se le forze agenti alla superficie e nell'interno del corpo non dipendono dal tempo, il problema si può sempre scindere in due: uno di equilibrio colle date forze come forze applicate al corpo, ed uno di movimento nel quale le forze applicate son tutte nulle; epperò lo studio delle vibrazioni in tal caso non presenta per sè maggiori difficoltà coll'essere o non diverse da zero le forze che sollecitano il corpo. Ma la cosa non corre più così, quando le forze variano col tempo.

(2) Non intendo certamente di avere enumerato qui tutte le possibili condizioni ai limiti, ma solamente le più comuni e più importanti.

In queste equazioni Ω, ω designano le velocità di propagazione delle vibrazioni longitudinali e trasversali in un mezzo isotropo; $\frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}, \frac{dz}{dn}$ i coseni di direzione della normale alla superficie s presa positivamente verso l'interno dello spazio occupato dal corpo e per compendio si è posto

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial z}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

2. *Dilatazione di un elemento qualunque di un corpo elastico isotropo alla fine di un tempo qualsiasi.* — Consideriamo un'onda sferica col centro nel punto O dello spazio S e per la quale le proiezioni u_1, v_1, w_1 sui tre assi dello spostamento di un punto qualunque, situato alla distanza R da O, abbiano rispettivamente i valori

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(R+\Omega t)}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{F(R+\Omega t)}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{F(R+\Omega t)}{R},$$

valori che, come è facile verificare, soddisfano alle equazioni (2) per $X = Y = Z = 0$. La funzione F e le sue derivate prime e seconde (1) si suppongono in tutto lo spazio S continue, ad un sol valore e, per ora almeno, anche finite. L'onda si propaga con velocità Ω verso O, produce condensazione ma non rotazione degli elementi del corpo. Applichiamo ora il teorema del prof. Betti ai due gruppi di spostamenti u, v, w; u_1, v_1, w_1 ed allo spazio S' che si ottiene togliendo da S una sfera Σ di raggio arbitrariamente piccolo col centro in O. Perciò rappresentiamo con L_1, M_1, N_1 tensioni uguali ed opposte a quelle provocate dagli spostamenti u_1, v_1, w_1 sopra la superficie s; con L'_1, M'_1, N'_1 le tensioni analoghe per la superficie s' della sfera Σ, e finalmente con L', M', N' tensioni uguali ed opposte a quelle provocate sulla superficie s' dagli spostamenti u, v, w. Allora la equazione (1) nel nostro caso diventa

$$\rho\int_{S'}\left[\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right]dS'$$
$$+\int_s\left(L\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+M\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+N\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds+\int_{s'}\left(L'\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+M'\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+N'\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds'=$$
$$=-\rho\int\left(u\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+v\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+w\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)dS'+\int_s(L_1u+M_1v+N_1w)ds$$
$$+\int_{s'}(L'_1u+M'_1v+N'_1w)\,ds'. \qquad (4)$$

Ricavando per mezzo delle (3) i valori di L', M', N', con facile calcolazione si trova

$$L'\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+M'\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+N'\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}=-\rho(\Omega^2-2\omega^2)\Theta\frac{d}{dR}\frac{F}{R}-$$
$$-2\rho\omega^2\left(\frac{du}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+\frac{dv}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+\frac{dw}{dR}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right),$$

ove si tenga presente che è

$$\frac{dx}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}=\frac{dy}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}, \ldots\ldots\ldots, \qquad (5)$$

(1) L'ipotesi della continuità per le derivate seconde della funzione F non è veramente necessaria.

In modo analogo ricavando, ancora per mezzo delle (3), le espressioni di L'_1, M'_1, N'_1, si ottiene

$$L'_1 u + M'_1 v + N'_1 w = \left\{ \begin{array}{l} -\rho(\Omega^2 - 2\omega^2)\left(u\frac{dx}{dR} + v\frac{dy}{dR} + w\frac{dz}{dR}\right)\Delta^2\frac{F}{R} \\ -2\rho\omega^2\left(u\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + v\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + w\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right). \end{array} \right.$$

Pertanto si avrà

$$\int_{s'}(L'_1 u + M'_1 v + N'_1 w)\,ds' - \int_{s'}\left(L'\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + M'\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + N'\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds' =$$

$$= \rho(\Omega^2 - 2\omega^2)\int_{s'}\Theta\frac{d}{dR}\frac{F}{R}\,ds' - \rho(\Omega^2 - 2\omega^2)\int_{s'}\left(u\frac{dx}{dR} + v\frac{dy}{dR} + w\frac{dz}{dR}\right)\cdot\Delta^2\frac{F}{R}\,ds' + \quad (6)$$

$$+ 2\rho\omega^2\int_{s'}\left(\frac{du}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - u\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + \frac{dv}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} - v\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + \frac{dw}{dR}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R} - w\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds'.$$

Ora, distinguendo con accenti le successive derivate di F rispetto ad R, si giunge facilmente alle seguenti eguaglianze

$$\Delta^2\frac{F}{R} = \frac{F''}{R},$$

$$\frac{du}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - u\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} = \frac{1}{R}\left\{\left(F' - \frac{F}{R}\right)\frac{1}{R^2}\frac{d.uR^2}{dR} - uF''\right\}\frac{dx}{dR},$$

$$\frac{dv}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} - v\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} = \frac{1}{R}\left\{\left(F' - \frac{F}{R}\right)\frac{1}{R^2}\frac{d.vR^2}{dR} - vF''\right\}\frac{dy}{dR},$$

$$\frac{dw}{dR}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R} - w\frac{d}{dR}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R} = \frac{1}{R}\left\{\left(F' - \frac{F}{R}\right)\frac{1}{R^2}\frac{d.wR^2}{dR} - wF''\right\}\frac{dz}{dR}.$$

Sostituiamone i secondi membri in luogo de' primi nella (6) e cerchiamo verso quali limiti convergano gli integrali contenuti nel secondo membro della (6), mentre il raggio della sfera Σ diminuisce indefinitamente. In questa ricerca non bisognerà dimenticare le supposizioni che debbono farsi sopra l'indole delle funzioni u, v, w e delle loro derivate prime nella deduzione delle equazioni fondamentali de'corpi elastici. Ciò posto, se diciamo R_1 il raggio della sfera Σ, si avrà anzitutto

$$\int_{s'}\Theta\frac{d}{dR}\frac{F}{R}\,ds' = \frac{4\pi\{R_1 F'(R_1 + \Omega t) - F(R_1 + \Omega t)\}\int_{s'}\Theta\,ds'}{4\pi R_1^2},$$

ma $\frac{\int_{s'}\Theta\,ds'}{4\pi R_1^2}$ è uguale al valor medio di Θ sulla superficie s' ed al decrescere di R_1 si accosta indefinitamente al valore, che Θ ha nel punto O. Quindi

$$\lim_{R=0}\int_{s'}\Theta\frac{d}{dR}\frac{F}{R}\,ds' = -4\pi F(\Omega t)\cdot\Theta_{R=0}.$$

Similmente

$$\int_{s'}\left(u\frac{dx}{dR} + v\frac{dy}{dR} + w\frac{dz}{dR}\right)\cdot\Delta^2\frac{F}{R}\,ds' = \frac{4\pi R_1 F''(R_1 + \Omega t)\int_{s'}\left(u\frac{dx}{dR} + v\frac{dy}{dR} + w\frac{dz}{dR}\right)ds'}{4\pi R_1^2},$$

onde

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \left(u \frac{dx}{dR} + v \frac{dy}{dR} + w \frac{dz}{dR} \right) \cdot \Delta^2 \frac{F}{R} \, ds' = 0 \, .$$

Quanto all'integrale $\int_{s'} \frac{F}{R^4} \frac{d.u\,R^2}{dR} \frac{dx}{dR} ds'$, si rifletta che, per la natura della funzione u, in vicinanza di O si può porre

$$u_{R=R_1} = u_{R=0} + \left(\frac{du}{dR} \right)_{R=0} R_1 + P R_1^2 =$$

$$= u_{R=0} + \left[\frac{dx}{dR} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R=0} + \frac{dy}{dR} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{R=0} + \frac{dz}{dR} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{R=0} \right] R_1 + P R_1^2$$

in cui P è una funzione che non diventa infinita nell'intervallo da R=0 ad R=R_1. Perciò

$$\int_{s'} \frac{F}{R^4} \frac{d.uR^2}{dR} \frac{dx}{dR} \, ds' = \frac{4\pi F (R_1 - \Omega t)}{4\pi R_1^2} \left\{ \frac{2u_{R=0}}{R_1} \int_{s'} \frac{dx}{dR} \, ds' + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R=0} \int_{s'} \left(\frac{dx}{dR} \right)^2 ds' + \right.$$

$$\left. + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{R=0} \int_{s'} \frac{dx}{dR} \frac{dy}{dR} \, ds' + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{R=0} \int_{s'} \frac{dx}{dR} \frac{dz}{dR} \, ds' + 4R_1 \int_{s'} \left(P + \frac{R_1}{4} \frac{dP}{dR} \right) \frac{dx}{dR} \, ds' \right\}.$$

Ora

$$\int_{s'} \frac{dx}{dR} \, ds' = 0 \, , \quad \int_{s'} \left(\frac{dx}{dR} \right)^2 ds' = \frac{4\pi R_1^2}{3} \, , \quad \int_{s'} \frac{dx}{dR} \frac{dy}{dR} ds' = 0 \int_{s'} \frac{dx}{dR} \frac{dz}{dR} \, ds' = 0,$$

e con ciò

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \frac{F}{R^4} \frac{d.uR^2}{dR} \frac{dx}{dR} \, ds' = 4\pi \, F(\Omega t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R=0};$$

e in modo analogo

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \frac{F}{R^4} \frac{d.vR^2}{dR} \frac{dy}{dR} ds' = 4\pi \, F(\Omega t) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{R=0},$$

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \frac{F}{R^4} \frac{d.wR^2}{dR} \frac{dz}{dR} ds' = 4\pi \, F(\Omega t) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{R=0}.$$

Finalmente, con un processo analogo a quello tenuto sin qui, si vedrà tosto che

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \left(\frac{F'}{R^3} \frac{d.uR^2}{dR} - \frac{uF''}{R} \right) \frac{dx}{dR} \, ds' = 0,$$

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \left(\frac{F'}{R^3} \frac{d.vR^2}{dR} - \frac{vF''}{R} \right) \frac{dy}{dR} \, ds' = 0,$$

$$\lim_{R=0} \cdot \int_{s'} \left(\frac{F'}{R^3} \frac{d.wR^2}{dR} - \frac{wF''}{R} \right) \frac{dz}{dR} \, ds' = 0.$$

Se ora noi riflettiamo che gli integrali tripli, i quali compaiono nella (4), salvo quantità infinitesime dell'ordine del raggio della sfera Σ al più, si possono estendere a tutto lo spazio S, la (4) stessa ci darà, quando per la differenza

$$\int_{s'}(L'_1 u + M'_1 v + N'_1 w)\,ds' - \int_{s'}\left(L'\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + M'\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + N'\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds'$$

si ponga il valore limite che essa acquista per $R=0$,

$$4\pi\rho\Omega^2 F(\Omega t).\Theta_{R=0} = \begin{cases} -\rho\int_S\left(X\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + Y\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + Z\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)dS \\ -\int_s\left(L\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + M\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + N\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds + \int_s(L_1 u + M_1 v + N_1 w)\,ds \\ +\rho\int_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)dS - \\ -\rho\int_S\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}\cdot u + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}\cdot v + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\cdot w\right)dS, \end{cases} \tag{7}$$

in cui per L_1, M_1, N_1 bisognerà porre i loro valori

$$\begin{aligned} L_1 &= -\rho\frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{R}\frac{d^2F}{dR^2}\frac{dx}{dn} - 2\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}, \\ M_1 &= -\rho\frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{R}\frac{d^2F}{dR^2}\frac{dy}{dn} - 2\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}, \\ N_1 &= -\rho\frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{R}\frac{d^2F}{dR^2}\frac{dz}{dn} - 2\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}, \end{aligned} \tag{8}$$

calcolati mediante le (3).

Diciamo t' il tempo impiegato dall'onda sferica per giungere dalla posizione iniziale sino al punto O ed ε la sua grossezza; diguisachè $F(\Omega t)$ sia diversa da zero soltanto per t compreso tra t' e $t' + \frac{\varepsilon}{\Omega}$ ed $F(R + \Omega t)$ per t compreso tra $t' - \frac{R}{\Omega}$ e $t' - \frac{R-\varepsilon}{\Omega}$, e poi prendiamo (1)

$$F(R + \Omega t) = \frac{2}{\varepsilon}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{\varepsilon}\left[R + \Omega(t - t')\right]. \tag{9}$$

Posto ciò si moltiplichino ambo i membri della (7) per dt e si integri tra $t=0$ e $t = T > t'$ nell'ipotesi che per $t=0$ l'onda sferica o non sia ancor penetrata nello spazio S od al più abbia raggiunto l'elemento della superficie s situato alla massima

(1) Non è veramente necessario particolarizzare tanto la forma della funzione F: la forma a cui ci siamo appigliati, ne è parsa la più comoda per giungere speditamente al risultato, che avevamo in mente di stabilire.

distanza da O. Se noi immaginiamo, che l'onda sferica vada via indefinitamente assottigliandosi, si avrà

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^T \Theta F(\Omega t)\,dt = \begin{cases} \lim_{\varepsilon=0}\int_{t'}^{t'+\frac{\varepsilon}{\Omega}} \Theta F(\Omega t)\,dt = \lim_{\varepsilon=0}\int_{t'}^{t'+\frac{\varepsilon}{\Omega}} \frac{2\Theta}{\varepsilon}\operatorname{sen}^2\frac{\pi\Omega}{\varepsilon}(t-t')\,dt \\ = \Theta_{t=t'}\lim_{\varepsilon=0}\int_{t'}^{t'+\frac{\varepsilon}{\Omega}} \frac{1}{\varepsilon}\left(1-\cos\frac{2\pi\Omega(t-t')}{\varepsilon}\right)dt = \frac{\Theta_{t=t'}}{\Omega} \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^T dt\int_S \left(X\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+Y\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+Z\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)dS = \begin{cases} \lim_{\varepsilon=0}\int_S dS\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}} \left(X\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+Y\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+Z\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)dt \\ = \frac{1}{\Omega}\int_S \left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)_{t=t'-\frac{R}{\Omega}} dS \end{cases},$$

giacchè

$$\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}} \frac{\partial F}{\partial R}\,dt = \Omega\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}} \frac{\partial F}{\partial t}\,dt$$

è zero qualunque sia ε. Ed in seguito

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^T dt\int_s \left(L\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+M\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+N\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)ds = \begin{cases} \lim_{\varepsilon=0}\int_s ds\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}} \left(L\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}+M\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}+N\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\right)dt \\ = \frac{1}{\Omega}\int_s \left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+N\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)_{t=t'-\frac{R}{\Omega}} ds \end{cases}.$$

Riguardo a questi ultimi due limiti credo bene, a scanso di equivoci, fare la seguente avvertenza. Per una legittima applicazione del teorema del prof. Betti alla fine del tempo t gli integrali di volume debbono estendersi soltanto allo strato che dal corpo staccano le due sfere di raggi $\Omega(t'-t)$, $\Omega(t'-t)+\varepsilon$, e gli integrali di superficie alle porzioni delle due superficie sferiche contenute entro S ed alla zona

che lo strato tra esse compreso determina su s. Beninteso che per forze applicate alla superficie delle due sfere bisognerà prendere tensioni uguali ed opposte a quelle che vi sono provocate rispettivamente dai due sistemi di spostamenti, che si considerano. Ora, immaginando lo spazio S diviso in tanti strati di grossezza ε, una qualunque di queste superficie sferiche è comune a due strati successivi e pei due strati l'integrale in discorso esteso alla superficie sferica che è loro comune ha lo stesso valore assoluto, ma segno opposto. Quindi la somma di tutti gli integrali relativi alle superficie sferiche è uguale a zero e non rimane che la parte relativa alla superficie s.

Proseguendo si vedrà che la parte

$$\int_0^T dt \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dS - \int_0^T dt \int_S \left(u\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + v\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + w\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R} \right) dS =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R} - u\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} - w\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F}{R} \right)_{t=0}^{t=T} dS$$

è zero; attesochè l'integrale del secondo membro per $t=T$ si annulla, essendo per $t=T$ la $F=0$ in tutto il corpo, e si annulla anche per $t=0$ perchè per $t=0$ la F o è zero ovunque, o lo spazio, in cui è diversa da zero, per le ipotesi fatte è evanescente. Tenendo poi presenti i valori (8), si ha

$$\int_0^T dt \int_s (L_1 u + N_1 v + N_1 w)\, ds = -\frac{2\rho\omega^2}{\Omega} \int_s \left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} + v\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} + w\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right)_{t=t'-\frac{R}{\Omega}} ds,$$

giacchè $\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}} \frac{d^2 F}{dR^2}\, dt$ è zero qualunque sia ε.

Pertanto tenendo conto di tutte le trasformazioni, che siam venuti dichiarando sin qui, otteniamo per valore della dilatazione cubica nel punto O ed alla fine del tempo t'

$$\Theta_{\substack{R=0 \\ t=t'}} = -\frac{1}{4\pi\Omega^2} \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_S \left(X\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} + Y\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} + Z\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right) dS \\ \displaystyle + \frac{1}{\rho}\int_s \left(L\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} + M\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} + N\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right) ds \\ \displaystyle + 2\omega^2 \int_s \left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} + v\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} + w\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right) ds \end{array} \right]_{t=t'-\frac{R}{\Omega}} \qquad (10)$$

Ora possono presentarsi tre casi: o sono date le forze agenti su tutta la superficie che limita il corpo; o sono dati gli spostamenti de'punti di questa superficie; o per una porzione s_1 sono date le forze e per un'altra porzione s_2 gli spostamenti. Affinchè Θ sia espressa soltanto mediante quantità conosciute, bisognerà dalla (10) eliminare, nel primo caso gli spostamenti u, v, w; nel secondo le forze L, M, N; nel terzo gli spostamenti dagli integrali relativi alla parte s_1 della superficie e le forze dagli integrali relativi alla parte s_2. Per effettuare questa eliminazione puossi, in generale, tenere il seguente processo, che io applicherò al terzo dei casi testè accennati come quello che comprende in sè anche i primi due. Sieno: ξ, η, ζ un nuovo sistema di spostamenti; L_2, M_2, N_2 le corrispondenti forze applicate in superficie; le forze sollecitanti ogni elemento della massa ovunque zero. Pel teorema del prof. Betti si avrà

$$\rho\int_S\left[\xi\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\eta\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)+\zeta\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]dS+\rho\int_S\left(u\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+v\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+w\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)dS$$
$$+\int_s(L\xi+M\eta+N\zeta)\,ds-\int_s(L_2u+M_2v+N_2w)\,ds=0\,.$$

Quest'espressione, moltiplicata per dt ed integrata tra $t=0$ e $t=T$, diventa

$$\rho\int_S(u\xi'+v\eta'+w\zeta'-\xi u'-\eta v'-\zeta w')\,dS-\rho\int_S(u_0\xi'_0+v_0\eta'_0+w_0\zeta'_0-\xi_0u'_0-\eta_0v'_0-\zeta_0w'_0)\,dS$$
$$+\rho\int_0^T\int_S(X\xi+Y\eta+Z\zeta)dSdt+\int_0^T\int_s(L\xi+M\eta+N\zeta)dsdt-\int_0^T\int_s(L_2u+M_2v+N_2w)dsdt=0\,, \qquad (11)$$

quando con u', v', w', ξ', η', ζ' si denotino le derivate prime di $u, v, \ldots$ rispetto al tempo, e con $u_0, \ldots$, $\xi_0, \ldots$; $u'_0, \ldots, \xi'_0 \ldots$ i valori delle quantità $u, \ldots \xi, \ldots$; $u', \ldots \xi' \ldots$ per $t=0$. Ciò posto determiniamo ξ, η, ζ con queste condizioni: 1ª per $t=T$ in tutto il corpo sieno

$$\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=0,\quad \xi'=0,\quad \eta'=0,\quad \zeta'=0;$$

2ª sopra un elemento qualunque della porzione s_1 di superficie, situato alla distanza R da O, si eserciti nell'intervallo da $t'-\frac{R}{\Omega}$ a $t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}$ una percussione, le cui componenti, riferite all'unità di superficie, abbiano rispettivamente i valori

$$\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}}L_2\,dt=2\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x},\quad \int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}}M_2\,dt=2\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y},\quad \int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}}N_2\,dt=2\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} \qquad (12)$$

e per ogni altro valore del tempo sieno ivi $L_2=0$, $M_2=0$, $N_2=0$; 3ª sopra un elemento qualunque della porzione s_2 di superficie, situato alla distanza R da O, si eserciti nell'intervallo la $t'-\frac{R}{\Omega}$ a $t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}$ una trazione, per la quale si abbia

$$\int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}}\xi dt=-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x},\quad \int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}}\eta dt=-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y},\quad \int_{t'-\frac{R}{\Omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\Omega}}\zeta dt=-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} \qquad (13)$$

e per ogni altro valore del tempo sieno ivi $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$. Allora la (11) diventa

$$0=-\int_S (u_0\xi'_0+v_0\eta'_0+w_0\zeta'_0-\xi_0u'_0-\eta_0v'_0-\zeta_0w'_0)\,dS+\int_0^T\int_S (X\xi+Y\eta+Z\zeta)\,dS\,dt$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_1}(L\xi+M\eta+N\zeta)\,ds_1\,dt-\frac{1}{\rho}\int_{s_2}\left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+N\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)ds_2\,{}_{t=t'-\frac{R}{\Omega}}$$

$$-\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_2}(L_2u+M_2v+N_2w)ds_2\,dt-2\omega^2\int_{s_1}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)ds_1\,{}_{t=t'-\frac{R}{\Omega}},$$

e moltiplicata per $-\frac{1}{4\pi\Omega^2}$ e sommata colla (10) membro a membro ci dà

$$\Theta_{\substack{R=0\\ t=t'}}=-\frac{1}{4\pi\Omega^2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)dS\,{}_{t=t'-\frac{R}{\Omega}}+\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_1}(L\xi+M\eta+N\zeta)ds_1\,dt\\ \displaystyle-\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_2}(L_2u+M_2v+N_2w)\,ds_2\,dt+\int_0^T\int_S(X\xi+Y\eta+Z\zeta)\,dS\,dt\\ \displaystyle-\int_S(u_0\xi'_0+v_0\eta'_0+w_0\zeta'_0-u'_0\xi_0-v'_0\eta_0-w'_0\zeta_0)\,dS\\ \displaystyle+\frac{1}{\rho}\int_{s_1}\left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+N\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)ds_1\,{}_{t=t'-\frac{R}{\Omega}}\\ \displaystyle+2\omega^2\int_{s_2}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)ds_2\,{}_{t=t'-\frac{R}{\Omega}}\end{array}\right],\qquad(14)$$

che è appunto l'espressione che noi volevamo ottenere. Per giungere a questo risultato abbiam dovuto supporre $T>t'$, ma la differenza $T-t'$ può essere tanto piccola quanto si vuole, e però senza alterare il valore di Θ si potrebbe prendere nel secondo membro t' per limite superiore delle integrazioni rispetto a t, purchè per $t=t'$ si rendano

$$\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=0,\quad \xi'=0,\quad \eta'=0,\quad \zeta'=0.$$

La formula (14) ci darebbe allora alla fine di un tempo t' (cfr. § 9) qualunque la dilatazione in un punto O qualsivoglia del corpo, una volta determinato il moto vibratorio

destato nel corpo stesso dalle percussioni (12) e dalle trazioni (13) subordinatamente alle condizioni imposte per le ξ, η, ζ alla fine del tempo $t = t'$.

3. *Rotazione di un elemento qualunque di un corpo elastico isotropo alla fine di un tempo qualsiasi.* — Passiamo ora alla determinazione delle componenti della rotazione di una particella qualunque. Perciò si consideri una nuova onda sferica col centro sempre in O e per la quale gli spostamenti di un punto qualunque, situato da O alla distanza R, abbiano le espressioni

$$u_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(R+\omega t)}{R}, \quad v_1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{F(R+\omega t)}{R}, \quad w_1 = 0,$$

che, come è facile verificare, soddisfano alle equazioni (2) per $X = Y = Z = 0$. La funzione F si suppone dotata delle stesse proprietà, che quella denotata collo stesso simbolo nel paragrafo precedente. Quest'onda si propaga verso il punto O con velocità ω senza dar luogo ad alterazione nella densità del mezzo. Se ora applichiamo il teorema del prof. Betti ai due gruppi di spostamenti u, v, w; u_1, v_1, w_1 ed allo spazio S′ che si ottiene togliendo da S una sfera Σ col centro in O e di raggio arbitrariamente piccolo, si avrà

$$\rho \int_{S'} \left[\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} \right] dS' + \int_s \left(M \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - L \frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} \right) ds$$

$$+ \int_{s'} \left(M' \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - L' \frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} \right) ds' = \rho \int_{S'} \left(v \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - u \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} \right) dS'$$

$$+ \int_s (L_1 u + M_1 v + N_1 w)\, ds + \int_{s'} (L'_1 u + M'_1 v + N'_1 w)\, ds' \qquad (15)$$

conservate, per le tensioni da intendersi applicate alle superficie s ed s', le notazioni che già si impiegarono precedentemente.

Ricavando poi mediante le equazioni (3) i valori di L', M', N'; L'_1, M'_1, N_1 si ha facilmente

$$M'\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} - L'\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} - (L'_1 u + M'_1 v + N'_1 w) =$$

$$= \rho(\Omega^2 - 2\omega^2)\Theta \left[\frac{dx}{dR}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} - \frac{dy}{dR}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} \right]$$

$$+ \rho\omega^2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{du}{dR}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F}{R} - \dfrac{dv}{dR}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F}{R} + \dfrac{dx}{dR}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F}{R} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F}{R} \right) \\ + \dfrac{dy}{dR}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F}{R} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F}{R} \right) + \dfrac{dz}{dR}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F}{R} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F}{R} \right) \end{array} \right]$$

$$- \rho\omega^2 \left[\begin{array}{l} u\dfrac{d}{dR}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F}{R} - v\dfrac{d}{dR}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F}{R} + u\left(\dfrac{dx}{dR}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\dfrac{F}{R} - \dfrac{dy}{dR}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{F}{R} \right) \\ + v\left(\dfrac{dx}{dR}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{F}{R} - \dfrac{dy}{dR}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\dfrac{F}{R} \right) + w\left(\dfrac{dx}{dR}\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z}\dfrac{F}{R} - \dfrac{dy}{dR}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}\dfrac{F}{R} \right) \end{array} \right].$$

Ora la prima parte del secondo membro è zero in virtù della (5): la parte seconda poi, aggiungendole e togliendole

$$\rho\omega^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dR} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dR} \right) \frac{\partial}{\partial y}\frac{F}{R} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dR} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dR} \right) \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} \right]$$

e ricordando la relazione (5), si può ridurre alla forma

$$2\rho\omega^2\left(\frac{du}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\frac{dv}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)+\rho\omega^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}$$

$$+\rho\omega^2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{dx}{d\mathrm{R}}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dy}{d\mathrm{R}}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{d\mathrm{R}}\right]\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}.$$

Similmente alla terza parte, quando le si aggiunga e si tolga

$$\rho\omega^2 u\left[\frac{dy}{d\mathrm{R}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)+\frac{dz}{d\mathrm{R}}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right]-\rho\omega^2 v\left[\frac{dx}{d\mathrm{R}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)+\frac{dz}{d\mathrm{R}}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right],$$

si può dare la forma seguente

$$2\rho\omega^2\left(u\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-v\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)+\rho\omega^2\left(v\frac{dx}{d\mathrm{R}}-u\frac{dy}{d\mathrm{R}}\right)\Delta^2\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}$$

$$+\rho\omega^2\left(w\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-v\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\frac{dx}{d\mathrm{R}}+\rho\omega^2\left(u\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-w\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\frac{dy}{d\mathrm{R}}+\rho\omega^2\left(v\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-u\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\frac{dz}{d\mathrm{R}}.$$

Quindi dopo alcune facili riduzioni si avrà

$$\mathrm{M}'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\mathrm{L}'\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-(\mathrm{L}'_1u+\mathrm{M}'_1v+\mathrm{N}'_1w)=\rho\omega^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}$$

$$+2\rho\omega^2\left(\frac{du}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-u\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-2\rho\omega^2\left(\frac{dv}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-v\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)$$

$$+\rho\omega^2\left(u\frac{dy}{d\mathrm{R}}-v\frac{dx}{d\mathrm{R}}\right)\Delta^2\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+\rho\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\right]\frac{dx}{d\mathrm{R}}+$$

$$+\rho\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\right]\frac{dy}{d\mathrm{R}}+\rho\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\right]\frac{dz}{d\mathrm{R}}.$$

Moltiplicando ambo i membri per ds' ed integrando a tutta la superficie della sfera Σ, si ha, quando se ne faccia decrescere indefinitamente il raggio R_1,

$$\lim_{\mathrm{R}_1=0}\rho\omega^2\int_{s'}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\,ds'=-4\pi\rho\omega^2\,\mathrm{F}(\omega t)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathrm{R}=0},$$

$$\lim_{\mathrm{R}_1=0}\rho\omega^2\int_{s'}\left(\frac{du}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-u\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\frac{dv}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+v\frac{d}{d\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)ds'=8\pi\rho\omega^2\mathrm{F}(\omega t)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathrm{R}=0},$$

$$\lim_{\mathrm{R}_1=0}\rho\omega^2\int_{s'}\left(u\frac{dy}{d\mathrm{R}}-v\frac{dx}{d\mathrm{R}}\right)\Delta^2\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\,ds'=0,$$

e finalmente

$$\int_{s'}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\right]\frac{dx}{d\mathrm{R}}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\right]\frac{dy}{d\mathrm{R}}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)\right]\frac{dz}{d\mathrm{R}}\right\}_{ds'=0}$$

qualunque sia il raggio della sfera. Quindi, messo nella (15) per

$$\int_{s'}\left(\mathrm{M}'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\mathrm{L}'\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)ds'-\int_{s'}(\mathrm{L}'_1u+\mathrm{M}'_1v+\mathrm{N}'_1w)\,ds'$$

il suo valore $4\pi\rho\omega^2 \mathrm{F}(\omega t)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathrm{R}=0}$, si avrà

$$4\pi\rho\omega^2 \mathrm{F}(\omega t)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathrm{R}=0} = \begin{cases} \rho\int_{\mathrm{S}}\left[\left(\mathrm{X}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\left(\mathrm{Y}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right]d\mathrm{S} \\ +\rho\int_{\mathrm{S}}\left(u\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-v\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)d\mathrm{S}+\int_s\left(\mathrm{L}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\mathrm{M}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)ds \\ +\int_s(\mathrm{L}_1 u+\mathrm{M}_1 v+\mathrm{N}_1 w)\,ds\,, \end{cases} \tag{16}$$

nella qual espressione bisognerà porre

$$\mathrm{L}_1 = \rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\rho\omega^2\left(\frac{dy}{dn}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\frac{dx}{dn}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right),$$

$$\mathrm{M}_1 = -\rho\omega^2\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\rho\omega^2\left(\frac{dy}{dn}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\frac{dx}{dn}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right),$$

$$\mathrm{N}_1 = -\rho\omega^2\left(\frac{dy}{dn}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}-\frac{dx}{dn}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right).$$

Gli integrali tripli vennero estesi a tutto lo spazio S per la ragione additata già parlando della dilatazione Θ.

Prendiamo ora $\mathrm{F}(\mathrm{R}+\omega t) = \frac{2}{\varepsilon}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{\varepsilon}[\mathrm{R}+\omega(t-t')]$, dove ε indichi la grossezza dell'onda sferica e t' il tempo che essa impiega per giungere ad O dalla regione che la medesima occupa per $t=0$. Moltiplichiamo ambi i membri della (16) per dt ed integriamo da $t=0$ a $t=\mathrm{T}>t'$, e supponiamo che per $t=0$ l'onda sferica non sia ancor penetrata nello spazio S ovvero abbia raggiunto soltanto l'elemento della superficie s più lontano da O. Se immaginiamo che l'onda sferica vada via indefinitamente assottigliandosi, con un discorso analogo a quello tenuto per la determinazione di Θ troveremo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{\mathrm{R}=0\\ t=t'}} = \frac{1}{4\pi\omega^2}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(\mathrm{X}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}-\mathrm{Y}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}\right)d\mathrm{S}\quad+\frac{1}{\rho}\int_s\left(\mathrm{L}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}-\mathrm{M}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}\right)ds \\ +\omega^2\displaystyle\int_s\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}-v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}\right)ds \\ +\omega^2\displaystyle\int_s\left\{\begin{array}{l}\frac{dx}{dn}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}+v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}\right)\\ -\frac{dy}{dn}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}+w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}\right)\end{array}\right\}ds \end{array}\right]_{t=t'-\frac{\mathrm{R}}{\omega}}. \tag{17}$$

Distingueremo anche qui i medesimi tre casi, che abbiamo dichiarato nel paragrafo precedente e fisseremo la nostra attenzione sul terzo che è il più generale. Laonde per far sparire dalla (17) le forze o gli spostamentl incogniti considereremo il gruppo di spostamenti ausiliarî ξ, η, ζ determinati colle seguenti condizioni: 1ª per $t = T$ sieno ovunque

$$\xi = 0\,,\quad \eta = 0\,,\quad \zeta = 0\,,\quad \xi' = 0\,,\quad \eta' = 0\,,\quad \zeta' = 0\,;$$

2ª sopra un elemento qualunque della porzione s_1 di superficie, situato alla distanza R da O, si eserciti nell'intervallo da $t' - \frac{R}{\omega}$ a $t' - \frac{R-\varepsilon}{\omega}$ una percussione le cui componenti, riferite all'unità di superficie, abbiano rispettivamente i valori

$$\int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}} L_2\,dt = \rho\omega^2\left[\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y} - \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x^2}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dn}\right],$$

$$\int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}} M_2\,dt = \rho\omega^2\left[-\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} - \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial y^2}\frac{dx}{dn}\right], \tag{18}$$

$$\int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}} N_2 dt = \rho\omega^2\left[-\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial z}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial y\partial z}\frac{dx}{dn}\right].$$

e per ogni altro valore del tempo sieno ivi $L_2 = 0$, $M_2 = 0$, $N_2 = 0$; 3ª sopra un elemento qualunque della porzione s_2 di superficie, situato alla distanza R da O, si eserciti nell'intervallo da $t' - \frac{R}{\omega}$ a $t' - \frac{R-\varepsilon}{\omega}$ una trazione per la quale si abbia

$$\int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}} \xi\,dt = \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\,,\quad \int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}} \eta\,dt = -\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\,,\quad \zeta = 0 \tag{19}$$

e per ogni altro valore del tempo sieno ivi $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$. Allora, applicando il teorema del prof. Betti al doppio sistema di spostamenti $u, v, w; \xi, \eta, \zeta$, si avrà

$$0=-\int_S (u_0\xi'_0+v_0\eta'_0+w_0\zeta'_0-\xi_0 u'_0-\eta_0 v'_0-\zeta_0 w'_0)\,dS+\int_0^T\int_S (X\xi+Y\eta+Z\zeta)dS\,dt$$

$$-\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_2}(L_2 u+M_2 v+N_2 w)\,ds_2\,dt-\frac{1}{\rho}\int_{s_2}\left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}}ds_2$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_1}(L\xi+M\eta+N\zeta)\,ds_1\,dt$$

$$-\omega^2\int_{s_1}\left\{\begin{array}{c} u\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-v\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} \\ +\dfrac{dx}{dn}\left(u\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\right) \\ -\dfrac{dy}{dn}\left(u\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+w\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)\end{array}\right\}_{t=t'-\frac{R}{\omega}}ds_1$$

Quest'equazione, moltiplicata per $\frac{1}{4\pi\omega^2}$ e sommata membro a membro colla (17), ci dà

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{R=0\\t=t'}}=\frac{1}{4\pi\omega^2}\left[\begin{array}{c} \displaystyle\int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}}dS+\int_0^T\int_S(X\xi+Y\eta+Z\zeta)dS\,dt \\ -\displaystyle\int_S(u_0\xi'_0+v_0\eta'_0+w_0\zeta'_0-\xi_0 u'_0-\eta_0 v'_0-\zeta_0 w'_0)\,dS \\ +\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^T\int_{s_1}(L\xi+M\eta+N\zeta)ds_1dt-\frac{1}{\rho}\int_0^T\int_{s_2}(L_2u+M_2v+N_2w)ds_2dt \\ +\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_{s_1}\left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}}ds_1 \\ +\omega^2\displaystyle\int_{s_1}\left\{\begin{array}{c} u\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-v\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} \\ +\dfrac{dx}{dn}\left(u\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\right) \\ -\dfrac{dy}{dn}\left(u\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+w\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)\end{array}\right\}_{t=t'-\frac{R}{\omega}}ds_2\end{array}\right] \tag{20}$$

che è appunto l'espressione da noi cercata.

Per giungere a questo risultato abbiam dovuto supporre $T > t'$, ma la differenza $T - t'$ può essere tanto piccola quanto si vuole; epperò, senza alterare il valore di $\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$ (che d'or innanzi designeremo con $\mathfrak{E}_3$), è lecito prendere nel secondo membro t' per limite superiore delle integrazioni rispetto a t, purchè per $t = t'$ si rendano

$$\xi = 0\,, \quad \eta = 0\,, \quad \zeta = 0\,, \quad \xi' = 0\,, \quad \eta' = 0\,, \quad \zeta' = 0\,.$$

La formula (20) ci darebbe allora alla fine di un tempo t' qualunque (cfr. § 9) il doppio $\mathfrak{E}_3$ della componente della rotazione in un punto O qualsivoglia del corpo una volta determinato il moto vibratorio destato nel corpo stesso delle percussioni (18) e dalle trazioni (19) subordinatamente alle condizioni imposte per le $\xi, \eta, \zeta, \xi' \ldots$ alla fine del tempo $t = t'$.

Espressioni analoghe si hanno pei doppî $\mathfrak{E}_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, $\mathfrak{E}_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ delle altre due componenti della rotazione.

4. *Determinazione degli spostamenti di un punto qualunque di un corpo omogeneo elastico isotropo alla fine di un tempo qualsiasi.* — Poichè le equazioni (2) si possono mettere sotto la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \omega^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \omega^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{21}$$

è evidente che, una volta determinate le $\Theta, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$, con una duplice integrazione rispetto al tempo si otterranno i valori di u, v, w.

Se dei punti situati in superficie sono dati o in qualche modo si sanno calcolare gli spostamenti, ovvero qualche particolar considerazione ne fa conoscere le derivate degli spostamenti rispetto alla normale interna (1), possiamo dispensarci dalla ricerca delle funzioni $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$; ma, ottenuta la dilatazione Θ, procedere al calcolo di u, v, w nel modo seguente.

Consideriamo la prima delle equazioni (2) ed insieme colla funzione u un'altra u_1, la quale in tutto lo spazio S soddisfi all'equazione

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 u_1\,; \tag{22}$$

il teorema del prof. Betti, applicato alle due funzioni u, u_1 e nello spazio S', che si

(1) Avuta la dilatazione Θ, basterebbe per $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ la conoscenza de'valori in superficie solamente, perchè risultassero senz'altro determinate anche le $\frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$, per quella parte di superficie ben inteso, per la quale son date le forze esterne applicate: invero le eq. (3) si possono anche scrivere così

$$\frac{\mathrm{L}}{\rho} + 2\omega^2 \frac{du}{dn} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\,\Theta \frac{dx}{dn} + \omega^2 \left(\mathfrak{E}_3 \frac{dy}{dn} - \mathfrak{E}_2 \frac{dz}{dn} \right) = 0\,,$$

. . . . . .

ottiene togliendo da S una sfera di raggio arbitrariamente piccolo col centro in un punto O qualunque del corpo, ci dà prima di tutto

$$\int_{S'}\left(u_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-u\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)dS'=\int_{S'}Xu_1\,dS'+(\Omega^2-\omega^2)\int_{S'}u_1\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dS'$$

$$+\omega^2\int_s\left(u\frac{du_1}{dn}-u_1\frac{du}{dn}\right)ds\quad+\omega^2\int_{s'}\left(u\frac{du_1}{dR}-u_1\frac{du}{dR}\right)ds'.$$

Prendendo poi

$$u_1=\frac{F(R+\omega t)}{R},$$

si ricava

$$4\pi F(\omega t)U_{R=0}=-\frac{1}{\omega^2}\int_S\left(u_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-u\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)dS+\frac{1}{\omega^2}\int_S u_1\left(X+(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)dS$$

$$+\int_s\left(u\frac{du_1}{dn}-u_1\frac{du}{dn}\right)ds.$$

Indi fatto

$$F(R+\omega t)=\frac{2}{\varepsilon}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{\varepsilon}[R+\omega(t-t')],$$

e supposto, come al solito, che per un dato valore di R la funzione F non sia diversa da zero che per t compreso tra $t'-\frac{R}{\omega}$ e $t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}$ e che inizialmente la F o sia zero ovunque o diversa da zero soltanto nell'elemento di superficie più lontano da O, si otterrà

$$(u)_{\substack{R=0\\t=t'}}=\frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S\left(\frac{X+(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}}{R}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}}dS+\frac{1}{4\pi}\int_s\left(u\,d\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\frac{du}{dn}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}}ds\quad.\quad(23)$$

Per eliminare le funzioni incognite u, ovvero $\frac{du}{dn}$ si assumerà una funzione ausiliaria U, la quale soddisfi in tutto lo spazio S all'equazione (22) ed inoltre a queste altre condizioni: 1ª per $t=T>t'$ siano ovunque $U=0$, $U'=0$; 2ª sull'elemento, situato alla distanza R da O, della porzione s_1 di superficie, su cui son dati i valori di u, si abbia

$$\int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}}U\,dt=\frac{1}{R}$$

e per ogni altro valore del tempo sia ivi $U=0$; 3ª sull'elemento, situato alla distanza R da O, della porzione s_2 di superficie, su cui sono conosciuti i valori di $\frac{du}{dn}$,

si abbia

$$\int_{t'-\frac{R}{\omega}}^{t'-\frac{R-\varepsilon}{\omega}} \frac{dU}{dn}\,dt = \frac{d\,\frac{1}{R}}{dn},$$

e per ogni altro valore del tempo sia ivi $\frac{dU}{dn}=0$. Allora, con un ragionamento già ripetuto più volte, si trova

$$0=\frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S (U_0 u'_0 - U'_0 u_0)\,dS + \frac{1}{4\pi\omega^2}\int_0^T\int_S \left(X + (\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) U\,dS\,dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^T\int_{s_1} u\frac{dU}{dn}\,ds_1\,dt - \frac{1}{4\pi}\int_{s_1}\frac{1}{R}\left(\frac{du}{dn}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} ds_1 + \frac{1}{4\pi}\int_{s_2}\frac{d\,\frac{1}{R}}{dn}\,u\,ds_2 - \frac{1}{4\pi}\int_{s_2}\int_{t=t'-\frac{R}{\omega}}^T U\frac{du}{dn}\,ds_2\,dt,$$

e quest'equazione, sottratta membro a membro dalla (23), ci dà

$$(u)_{\substack{R=0\\ t=t'}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\omega^2}\displaystyle\int_S \left(\frac{X+(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}}{R}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS - \frac{1}{4\pi\omega^2}\int_0^T\int_S \left(X+(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) U\,dS\,dt \\ -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^T\int_{s_1} u\frac{dU}{dn}\,ds_1\,dt + \frac{1}{4\pi}\int_{s_1} u\,\frac{d\,\frac{1}{R}}{dn}\,ds_1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^T\int_{s_2} U\frac{du}{dn}\,ds_2\,dt - \frac{1}{4\pi}\int_{s_2}\left(\frac{du}{dn}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}}\frac{ds_2}{R} \\ -\dfrac{1}{4\pi\omega^2}\displaystyle\int_S (U_0 u'_0 - U'_0 u_0)\,dS, \end{cases} \tag{24}$$

che è la formula finale, a cui volevamo pervenire: in essa come al solito si può prendere t' in luogo di T per limite superiore delle integrazioni rispetto al tempo, purchè per $t=t'$ si abbia $U=0, U'=0$.

Formule analoghe alle (23) e (24) si hanno per v, w.

5. *Dilatazione in un punto qualunque di un corpo indefinito alla fine di un tempo qualsiasi.* — Se il corpo elastico si estende all'infinito, non possiamo più far uso delle formule (10) e (17) pel calcolo della dilatazione e delle componenti della rotazione di un elemento qualsiasi del corpo stesso: ma è facile ricavare le formule acconce a questo caso. Perciò, volendo p. es. procedere alla determinazione di Θ in un punto O, si descriva col centro in questo punto una sfera di raggio $\Omega t'+\varepsilon$ e si consideri la porzione del corpo contenuta entro questa sfera; indi si scelga F così che sulla superficie di essa si annullino, anche per $t=0$, non solo gli spostamenti u_1, v_1, w_1, e le velocità u'_1, v'_1, w'_1, ma anche le tensioni provocatevi da questi spostamenti: a tal fine basterà prendere F proporzionale a $\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{\varepsilon}\left[R+\Omega(t-t')\right]$.

Ciò posto riprendasi la equazione (7), si moltiplichi per dt e si integri fra $t=0$ e $t=\mathrm{T}$: ne verrà

$$4\pi\Omega^2\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{F}(\Omega t)\underset{\mathrm{R}=0}{\Theta}\,dt=\begin{cases}-\displaystyle\int_{\mathrm{S}}dS\int_0^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{X}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+\mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+\mathrm{Z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)dt\\ +\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(u\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+w\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)_{t=0}dS\\ -\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(u'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+v'\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+w'\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)_{t=0}dS,\end{cases}$$

quando si sopprimano tutti i termini che vanno a zero. Rifacendo sulla funzione F le solite supposizioni, dall'equazione precedente si deduce tosto

$$4\pi\underset{t=t'}{\Theta_{\mathrm{R}=0}}=\begin{cases}-\dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(\mathrm{X}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}+\mathrm{Y}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}+\mathrm{Z}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial z}\right)_{t=t'-\frac{\mathrm{R}}{\Omega}}dS\\ +\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(u\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+w\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)_{t=0}dS\\ -\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(u'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+v'\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}+w'\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}\right)_{t=0}dS,\end{cases}$$

dove gli integrali del secondo membro debbono estendersi allo spazio contenuto entro la sfera di centro O e di raggio $\Omega t'$. Ma se si riflette che per $t=0$, la F non ha valore diverso da zero se non nell'involucro sferico compreso tra le sfere di raggi $\Omega t'$ ed $\Omega t'+\varepsilon$, si può dare all'espressione di Θ una forma più semplice. Prendasi a questo fine un sistema di coordinate polari R,θ,ψ col centro in O: si avrà

$$4\pi\Omega\underset{t=t'}{\Theta_{\mathrm{R}=0}}=\begin{cases}-\dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\left(\mathrm{X}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial x}+\mathrm{Y}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial y}+\mathrm{Z}\frac{\partial\frac{1}{\mathrm{R}}}{\partial z}\right)_{t=t'-\frac{\mathrm{R}}{\Omega}}dS\\ +\Omega\displaystyle\iint\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\psi\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\left(u_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{F}(\mathrm{R})}{d\mathrm{R}}+v_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{F}(\mathrm{R})}{d\mathrm{R}}+w_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{F}(\mathrm{R})}{d\mathrm{R}}\right)\mathrm{R}^2d\mathrm{R}\\ -\displaystyle\iint\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\psi\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\left(u'_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}+v'_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}+w'_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{R}^2d\mathrm{R}\end{cases}$$

ove si tenga conto che $\frac{\partial F}{\partial t} = \Omega \frac{\partial F}{\partial R}$. Ora, se per compendio si mette

$$\frac{dx}{dR} = \alpha, \quad \frac{dy}{dR} = \beta, \quad \frac{dz}{dR} = \gamma,$$

si deduce

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R} = \frac{\alpha}{R}\left(\frac{dF}{dR} - \frac{F}{R}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\frac{dF}{dR} = \frac{\alpha}{R}\left(\frac{d^2F}{dR^2} - \frac{1}{R}\frac{dF}{dR}\right),$$

epperciò

$$\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\left(\Omega u_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\frac{dF}{dR} - u'_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}\right)R^2 dR = \int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\left\{\Omega u_0\left(R\frac{d^2F}{dR^2} - \frac{dF}{dR}\right) + u'_0\left(F - R\frac{dF}{dR}\right)\right\}\alpha dR.$$

Ma, facendo convergere ε a zero,

$$\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha u_0 R\frac{d^2F}{dR^2}dR = \alpha\left(u_0 R\frac{dF}{dR}\right)_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon} - \int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha\frac{d.u_0 R}{dR}\frac{dF}{dR}dR = \alpha\left(\frac{d^2.u_0 R}{dR^2}\right)_{R=\Omega t'},$$

$$\int_{\Omega t}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha u_0\frac{dF}{dR}dR = \alpha(u_0 F)_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon} - \int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha F\frac{du_0}{dR}dR = -\alpha\left(\frac{du_0}{dR}\right)_{R=\Omega t'},$$

$$\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha u'_0 F\,dR = \alpha\,(u'_0)_{R=\Omega t'},$$

$$\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha u'_0 RF\frac{dF}{dR}dR = \alpha(u'_0 RF)_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon} - \int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\alpha F\frac{d.u_0 R}{dR}dR = -\alpha\left(\frac{d.u_0 R}{dR}\right)_{R=\Omega t'}.$$

Quindi sostituendo

$$\int_{\Omega t'}^{\Omega t'+\varepsilon}\left(\Omega u_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\frac{dF}{dR} - u'_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{R}\right)R^2 dR = \alpha\left(u'_0 + \frac{d.u'_0 R}{dR} + \Omega\frac{du_0}{dR} + \Omega\frac{d^2.u_0 R}{dR^2}\right)_{R=\Omega t'}.$$

Dopo riduzioni analoghe fatte per tutti gli altri termini, si trova facilmente

$$\Theta_{\substack{R=0\\t=t'}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\Omega}\iint\left[\alpha\left(u'_0 + \dfrac{d.u'_0 R}{dR}\right) + \beta\left(v'_0 + \dfrac{d.v'_0 R}{dR}\right) + \gamma\left(w'_0 + \dfrac{d.w'_0 R}{dR}\right)\right]_{R=\Omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ + \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{d}{dR}\iint\left[\alpha\left(u_0 + \dfrac{d.u_0 R}{dR}\right) + \beta\left(v_0 + \dfrac{d.v_0 R}{dR}\right) + \gamma\left(w_0 + \dfrac{d.w_0 R}{dR}\right)\right]_{R=\Omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ - \dfrac{1}{4\pi\Omega^2}\displaystyle\int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} + Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y} + Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)_{t=t'-\frac{R}{\Omega}} dS \end{cases} \quad (25)$$

Le integrazioni rispetto a ψ vanno estese da $\psi=0$ a $\psi=2\pi$ e le integrazioni rispetto a θ da $\theta=0$ a $\theta=\pi$. Poichè per ipotesi inizialmente si conoscono per tutto il corpo i valori di $u_0, v_0, w_0, u_0', v_0', w_0'$, così la formula che abbiamo ottenuto, ci dà senz'altro alla fine di qualsivoglia tempo la dilatazione in un punto qualunque del corpo.

6. *Rotazione di un elemento qualunque di un corpo indefinito alla fine di un tempo qualsiasi.* — Con un processo analogo si ricavano per le componenti $\frac{1}{2}\mathfrak{E}_1, \frac{1}{2}\mathfrak{E}_2, \frac{1}{2}\mathfrak{E}_3$ della rotazione di una particella qualsivoglia del corpo i valori

$$
(\mathfrak{E}_1)_{\substack{R=0\\t=t'}} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4\pi\omega}\iint\left[\beta\left(w'_0+\frac{d.w'_0R}{dR}\right)-\gamma\left(v'_0+\frac{d.v'_0R}{dR}\right)\right]_{R=\omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ &+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dR}\iint\left[\beta\left(w_0+\frac{d.w_0R}{dR}\right)-\gamma\left(v_0+\frac{d.w_0R}{dR}\right)\right]_{R=\omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ &-\frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S\left(Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS \end{aligned} \right.,
$$

$$
(\mathfrak{E}_2)_{\substack{R=0\\t=t'}} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4\pi\omega}\iint\left[\gamma\left(u'_0+\frac{d.u'_0R}{dR}\right)-\alpha\left(w'_0+\frac{d.w'_0R}{dR}\right)\right]_{R=\omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta d\psi \\ &+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dR}\iint\left[\gamma\left(u_0+\frac{d.u_0R}{dR}\right)-\alpha\left(w_0+\frac{d.w_0R}{dR}\right)\right]_{R=\omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ &-\frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}-Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS \end{aligned} \right.,
\qquad (26)
$$

$$
(\mathfrak{E}_3)_{\substack{R=0\\t=t'}} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4\pi\omega}\iint\left[\alpha\left(v'_0+\frac{d.v'_0R}{dR}\right)-\beta\left(u'_0+\frac{d.u'_0R}{dR}\right)\right]_{R=\omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ &+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dR}\iint\left[\alpha\left(v_0+\frac{d.v_0R}{dR}\right)-\beta\left(u_0+\frac{d.u_0R}{dR}\right)\right]_{R=\omega t'}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi \\ &-\frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S\left(Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}-X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS \end{aligned} \right.
$$

7. *Eliminazione delle forze* X, Y, Z. — Nella determinazione del moto vibratorio di un corpo elastico isotropo possiam sempre supporre che le forze X, Y, Z sieno zero, purchè alle forze applicate in superficie od agli spostamenti a cui sono obbligati i punti situati su di essa, si intendano sostituite certe altre forze o certi altri spostamenti che ora troveremo.

Concepiamo il corpo come indefinitamente esteso e sollecitato entro lo spazio S dalle forze X, Y, Z: supponiamo inoltre che per $t=0$ sieno nulli sì gli spostamenti che le velocità di qualsivoglia punto del corpo. Allora la dilatazione Θ' ed i doppi

$\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \mathfrak{E}'_3$ delle componenti della rotazione di una particella, presa intorno al punto x', y', z' (la cui distanza da un altro qualunque x, y, z sia R) qualsiasi alla fine del tempo t' saranno espresse per (cfr. §§ 5, 6).

$$\left.\begin{aligned}
\Theta' &= \frac{1}{4\pi\Omega^2}\int_S \left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x'} + Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y'} + Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z'}\right)_{t=t'-\frac{R}{\Omega}} dS\,,\\
\mathfrak{E}'_1 &= \frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S \left(Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y'} - Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z'}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS\,,\\
\mathfrak{E}'_2 &= \frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S \left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z'} - Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x'}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS\,,\\
\mathfrak{E}'_3 &= \frac{1}{4\pi\omega^2}\int_S \left(Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x'} - X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y'}\right)_{t=t'-\frac{R}{\omega}} dS\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Se ora si riflette, che si ha in generale

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2 u &= \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{E}_2}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_3}{\partial y}\,,\\
\Delta^2 v &= \frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{E}_3}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_1}{\partial z}\,,\\
\Delta^2 w &= \frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\mathfrak{E}_1}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_2}{\partial x}\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

è chiaro che, detti u', v', w' gli spostamenti per $t=t'$ di una particella $(a,b,c,)$ corrispondenti ai valori testè scritti della dilatazione e della rotazione, si avrà

$$\left.\begin{aligned}
-4\pi u' &= \frac{\partial}{\partial a}\int_S \frac{\Theta' dS}{R} + \frac{\partial}{\partial c}\int_S \frac{\mathfrak{E}'_2 dS}{R} - \frac{\partial}{\partial b}\int_S \frac{\mathfrak{E}'_3 dS}{R} + u_1\,,\\
-4\pi v' &= \frac{\partial}{\partial b}\int_S \frac{\Theta' dS}{R} + \frac{\partial}{\partial a}\int_S \frac{\mathfrak{E}'_3 dS}{R} - \frac{\partial}{\partial c}\int_S \frac{\mathfrak{E}'_1 dS}{R} + v_1\,,\\
-4\pi w' &= \frac{\partial}{\partial c}\int_S \frac{\Theta' dS}{R} + \frac{\partial}{\partial b}\int_S \frac{\mathfrak{E}'_1 dS}{R} - \frac{\partial}{\partial a}\int_S \frac{\mathfrak{E}'_2 dS}{R} + w_1\,;
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

in queste ultime espressioni è

$$R = \sqrt{(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2}\,,$$

x', y', z' denotano le variabili d'integrazione, e le funzioni u_1, v_1, w_1 in tutto lo spazio debbono soddisfare rispettivamente alle equazioni

$$\Delta^2 u_1 = 0\,, \qquad \Delta^2 v_1 = 0\,, \qquad \Delta^2 w_1 = 0\,;$$

ma all'infinito si ha $u_1=0, v_1=0, w_1=0$: dunque le funzioni u_1, v_1, w_1 son nulle in tutto lo spazio.

Ciò posto, se nel caso in cui il corpo sia tutto compreso entro uno spazio finito S, si ponga

$$u = \mathrm{U} + u'\,, \qquad v = \mathrm{V} + v'\,, \qquad w = \mathrm{W} + w'$$

e si prendano per u'_1, v'_1, w'_1 i valori dati dalle (29), nelle equazioni indefinite spariscono X, Y, Z ed u, v, w si trovano sostituite da U, V, W. Le condizioni ai limiti poi esigeranno: 1° che su una parte della superficie $\mathrm{U}=u-u'$, $\mathrm{V}=v-v'$, $\mathrm{W}=w-w'$ si riducano a funzioni determinate delle coordinate e del tempo: 2° che nella restante parte sieno applicate forze uguali ad L, M. N rispettivamente diminuite delle tensioni, che vi provocano gli spostamenti u', v', w'. In questo modo la determinazione degli spostamenti u, v, w è ridotta a quella degli spostamenti U,V,W pei quali le forze applicate ad ogni elemento della massa sono uguali a zero. Nel paragrafo seguente supporrò fatta la eliminazione delle forze X, Y, Z.

8. *Velocità e spostamenti di un punto qualunque di un corpo indefinito.* — Per dare alle espressioni delle velocità e degli spostamenti una forma non troppo complicata fissiamo le seguenti convenzioni. Si ponga

$$\begin{aligned} u'_0 &= \varphi_1(x + \mathrm{R}\alpha,\ y + \mathrm{R}\beta,\ z + \mathrm{R}\gamma), \qquad v'_0 = \varphi_2(\ldots),\ w'_0 = \varphi_3(\ldots), \\ u_0 &= f_1(x + \mathrm{R}\alpha,\ y + \mathrm{R}\beta,\ z + \mathrm{R}\gamma), \qquad v_0 = f_2(\ldots),\ w_0 = f_3(\ldots), \end{aligned}$$

essendo x, y, z le coordinate di un punto O qualunque del corpo, R la distanza da O di un altro punto pure qualsivoglia M ed α, β, γ i coseni di direzione della retta OM. Di più si indichi semplicemente con $\varphi(\Omega t)$, $f(\Omega t)$, $\varphi(\omega t)$, $f(\omega t)$ il risultato della sostituzione di Ωt, o di ωt ad R nelle funzioni φ ed f: e si rifletta che le espressioni delle velocità e degli spostamenti si comporranno di tre gruppi di termini, un primo gruppo dipendente dalle due funzioni φ_1, f_1, il secondo dalle due funzioni φ_2, f_2 ed il terzo dalle due funzioni φ_3, f_3, e che ricavato uno de' tre gruppi si ottengono gli altri due con soli cambiamenti di lettere. Finalmente per compendio si faccia

$$\begin{aligned} \Omega t\alpha &= \mathrm{A}\,, \qquad \Omega t\beta = \mathrm{B}\,, \qquad \Omega t\gamma = \mathrm{C}\,, \\ \omega t\alpha &= a\,, \qquad \omega t\beta = b\,, \qquad \omega t\gamma = c\,. \end{aligned}$$

Ora il cercare il gruppo di termini dipendenti dalle funzioni φ_1, f_1 equivale al determinare gli spostamenti e le velocità di un punto qualunque del corpo, quando inizialmente sia

$$u'_0 = \varphi_1,\ v'_0 = 0,\ w'_0 = 0\,; \qquad u_0 = f_1,\ v_0 = 0,\ w_0 = 0\,;$$

e in questo caso le espressioni della dilatazione $\Theta^{(1)}$ e dei doppî $\mathfrak{C}_1^{(1)}, \mathfrak{C}_2^{(1)}, \mathfrak{C}_3^{(1)}$ delle componenti della rotazione di una particella qualunque (x, y, z) del corpo ed alla fine di un tempo t qualsivoglia si riducono facilmente a (cfr. §§ 15, 16)

$$\Theta^{(1)} = \frac{1}{4\pi\Omega}\int_\Sigma \frac{\alpha}{t}\frac{d.t^2\varphi_1(\Omega t)}{dt}d\Sigma + \frac{1}{4\pi\Omega}\frac{d}{dt}\int_\Sigma \frac{\alpha}{t}\frac{d.t^2 f_1(\Omega t)}{dt}d\Sigma,$$

$$\mathfrak{C}_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi\omega}\int_\Sigma \frac{\gamma}{t}\frac{d.t^2\varphi_1(\omega t)}{dt}d\Sigma + \frac{1}{4\pi\omega}\frac{d}{dt}\int_\Sigma \frac{\gamma}{t}\frac{d.t^2 f_1(\omega t)}{dt}d\Sigma,$$

$$\mathfrak{C}_3^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\omega}\int_\Sigma \frac{\beta}{t}\frac{d.t^2\varphi_1(\omega t)}{dt}d\Sigma - \frac{1}{4\pi\omega}\frac{d}{dt}\int_\Sigma \frac{\beta}{t}\frac{d.t^2 f_1(\omega t)}{dt}d\Sigma,$$

(la $\mathfrak{C}_1^{(1)}$ è nulla) in cui per brevità si è posto $\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi = d\Sigma$.

Ciò posto secondo col primo de' metodi indicati nel § 4 si avranno per un punto qualunque i valori dello spostamento u_1 e della velocità u'_1 parallela all'asse della x, integrando l'equazione

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \Omega^2\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial x} + \omega^2\left(\frac{\partial\mathfrak{C}_2^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}_3^{(3)}}{\partial y}\right).$$

Quest'equazione, ove si rifletta che

$$\frac{\partial\varphi_1(\Omega t)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1(\Omega t)}{\partial A}, \quad \frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}, \ldots$$

e si prendano per $\Theta^{(1)}, \mathfrak{C}_2^{(1)}, \mathfrak{C}_3^{(1)}$ i valori scritti testè, si cambia nella seguente

$$4\pi\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left\{\begin{array}{l} \Omega\displaystyle\int_\Sigma \frac{\alpha}{t}\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{\partial\varphi_1(\Omega t)}{\partial A}\right)d\Sigma + \Omega\frac{d}{dt}\int_\Sigma \frac{\alpha}{t}\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{\partial f_1(\Omega t)}{\partial A}\right)d\Sigma \\ + \omega\displaystyle\int_\Sigma \frac{\beta}{t}\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}\right)d\Sigma + \omega\frac{d}{dt}\int_\Sigma \frac{\beta}{t}\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial b}\right)d\Sigma \\ + \omega\displaystyle\int_\Sigma \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial c}\right)d\Sigma + \omega\frac{d}{dt}\int_\Sigma \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial c}\right)d\Sigma \end{array}\right\}.$$

Se ne moltiplichino ambo i membri per dt e si integri fra $t=0$ e t qualunque: si avrà

$$4\pi\Big((u'_1-(u'_1)_0\Big)=\begin{cases}\Omega\displaystyle\iint_\Sigma\int_0^t\alpha\frac{\partial\varphi_1(\Omega t)}{\partial A}dt\,d\Sigma+\omega\iint_\Sigma\int_0^t\Big(\beta\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}+\gamma\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial c}\Big)dt\,d\Sigma\\ +\Omega\displaystyle\int_\Sigma\alpha t\frac{\partial\varphi_1(\Omega t)}{\partial A}d\Sigma+\omega\int_\Sigma t\Big(\beta\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}+\gamma\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial c}\Big)d\Sigma\\ +\Omega\displaystyle\int_\Sigma\frac{\alpha}{t}\frac{d}{dt}\Big(t^2\frac{\partial f_1(\Omega t)}{\partial A}\Big)d\Sigma+\omega\int_\Sigma\Big[\beta\frac{d}{dt}\Big(t^2\frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial b}\Big)+\gamma\frac{d}{dt}\Big(t^2\frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial c}\Big)\Big]d\Sigma\end{cases}. \quad (30)$$

Ma posto $\omega t=R'$, si ha

$$\int_\Sigma\Big(\beta\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}+\gamma\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial c}\Big)d\Sigma=\int_\Sigma\Big(\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial a}\frac{da}{dR'}+\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial b}\frac{db}{dR'}+\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial c}\frac{dc}{dR'}\Big)d\Sigma-\int_\Sigma\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial a}\Big)\frac{da}{dR'}d\Sigma$$

ossia

$$\int_\Sigma\Big(\beta\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}+\gamma\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial c}\Big)d\Sigma=\int_\Sigma\frac{d\varphi_1(R')}{dR'}d\Sigma-\int_\Sigma\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial a}\frac{da}{dR'}d\Sigma=\frac{1}{\omega}\int_\Sigma\frac{d\varphi_1(\omega t)}{dt}d\Sigma-\int_\Sigma\alpha\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial a}d\Sigma\,;$$

quindi

$$\iint_\Sigma\int_0^t\Big(\beta\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial b}+\gamma\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial c}\Big)dt\,d\Sigma=\frac{1}{\omega}\iint_\Sigma\int_0^t\frac{d\varphi_1(\omega t)}{dt}dt\,d\Sigma-\iint_\Sigma\int_0^t\alpha\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial a}dt\,d\Sigma\,.$$

Ora

$$\iint_\Sigma\int_0^t\frac{d\varphi_1(\omega t)}{dt}dt\,d\Sigma=\int_\Sigma\varphi_1(\omega t)\,d\Sigma-4\pi\varphi_1(0)\,,$$

$$\iint_\Sigma\int_0^t\alpha\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial a}dt\,d\Sigma=\int_{S'}\frac{\partial R'}{\partial a}\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial a}\frac{dS'}{R'^2}=-\int_{S'}\frac{\partial\frac{1}{R'}}{\partial a}\frac{\partial\varphi_1(R')}{\partial a}dS',$$

e quest'ultimo integrale dev'essere esteso a tutto lo spazio S′ racchiuso entro la sfera avente il centro in O e per raggio ωt. Ma

$$\int_{S'}\frac{\partial\frac{1}{R'}}{\partial a}\frac{\partial\varphi_1(\omega t)}{\partial a}dS'=\int_{S'}\frac{\partial}{\partial a}\Big(\varphi_1(\omega t)\frac{\partial\frac{1}{R'}}{\partial a}\Big)dS'-\int_{S'}\varphi_1(\omega t)\frac{\partial^2\frac{1}{R'}}{\partial a^2}dS'\,,$$

ossia

$$\int_{S'} \frac{\partial \frac{1}{R'}}{\partial a} \frac{\partial \varphi_1(\omega t)}{\partial a} dS' = \int_{\Sigma} \alpha \varphi_1(\omega t) \frac{\partial \frac{1}{R'}}{\partial a} R'^2 \, d\Sigma + \int_{\Sigma} \int_{0}^{\omega t} \frac{1-3\alpha^2}{R'} \varphi_1(R') \, dR' \, d\Sigma .$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} \int_{0}^{t} \alpha \frac{\partial \varphi_1(\omega t)}{\partial a} dt \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \alpha^2 \varphi_1(\omega t) \, d\Sigma - \int_{\Sigma} \int_{0}^{\omega t} \frac{1-3\alpha^2}{R'} \varphi_1(R') \, dR' \, d\Sigma .$$

Si troverà in modo simile

$$\int_{\Sigma} \int_{0}^{t} \alpha \frac{\partial \varphi_1(\Omega t)}{\partial a} dt \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \alpha^2 \varphi_1(\Omega t) \, d\Sigma - \int_{\Sigma} \int_{0}^{\omega t} \frac{1-3\alpha^2}{R'} \varphi_1(R') \, dR' \, d\Sigma .$$

Sostituendo nel secondo membro della (30) pegli integrali che vi figurano, quelli che abbiamo ottenuto colle trasformazioni dichiarate sin qui, si avrà, dopo alcune facili e brevi riduzioni

$$4\pi w'_1 = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Sigma} \frac{d.t\varphi_1(\omega t)}{dt} d\Sigma + \int_{\Sigma} \alpha^2 \left[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t) \right] d\Sigma \\ \displaystyle - \int_{\Sigma} \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{1-3\alpha^2}{R'} \varphi_1(R') \, dR' \, d\Sigma + \Omega t \int_{\Sigma} \alpha \frac{\partial \varphi_1(\Omega t)}{\partial A} d\Sigma - \omega t \int_{\Sigma} \alpha \frac{\partial \varphi_1(\omega t)}{\partial a} d\Sigma \\ \displaystyle + \omega \int_{\Sigma} \frac{\alpha}{t} \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial A} \right) d\Sigma + \omega \int_{\Sigma} \left(\beta \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial b} \right) + \gamma \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{\partial f_1(\omega t)}{\partial c} \right) \right) d\Sigma \end{array} \right\}, \quad (31)$$

od anche, riflettendo alle relazioni facilmente deducibili

$$\Omega t \int_{\Sigma} \alpha \frac{\partial \varphi_1(\Omega t)}{\partial A} d\Sigma = \int_{\Sigma} (3\alpha^2 - 1) \varphi_1(\Omega t) \, d\Sigma + t \int_{\Sigma} \alpha^2 \frac{d\varphi_1(\Omega t)}{dt} d\Sigma ,$$

$$\omega t \int_{\Sigma} \alpha \frac{\partial \varphi_1(\omega t)}{\partial A} d\Sigma = \int_{\Sigma} (3\alpha^2 - 1) \varphi_1(\omega t) \, d\Sigma + t \int_{\Sigma} \alpha^2 \frac{d\varphi_1(\omega t)}{dt} d\Sigma ,$$

ed alle altre analoghe quando si muti φ in f,

$$4\pi u'_1 = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Sigma \frac{d\,.\,t\varphi_1(\omega t)}{dt} d\Sigma + \int_\Sigma (3\alpha^2-1)\Big[\varphi_1(\Omega t)-\varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma \\ \displaystyle + \int_\Sigma \alpha^2 \frac{d}{dt} t\Big[\varphi_1(\Omega t)-\varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \iint_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{3\alpha^2-1}{\mathrm{R}'} \varphi_1(\mathrm{R}')\, d\mathrm{R}'\, d\Sigma \\ \displaystyle \frac{d}{dt}\cdot\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Sigma \frac{d\,.\,tf_1(\omega t)}{dt} d\Sigma + \int_\Sigma (3\alpha^2-1)\Big[f_1(\Omega t)-f_1(\omega t)\Big] d\Sigma \\ \displaystyle + \int_\Sigma \alpha^2 \frac{d}{dt} t\Big[f_1(\Omega t)-f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \iint_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{3\alpha^2-1}{\mathrm{R}'} f_1(\mathrm{R}')\, d\mathrm{R}'\, d\Sigma \end{array} \right] \end{array} \right\}; \quad (32)$$

e questa è l'espressione definitiva, che noi cercavamo per la componente u'_1 della velocità.

Moltiplicando ambo i membri di quest'espressione per dt ed integrando tra $t=0$ e t qualunque, la projezione u_1 dello spostamento di un punto qualsivoglia sull'asse delle x alla fine del tempo t sarà data da (1)

$$4\pi u_1 = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle t\int_\Sigma \varphi_1(\omega t)\, d\Sigma + \int_0^t \int_\Sigma (3\alpha^2-1)\Big[\varphi_1(\Omega t)-\varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma\, dt \\ \displaystyle + t\int_\Sigma \alpha^2\Big[\varphi_1(\Omega t)-\varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_0^t \iint_\Sigma \int_{\mathrm{R}=\omega t}^{\mathrm{R}=\Omega t} \frac{3\alpha^2-1}{\mathrm{R}} \varphi_1(\mathrm{R})\, d\mathrm{R}\, d\Sigma\, dt \\ \displaystyle + \int_\Sigma \frac{d\,.\,tf_1(\omega t)}{dt} d\Sigma + \int_\Sigma (3\alpha^2-1)\Big[f_1(\Omega t)-f_1(\omega t)\Big] d\Sigma \\ \displaystyle + \int_\Sigma \alpha^2 \frac{d}{dt} t\Big[f_1(\Omega t)-f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \iint_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{3\alpha^2-1}{\mathrm{R}} f_1(\mathrm{R})\, d\mathrm{R}\, d\Sigma. \end{array} \right\} \quad (33)$$

(1) Cfr. Poisson, *Sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques.* Mémoires de l'Académie royale des sciences etc., t. X, pag. 592.

Lo stesso procedimento, che ci ha dato u'_1, u_1, ne condurrebbe ai valori seguenti per v_1, v'_1 ; w_1, w'_1.

$$4\pi v'_1 = \left\{ \begin{array}{l} 3\int_\Sigma \alpha\beta \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_\Sigma \alpha\beta \frac{d}{dt} t \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{\alpha\beta}{R} \varphi_1(R) dR\, d\Sigma \\ + \frac{d}{dt}\left(3\int_\Sigma \alpha\beta \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_\Sigma \alpha\beta \frac{d}{dt} t \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_\Sigma \int_{\omega t}^{t} \frac{\alpha\beta}{R} f_1(R) dR d\Sigma \right) \end{array} \right\},$$

$$4\pi v_1 = \left\{ \begin{array}{l} 3\int_0^t \int_\Sigma \alpha\beta \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma dt + t\int_\Sigma \alpha\beta \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_0^t \int_\Sigma \int_{R=\omega t}^{R=\Omega t} \frac{\alpha\beta}{R} \varphi_1(R)\, dR\, d\Sigma \\ + 3\int_\Sigma \alpha\beta \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_\Sigma \alpha\beta \frac{d}{dt} t \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{\alpha\gamma}{R} \varphi_1(R) dR d\Sigma \end{array} \right\},$$

$$4\pi w'_1 = \left\{ \begin{array}{l} 3\int_\Sigma \alpha\gamma \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_\Sigma \alpha\gamma \frac{d}{dt} t \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{\alpha\gamma}{R} \varphi_1(R)\, dR\, d\Sigma \\ + \frac{d}{dt}\left(3\int_\Sigma \alpha\gamma \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_\Sigma \alpha\gamma \frac{d}{dt} t \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{\alpha\gamma}{R} f_1(R) dR d\Sigma \right) \end{array} \right\},$$

$$4\pi w_1 = \left\{ \begin{array}{l} 3\int_0^t \int_\Sigma \alpha\gamma \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma dt + t\int_\Sigma \alpha\gamma \Big[\varphi_1(\Omega t) - \varphi_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_0^t \int_\Sigma \int_{R=\omega t}^{R=\Omega t} \frac{\alpha\gamma}{R} \varphi_1(R) dR d\Sigma dt \\ + 3\int_\Sigma \alpha\gamma \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + \int_\Sigma \alpha\gamma \frac{d}{dt} t \Big[f_1(\Omega t) - f_1(\omega t)\Big] d\Sigma + 3\int_\Sigma \int_{\omega t}^{\Omega t} \frac{\alpha\gamma}{R} f_1(R)\, dR\, d\Sigma \end{array} \right\}.$$

E in modo analogo si dedurranno le componenti della velocità e dello spostamento di un punto qualunque che corrispondono agli altri due gruppi di funzioni φ_2, f_2 ; φ_3, f_3 ; avute queste componenti, sarà poi facile comporre le espressioni generali per le velocità e pegli spostamenti di un punto qualsivoglia del corpo.

9. *Osservazione sui risultati precedenti.* — Le formule, che abbiamo dato ne' §§ 2, 3, 4 pel calcolo della dilatazione, delle componenti della rotazione e degli spostamenti, cadono in difetto per valori di t' tali, che sia nel primo caso $\Omega t'$, e negli altri due $\omega t'$, minore della distanza da O dell'elemento della superficie che gli è più lontano. Si troveranno per altro le formule da applicarsi in questi casi nel modo seguente. Si voglia per esempio determinare la dilatazione; ebbene descrivasi centro in O una sfera di raggio $\Omega t'$ e poi si prenda F come venne detto nel § 5. Allora le espressioni (10), (14) per la dilatazione non restano mutate se non in questo che nel secondo membro: 1° gli integrali di spazio e di superficie non debbono più abbracciare le parti staccatevi dalla sfera $\Omega t'$: 2° debbono figurare due termini identici ai due primi dell'espressione di Θ pel caso del corpo indefinito, ma coi limiti delle integrazioni rispetto a θ e a ψ regolati così da comprendere sulla sfera di raggio uno solamente l'immagine della porzione di superficie del corpo staccatavi dalla sfera $\Omega t'$.

In modo analogo si modificheranno le espressioni per le componenti della rotazione e per gli spostamenti.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio negli anni 1878 e 1879.

Memoria del Socio L. RESPIGHI

letta nella seduta del 2 maggio 1880.

L'esperimento fatto in questo Osservatorio negli anni 1876 e 1877, del metodo di proiezione nell' osservazione della durata del passaggio al meridiano del disco solare, avendo dimostrato che questo modo di osservare può ritenersi almeno egualmente buono e sicuro del metodo ordinario dell'osservazione diretta, esso venne adottato anche per le osservazioni degli anni seguenti 1878, 1879 e del corrente anno 1880, in vista del vantaggio da esso procurato della osservazione simultaneamente fatta da più osservatori, per cui è resa probabile nel medio dei risultati la compensazione approssimativa degli errori personali nel valore dedotto per la grandezza del diametro solare, mentre poi ci procura il mezzo più opportuno per la determinazione degli errori personali dei varî osservatori.

Allo scopo di ottenere da questo metodo d'osservazione il maggiore vantaggio si è procurato di utilizzare possibilmente tutti i giorni favorevoli, e di far concorrere all'osservazione tutti gli osservatori, quando le condizioni dell'Osservatorio e del personale lo permettevano, in modo da ottenere in ogni anno un conveniente numero di simili osservazioni. Il modo di osservare è quello stesso degli anni precedenti, e cioè quello di prendere gli appulsi dei bordi solari a sette fili nell'immagine proiettata sopra uno specchio o quadro imbiancato, disposto normalmente all' asse del cannocchiale ed a tale distanza, che il diametro del disco solare riesca di circa $0^m,70$. I tempi dei contatti del bordo coi fili sono presi a stima, ad occhio e udito, con un cronometro Dent siderale collocato alla portata di tutti gli osservatori avanti al quadro di proiezione.

Nel 1878 furono osservati in questo modo 230 passaggi del disco solare, e si ebbero 137 osservazioni con tutti e tre gli osservatori, Giacomelli, Di Legge e Respighi, 80 con due soli di questi, ma alternativamente associati, e 13 osservazioni con un solo osservatore. Nel 1879 ai tre osservatori sunnominati si aggiunse il nuovo assistente D. Prosperi. anch'esso molto esercitato in questo genere di osservazioni; e si osservarono 218 passaggi meridiani del disco solare, in 122 dei quali presero parte tutti e quattro gli osservatori, in 71 tre osservatori, in 24 due, mentre soltanto un passaggio fu osservato da un solo osservatore.

Nella presente Memoria sono riferiti e discussi i risultati ottenuti da questi due anni di osservazione.

Osservazioni del diametro orizzontale del sole fatte nel 1878.

Come si è già accennato, il numero totale dei passaggi meridiani del disco solare osservati nel 1878 è 230; e in questo numero sono compresi anche i passaggi osservati in condizioni atmosferiche anormali, e cioè con cielo nuvoloso o nebbioso, o coi bordi dell'immagine anche molto oscillanti o diffusi, mentre si sono trascurate le osservazioni incomplete nelle quali i contatti non furono presi a tutti i sette fili.

Si è creduto conveniente di tener conto anche delle osservazioni fatte in condizioni anormali, per rendere più manifesta l'influenza delle varie condizioni atmosferiche sulla durata del passaggio meridiano del diametro orizzontale del sole, sulla quale si è basato il calcolo della grandezza apparente del diametro stesso.

Le osservazioni della durata del passaggio del disco solare furono fatte simultaneamente dai tre osservatori, Respighi, Giacomelli e Di Legge in 137 passaggi, in 13 furono fatte da un solo osservatore, e in 80 da due osservatori; cosicchè il numero totale delle osservazioni fatte dai tre osservatori fu 584, ripartite fra i medesimi nel seguente modo:

Respighi	194	osservazioni
Giacomelli	199	»
Di Legge	191	»
Totale	584	

I singoli risultati ottenuti da queste 584 osservazioni sono riportati nello Specchio I posto in fine alla presente Memoria, nel quale è indicata la data delle osservazioni; la durata del passaggio del diametro solare in tempo siderale; la differenza di questa colla durata corrispondente data dal Nautical Almanac di Londra; il valore dedotto pel semidiametro apparente del sole, e finalmente il nome degli osservatori, designati colle iniziali:

R = Respighi,
G = Giacomelli,
D = Di Legge.

Le riduzioni delle osservazioni sono state fatte dal dott. Di Legge, il quale ha pure eseguito il calcolo diretto dei valori del semidiametro apparente del sole, basato sulla durata del passaggio del diametro, come pure il calcolo dei dati che servono al seguente esame dei risultati ottenuti dalle osservazioni.

Cominciando dal confronto delle 584 durate da noi osservate colle rispettive durate del passaggio del diametro solare date dal Nautical Almanac di Londra, calcolate sul supposto valore del semidiametro apparente di 961″,82, si trova la seguente differenza media in tempo siderale:

Durata osservata — Durata calcolata = — 0^s,083

cogli estremi { in più, Durata osservata — calcolata = + 0, 240
in meno » » » = — 0, 380

Prendendo invece le differenze medie separatamente per ogni osservatore, si ottengono i seguenti risultati:

Respighi = Durata osservata — calcolata = — 0,^{s}125
Giacomelli = Durata osservata — calcolata = — 0, 070
Di Legge = Durata osservata — calcolata = — 0, 055

La differenza media — 0^s,083 fra la durata da noi osservata e quella data dal Nautical Almanac si accorda benissimo con quella dedotta dalle osservazioni di Greenwich, le quali mostrano appunto le durate del passaggio del diametro solare date dal Nautical Almanac troppo grandi di circa 0^s,080; il che proverebbe che il semidiametro apparente usato dallo stesso Nautical Almanac dovrebbe diminuirsi di 0″,62 circa.

Dalle medie differenze ottenute per ciascun osservatore si rileva poi manifestamente, che nell'osservazione della durata del passaggio del diametro solare esistono fra i tre osservatori errori personali abbastanza sensibili, i cui valori risulterebbero:

Errori personali relativi.

Respighi — Giacomelli = — 0^s,055
Respighi — Di Legge = — 0, 070
Giacomelli — Di Legge = — 0, 015

Da ciò si rende manifesto che pel confronto dei valori ottenuti pel diametro apparente del sole da varî osservatori, anche da lunghe e numerose serie d'osservazioni, sarebbe necessaria la conoscenza degli errori personali, senza la quale si potrebbero ritenere come reali delle differenze puramente apparenti, e dedurne quindi conseguenze erronee, come molto probabilmente è accaduto a quegli astronomi che hanno sostenuto e sostengono le variazioni della grandezza del diametro del sole.

È poi da notare che gli errori personali in questa osservazione o misura, quali risultano dalle nostre osservazioni, fatte collo stesso strumento e nelle stesse condizioni atmosferiche, sono certamente più piccoli di quelli che possono verificarsi in serie d'osservazioni fatte da varî osservatori, con istrumenti diversi e in differenti condizioni atmosferiche.

Gli errori personali relativi ora ritrovati debbono però considerarsi soltanto come quantità approssimative, perchè dedotte da un numero limitato di osservazioni, parte delle quali furono fatte non simultaneamente dai tre osservatori e quindi in condizioni atmosferiche differenti: ma noi possiamo provare la loro conveniente approssimazione, confrontandoli con quelli ricavati dalle sole osservazioni fatte simultaneamente dai tre osservatori, le quali, come già si è accennato, raggiungono il non piccol numero di 137 osservazioni, dalle quali si hanno i seguenti errori personali relativi:

Respighi — Giacomelli = — 0^s,053
Respighi — Di Legge = — 0, 065
Giacomelli — Di Legge = — 0, 012

valori poco differenti dai precedenti.

Quantunque gli errori personali ricavati dalle osservazioni del 1878 presentino un soddisfacente accordo con quelli ottenuti dalle osservazioni degli anni 1876

e 1877, pure non può garantirsi la costanza di questi errori in una serie di anni, non essendo improbabile che in una osservazione così complessa ed incerta, quale è quella della durata del passaggio meridiano del disco solare, gli errori personali possano da un'epoca all'altra presentare una qualche alterazione ed incostanza, come si è verificato in varî casi anche per osservazioni molto più semplici, quali sono quelle dei tempi dei passaggi meridiani delle stelle. E ciò è tanto più probabile in quanto che la grandezza degli errori personali nell'osservazione della durata del passaggio del sole dipende in grande parte dalle condizioni atmosferiche dominanti nell'epoca delle osservazioni, come risulta dalla diversità dei valori ottenuti nelle varie stagioni; poichè prendendo gli errori personali fra i tre osservatori separatamente per le quattro stagioni si ha:

	R—G	R—D	G—D
Inverno	— 0^s,038	— 0^s,082	— 0^s,044
Primavera	— 0, 087	— 0, 088	— 0, 001
Estate	— 0, 034	— 0, 042	— 0, 002
Autunno	— 0, 071	— 0, 069	+ 0, 002

Di guisa che anche da un anno all'altro potranno presentarsi in queste quantità differenze più o meno sensibili, secondo il predominio più o meno marcato delle varie condizioni atmosferiche.

Venendo ora ai risultati ottenuti in riguardo alla grandezza del semidiametro del sole, dedotta dalla durata dei passaggi del disco solare, se noi prendiamo il medio generale delle 584 osservazioni fatte complessivamente dai tre osservatori, si ottiene il valore del semidiametro stesso ridotto alla distanza media del sole alla terra:

$$\Delta = 961'',23$$

mentre i valori dati dalle singole osservazioni oscillano fra gli estremi

$$\Delta \text{ massimo} = 963'',63$$
$$\Delta \text{ minimo} = 959,\ 20$$

Prendendo invece i valori ricavati separatamente dai tre osservatori, abbiamo

	Δ medio	massimo	minimo	n° osservazioni
Respighi	960″,92	962″,56	959″,20	194
Giacomelli	961, 33	963, 08	959, 84	199
Di Legge	961, 44	963, 63	959, 24	191

dai quali si hanno le differenze od errori personali relativi

$$\text{Respighi} - \text{Giacomelli} = -0'',41$$
$$\text{Respighi} - \text{Di Legge} = -0,\ 52$$
$$\text{Giacomelli} - \text{Di Legge} = -0,\ 11$$

Il numero degli osservatori è troppo piccolo e i loro errori personali relativi troppo sensibili, per poter ritenere nel medio generale compensati questi errori; e perciò dobbiamo considerare il valore medio trovato pel semidiametro soltanto come un valore probabilmente molto più approssimativo di quello dato dai medî parziali ottenuti da ciascun osservatore.

Per verificare se nel corso dell'anno la diversità delle condizioni atmosferiche influisce sensibilmente sulla grandezza apparente del semidiametro solare, si sono presi i valori medî del semidiametro stesso per ciascuna stagione, ossia per i quattro

trimestri e separatamente per ciascun osservatore, e si sono ottenuti i seguenti risultati:

Semidiametro solare medio.

Stagioni	Respighi	N.° osserv.	Giacomelli	N.° Osserv.	Di Legge	N.° Osserv.	Medio	N.° Osserv.
Inverno. . .	961″,01	52	961″,31	56	961″,67	45	961″,33	153
Primavera .	960,66	54	961,30	61	961,30	64	961,09	179
Estate . . .	961,23	53	961,56	43	961,55	61	961,45	157
Autunno . .	960,78	35	961,27	39	961,15	21	961,07	95

Da questo specchio risulta, che il semidiametro solare riescì sensibilmente più grande nell'inverno e nell'estate che non nella primavera e nell'autunno; e ciò sembrerebbe provare che nella primavera e nell' autunno le condizioni atmosferiche tendono a diminuire la grandezza del diametro apparente del Sole, nell'inverno invece e nella state ad aumentarlo. È sicuramente probabile che secondo le condizioni atmosferiche predominanti nelle varie parti dell'anno, e cioè la diversità della trasparenza dell'atmosfera, lo stato nuvoloso o nebbioso del cielo, la diversa velocità o direzione del vento ecc. ecc., possano sensibilmente influire nella durata del passaggio meridiano del sole, alterando l'irradiazione, o rendendo diffusi ed oscillanti i bordi; in modo da produrre una specie di variazione periodica nella grandezza apparente del diametro del sole; ma i limiti e il periodo di quelle variazioni non potrebbero ricavarsi che dai risultati di un sufficiente numero di anni di osservazione; e noi non mancheremo di fare su ciò apposite ricerche prendendo a base il materiale di osservazione già raccolto, che si estende già a parecchî anni.

Dalle osservazioni fatte nel 1878 si trova che i medî valori ottenuti pel semidiametro solare da ciascun osservatore oscillano nella quattro stagioni fra i seguenti estremi:

Stagioni	Semidiametro massimo			Semidiametro minimo		
	Respighi	Giacomelli	Di Legge	Respighi	Gacomelli	Di Legge
Inverno....	962″,5	963″,1	963″,6	959″,4	959″,8	959″,2
Primavera	961,7	962,9	962,7	959,8	960,2	960,2
Estate.....	962,6	962,9	962,6	959,9	960,2	960,1
Autunno...	961,9	962,4	962,0	959,2	959,9	960,1
Anno	962,6	963,1	963,6	959,2	959,8	959,2

Da questi dati si rileva che nelle varie stagioni l'escursione del valore del semidiametro non presenta grande differenza da un osservatore all'altro, e che il medio degli estremi annui poco si allontana per ogni osservatore dal medio generale ricavato dalle sue osservazioni.

Gli errori personali relativi, superiormente ritrovati, sono stati dedotti dal complesso delle osservazioni fatte da ciascun osservatore, molte delle quali si riferiscono a passaggi diversi, e quindi a condizioni atmosferiche differenti; cosicchè si può dubitare che tali differenze od errori siano influenzati da queste circostanze. Ma se noi prendiamo le sole osservazioni simultanee, quelle cioè fatte dai tre osservatori, le quali si estendono a 137 passaggi, si ottengono i seguenti risultati, che si possono considerare come i veri errori personali relativi, perchè ricavati da osservazioni fatte nelle identiche circostanze:

Errori personali

Respighi — Giacomelli = — 0″,38
Respighi — Di Legge = — 0, 48
Giacomelli — Di Legge = — 0, 09

i quali si accordano convenientemente nel senso e nella grandezza coi valori ricavati da tutte le osservazioni: e questo accordo deve attribuirsi al numero notevole delle osservazioni ed alla loro quasi regolare distribuzione nel corso dell'anno.

Confrontando il valore medio del semidiametro ottenuto da ciascun osservatore con quello ottenuto dalle singole osservazioni, colle differenze così ricavate sono state determinate per ogni osservatore le differenze od errori probabili di una osservazione e l'errore probabile del medio, i quali sono:

Errori o differenze probabili

	di una osservazione	del medio	n° osservazioni
Respighi	± 0,″460	± 0,″033	194
Giacomelli	0, 419	0, 030	198
Di Legge.	0, 477	0, 034	191

Queste differenze od errori probabili non possono ritenersi come la misura di precisione dei varî osservatori nella osservazione del semidiametro solare, ma bensì come gli allontanamenti probabili dei risultati delle singole osservazioni o passaggi col medio risultato ottenuto da ciascun osservatore dal complesso delle sue osservazioni; mentre questi allontanamenti dipendono principalmente dalle condizioni atmosferiche o dallo stato del bordo solare durante ciascun passaggio, in forza di che viene apparentemente e diversamente alterata da un giorno all'altro la grandezza della immagine del sole. Queste alterazioni sono comuni per tutti gli osservatori, ma la loro influenza nella misura della durata del passaggio dell'immagine solare può riescire diversa pei vari osservatori, pel diverso modo di stimare gli istanti dei contatti del bordo del sole coi fili del reticolo; ed è appunto da questa diversità di giudicare, o stimare gli istanti dei contatti dei due bordi, che dipendono principalmente le differenze dei risultati, o gli errori personali degli osservatori.

Osservazioni del diametro orizzontale del sole fatte nel 1879.

Nel 1879 le osservazioni della durata del passaggio meridiano del diametro del sole furono fatte da quattro osservatori, avendovi preso parte il nuovo assistente dott. Prosperi, anch'esso bene esercitato in questo genere di osservazioni.

Il numero totale dei passaggi meridiani del sole osservati nel 1879 è 218, dai quali, per le osservazioni simultanee dei varî osservatori, si sono ottenute 750 osservazioni o misure della durata del passaggio del diametro solare, ripartite fra i quattro osservatori nel seguente modo:

	N° delle osservazioni
Respighi	166
Giacomelli	191
Prosperi	192
Di Legge	201
Totale . .	750

Queste 750 osservazioni nei 218 passaggi osservati sono ripartite riguardo al numero degli osservatori nel seguente modo:

Passaggi n° 122 con quattro osservatori
» 71 con tre osservatori
» 24 con due osservatori
» 1 con un solo osservatore.

Nello Specchio II sono riportati i risultati di queste osservazioni, e cioè la durata in tempo siderale del passaggio del diametro ottenuta in ogni osservazione; la differenza di questa durata con quella data dal Nautical Almanac di Londra; il valore del semidiametro del sole dedotto dalle durate osservate e ridotto alla distanza media dalla terra al sole; finalmente per ogni osservazione sono dati i nomi degli osservatori, designati colle iniziali:

R . . . . . Respighi
G . . . . . Giacomelli
P . . . . . Prosperi
D . . . . . Di Legge

Le riduzioni di queste osservazioni e il calcolo dei valori del semidiametro solare sono state eseguite come negli scorsi anni dal dott. Di Legge.

Prendendo, senza avere riguardo agli osservatori, la media delle 750 differenze fra le durate del passaggio del disco solare da noi osservate e le corrispondenti del *Nautical Almanac*, calcolate sul supposto valore del semidiametro apparente del sole alla distanza media 961″,82, si trova:

Differenza media

Durata osservata — Durata calcolata = — 0ˢ,107

cogli estremi { in più Durata osservata — Durata calcolata = + 0 ,20
in meno Durata osservata — Durata calcolata = — 0 ,40

Prendendo invece la durata media separatamente da ciascun osservatore, si trova:

Differenza media

		n° osservazioni
Respighi	= Durata osservata — calcolata = — 0ˢ,156	166
Giacomelli	= Durata osservata — calcolata = — 0, 082	191
Prosperi	= Durata osservata — calcolata = — 0, 113	192
Di Legge	= Durata osservata — calcolata = — 0, 085	201

Da questi risultati è confermato, come dalle osservazioni degli anni precedenti che la durata data dal Nautical Almanac è maggiore della osservata, e che la differenza media è di circa $0^s,11$. Mentre poi tutti gli osservatori si accordano nel confermare il senso ed il segno di questa differenza, la grandezza di questa varia però sensibilmente da un osservatore all'altro; confermandosi quindi l'esistenza degli errori personali anche in questa osservazione, quantunque essa apparentemente si riduca ad una semplice osservazione differenziale: dico apparentemente, perchè in realtà le osservazioni dei contatti dei due bordi, orientale ed occidentale si riferiscono a due fenomeni diversi.

Ammettendo che le differenze medie trovate pei quattro osservatori dipendano dai loro errori personali, si avrebbero i seguenti errori personali relativi:

Respighi	— Giacomelli	=	$-0^s,074$
Respighi	— Prosperi	=	— 0, 043
Respighi	— Di Legge	=	— 0, 071
Giacomelli	— Prosperi	=	+ 0, 031
Giacomelli	— Di Legge	=	+ 0, 003
Prosperi	— Di Legge	=	— 0, 028

Quantunque una gran parte delle osservazioni, dalle quali risultano questi errori personali relativi, siano state fatte simultaneamente da quattro, od almeno da tre osservatori, pure una parte di queste differenze potrebbe attribuirsi alla diversità delle condizioni atmosferiche nelle quali non furono fatte le osservazioni da tutti e quattro gli osservatori. Perciò a formarsi un più giusto concetto della grandezza di questi errori personali è certamente più ragionevole di dedurli dalle sole osservazioni realmente paragonabili, quali sono le 122 fatte simultaneamente da tutti e quattro gli osservatori: e calcolando tali errori su queste osservazioni si ottengono i seguenti errori personali relativi:

Respighi	— Giacomelli	=	$-0^s,073$
Respighi	— Prosperi	=	— 0, 038
Respighi	— Di Legge	=	— 0, 058
Giacomelli	— Prosperi	=	+ 0, 035
Giacomelli	— Di Legge	=	+ 0, 015
Prosperi	— Giacomelli	=	— 0, 020

Qnesti valori si accordano coi precedenti non solamente nel segno, ma abbastanza approssimativamente anche nella grandezza. Confrontando gli errori personali relativi fra i tre osservatori Respighi, Giacomelli e Di Legge, con quelli degli anni precedenti, si trovano differenze non molto grandi, ma sensibili: e ciò potrebbe spiegarsi colla influenza della maggiore anormalità delle condizioni atmosferiche verificatasi nell'anno 1879, e specialmente per l'eccezionale predominio della nuvolosità del cielo, al quale è probabilmente da attribuirsi anche la minore grandezza della durata media del passaggio del disco solare, e quindi anche il minore valore trovato pel semidiametro.

Calcolando i valori degli errori personali fra i quattro osservatori separatamente nelle quattro stagioni, prendendo a base soltanto i 122 passaggi osservati simultaneamente da tutti e quattro, si hanno i seguenti risultati:

Errori personali relativi

	R—G	R—P	R—D	G—P	G—D	N° osservazioni P—D
Inverno	— 0^s,082	— 0^s,043	— 0^s,052	+ 0^s,039	+ 0^s,030	— 0^s,099
Primavera	— 0 ,043	— 0 ,018	— 0 ,039	+ 0 ,025	+ 0 ,004	— 0 ,021
Estate	— 0 ,068	— 0 ,022	— 0 ,060	+ 0 ,046	+ 0 ,008	— 0 ,038
Autunno	— 0 ,100	— 0 ,070	— 0 ,078	+ 0 ,030	+ 0 ,022	— 0 ,008

Da questi risultati si rileva che quantunque da una stagione all'altra gli errori personali relativi varîno sensibilmente, pure il loro senso o segno si mantiene costante; e ciò mostrerebbe che ogni osservatore, indipendentemente dalle condizioni atmosferiche ha l'abitudine di ravvicinare od allontanare gli istanti dei contatti dei due bordi solari coi fili del reticolo, mentre la diversità delle condizioni atmosferiche od i diversi stati del bordo solare possono più o meno influire sulla quantità di questo allontanamento o ravvicinamento.

Prendendo il medio dei valori ottenuti pel semidiametro apparente del sole ridotto alla distanza media di questo dalla terra, riportati dallo Specchio II, non avendo riguardo agli osservatori, si ricava:

$$\Delta = 961'',08$$

quantità inferiore di circa 0″,15 a quella ottenuta nello scorso anno; e ciò, senza ricorrere ad improbabili supposizioni sulle reali variazioni del diametro solare, può spiegarsi in parte come effetto dell'errore personale del nuovo osservatore Prosperi, e in parte come effetto delle condizioni atmosferiche molto anormali nel corso dell'anno 1879.

I valori estremi ottenuti pel semidiametro Δ nel corso di quest'anno sono:

$$\Delta \text{ massimo} = 963'',24$$
$$\Delta \text{ minimo} = 958,\ 91$$

i quali di poco si allontanano dagli estremi ottenuti nello scorso anno.

Prendendo poi separatamente i valori medî ottenuti pel semidiametro da ciascun osservatore ed i rispettivi estremi, si trova:

	Δ medio	massimo	minimo	n° osservazioni
Respighi	960″,74	962″,00	958″,91	166
Giacomelli	961, 25	962, 99	959, 07	191
Prosperi	961, 06	962, 56	959, 24	192
Di Legge	961, 20	963, 24	959, 46	201

Confrontando fra loro i valori medî ottenuti per Δ dai quattro osservatori, si hanno le seguenti differenze od errori personali relativi:

Respighi — Giacomelli = — 0″,51	Giacomelli — Prosperi = + 0,″19
Respighi — Prosperi = — 0, 32	Giacomelli — Di Legge = + 0, 05
Respighi — Di Legge = — 0, 46	Prosperi — Di Legge = — 0, 14

Prendendo invece queste differenze od errori personali dai risultati delle 122 osservazioni fatte simultaneamente dai quattro osservatori, si ha:

Respighi — Giacomelli = — 0″,53 Giacomelli — Prosperi = + 0,″25
Respighi — Prosperi = — 0, 27 Giacomelli + Di Legge = + 0, 11
Respighi — Di Legge = — 0, 42 Prosperi — Di Legge = — 0, 14

Come si è già avvertito parlando delle differenze medie fra le durate osservate del passaggio del disco solare e le durate date dal Nautical Almanac, queste differenze variano sensibilmente da osservatore ad osservatore nelle varie stagioni dell'anno, ed è quindi naturale che debbano riescire egualmente sensibili le differenze nella grandezza del semidiametro medio da esse dedotta.

Prendendo i medî dei valori del semidiametro solare per ciascun osservatore e per ogni stagione, si ha:

Semidiametro solare medio

Stagioni	Respighi	N.° Osserv.	Giacomelli	N.° Osserv.	Prosperi	N.° Osserv.	Di Legge	N.° Osserv.
Inverno. . .	960″,78	40	961″,36	40	961″,19	43	961″,18	45
Primavera .	960,75	38	961,13	53	960,97	55	961,19	53
Estate . . .	960,79	45	961,26	67	961,06	48	961,29	66
Autunno . .	960,60	43	961,26	31	961,08	46	961,10	38

Dipendentemente poi dalle condizioni atmosferiche variano sensibilmente anche i valori estremi del semidiametro ottenuti dai varî osservatori nelle quattro stagioni, come può rilevarsi dal seguente specchio:

Valori massimi e minimi del semidiametro solare

Stagioni	Semidiametro massimo				Semidiametro minimo			
	Respighi	Giacomelli	Prosperi	Di Legge	Respighi	Giacomelli	Prosperi	Di Legge
Inverno...	961″,93	962″,70	962″,15	962″,20	958″,91	960″,28	960″,13	959″,76
Primavera	961,82	962,99	962,26	963,24	958,92	959,07	959,24	959,46
Estate.....	961,82	962,71	962,20	962,63	959,11	959,38	959,70	960,09
Autunno,..	962,80	962,87	962,56	962,46	959,03	960,17	959,70	959,57

Confrontando il valore medio ottenuto per ogni osservatore coi valori dedotti dalle singole osservazioni, si è calcolata la differenza od allontanamento probabile di una osservazione dal medio rispettivo, e si sono ottenuti i seguenti valori:

	Differenza probabile di una osservazione	Differenza probabile del medio
Respighi	± 0,″431	± 0,″033
Giacomelli	0, 426	0, 031
Prosperi	0, 383	0, 028
Di Legge.	0, 439	0, 031

Queste differenze od errori probabili, come si è avvertito per le osservazioni del 1878, non si riferiscono al grado di precisione delle osservazioni dei singoli osservatori, ma piuttosto alla influenza delle condizioni atmosferiche, per le quali viene da un passaggio all'altro apparentemente ingrandito o diminuito il diametro del sole; e la verità di questa asserzione viene confermata dal fatto della quasi identità delle differenze od errori probabili dei quattro osservatori.

Le nostre osservazioni sul diametro orizzontale del sole sono già abbastanza numerose ed estese ad un periodo abbastanza lungo di tempo, per potere intraprendere sulle medesime delle speciali ricerche, sia in riguardo alla grandezza assoluta del diametro stesso, sia in riguardo alla influenza delle condizioni atmosferiche o delle stagioni sulla sua grandezza apparente: e queste ricerche verranno intraprese non appena saranno ultimate le osservazioni del corrente anno 1880.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Specchio I.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1878					
Genn. 2	$2^m21^s,72$	$2^m22^s,04$	$-0^s,32$	959″,6	R.
»	21,79	» »	— 0,25	960,1	G.
»	21,66	» »	— 0,38	959,2	D.
3	21,89	21,94	— 0,05	961,5	R.
»	21,85	» »	— 0,09	961,2	G.
»	21,92	» »	— 0,02	961,7	D.
5	21,63	21,70	— 0,07	961,3	R.
»	21,78	» »	+ 0,08	962,3	G.
6	21,43	21,58	— 0,15	960,8	R.
»	21,47	» »	— 0,11	961,1	G.
8	21,06	21,30	— 0,24	960,1	R.
»	21,19	» »	— 0,11	961,0	G.
»	21,07	» »	— 0,23	960,2	D.
9	21,12	21,16	— 0,04	961,5	R.
»	21,08	» »	— 0,08	961,2	G.
»	21,19	» »	+ 0,03	962,0	D.
13	20,41	20,50	— 0,09	961,1	R.
»	20,36	» »	— 0,14	960,8	G.
14	20,20	20,32	— 0,12	960,9	R.
»	20,28	» »	— 0,04	961,5	G.
»	20,42	» »	+ 0,10	962,4	D.
15	19,97	20,14	— 0,17	960,6	R.
»	19,99	» »	— 0,15	960,7	G.
»	20,02	» »	— 0,12	960,9	D.
16	19,78	19,96	— 0,18	960,6	R.
»	19,83	» »	— 0,13	960,9	G.
»	19,92	» »	— 0,04	961,6	D.
18	19,22	19,56	— 0,34	959,4	R.
»	19,28	» »	— 0,28	959,8	G.
»	19,43	» »	— 0,13	960,9	D.
19	19,29	19,36	— 0,07	961,3	R.
»	19,30	» »	— 0,06	961,4	G.
»	19,26	» »	— 0,10	961,1	D.
20	18,95	19,16	— 0,21	960,4	R.
»	19,11	» »	— 0,05	961,5	G.
»	18,99	» »	— 0,17	960,7	D.
21	19,04	18,94	+ 0,10	962,5	R.
»	18,99	» »	+ 0,05	962,2	G.
»	19,07	» »	+ 0,13	962,7	D.
22	18,50	18,74	— 0,24	960,1	G.
»	18,49	» »	— 0,25	960,0	D.
24	18,27	18,30	— 0,03	961,6	R.
»	18,33	» »	+ 0,03	962,1	G.
»	18,37	» »	+ 0,07	962,3	D.
28	17,06	17,40	— 0,34	959,4	R.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1878					
Genn. 28	$2^m17^s,25$	$2^m17^s,40$	$-0^s,15$	960″,7	G.
»	17,29	» »	— 0,11	961,0	D.
Febb. 1	16,39	16,48	— 0,09	961,2	R.
»	16,44	» »	— 0,04	961,6	G.
2	16,19	16,24	— 0,05	961,5	G.
»	16,25	» »	+ 0,01	961,9	D.
3	15,79	16,00	— 0,21	960,3	R.
»	16,00	» »	0,00	961,8	G.
4	15,60	15,78	— 0,18	960,6	R.
»	15,71	» »	— 0,07	961,3	G.
»	15,70	» »	— 0,08	961,3	D.
5	15,51	15,56	— 0,05	961,5	R.
»	15,51	» »	— 0,05	961,5	G.
»	15,58	» »	+ 0,02	962,0	D.
6	15,22	15,32	— 0,10	961,1	R.
»	15,40	» »	+ 0,08	962,4	G.
»	15,43	» »	+ 0,11	962,6	D.
7	15,09	15,10	— 0,01	961,8	R.
»	15,21	» »	+ 0,11	962,6	G.
»	15,24	» »	+ 0,14	962,9	D.
8	14,90	14,88	+ 0,02	962,0	R.
»	14,91	» »	+ 0,03	962,1	G.
»	14,94	» »	+ 0,06	962,4	D.
9	14,69	14,64	+ 0,05	962,2	R.
»	14,81	» »	+ 0,17	963,1	G.
»	14,85	» »	+ 0,21	963,4	D.
10	14,36	14,42	— 0,06	961,4	R.
»	14,27	» »	— 0,15	960,8	G.
»	14,42	» »	0,00	961,8	D.
13	13,54	13,78	— 0,24	960,1	R.
»	13,69	» »	— 0,09	961,2	G.
»	13,69	» »	— 0,09	961,2	D.
14	13,44	13,56	— 0,12	961,0	R.
»	13,54	» »	— 0,02	961,7	G.
»	13,56	» »	0,00	961,8	D.
15	13,12	13,36	— 0,24	960,1	R.
»	13,22	» »	— 0,14	960,9	G.
»	13,14	» »	— 0,22	960,3	D.
16	13,07	13,14	— 0,07	961,3	R.
»	13,09	» »	— 0,05	961,5	G.
»	13,07	» »	— 0,07	961,3	D.
17	12,61	12,94	— 0,33	959,5	R.
»	12,81	» »	— 0,13	960,9	G.
»	12,85	» »	— 0,09	961,2	D.
18	12,75	12,74	+ 0,01	961,9	R.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore	Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac					Osservata	Nautical Almanac			
1878						1878					
Febb. 18	$2^m12^s,79$	$2^m12^s,74$	$+0^s,05$	962″,2	G.	Marzo 13	$2^m\ 9^s,68$	$2^m\ 9^s,44$	$+0^s,24$	963″,6	D.
»	12,84	» »	+ 0,10	962,6	D.	15	9,34	9,28	+ 0,06	962,2	R.
19	12,52	12,54	— 0,02	961,7	R.	»	9,24	» »	— 0,04	961,5	G.
»	12,39	» »	— 0,15	960,7	G.	»	9,39	» »	+ 0,11	962,6	D.
»	12,64	» »	+ 0,10	962,5	D.	17	8,93	9,16	— 0,23	960,1	R.
20	12,43	12,36	+ 0,07	962,3	R.	»	9,04	» »	— 0,12	960,9	G.
»	12,32	» »	— 0,04	961,6	G.	»	8,95	» »	— 0,21	960,2	D.
»	12,42	» »	+ 0,06	962,3	D.	18	8,87	9,12	— 0,25	960,0	R.
21	11,85	12,16	— 0,31	959,5	R.	»	8,98	» »	— 0,14	960,8	G.
»	12,02	» »	— 0,14	960,8	G.	»	8,96	» »	— 0,16	960,7	D.
»	11,97	» »	— 0,19	960,4	D.	21	8,85	8,98	— 0,13	960,8	R.
22	11,88	11,98	— 0,10	961,1	R.	»	8,73	» »	— 0,25	959,9	G.
»	12,04	» »	+ 0,06	962,3	G.	»	8,83	» »	— 0,15	960,7	D.
»	11,89	» »	— 0,09	961,2	D.	27	8,70	8,90	— 0,20	960,3	R.
23	11,70	11,80	— 0,10	961,1	R.	»	8,73	» »	— 0,17	960,5	G.
»	11,77	» »	— 0,03	961,6	G.	30	8,79	8,94	— 0,15	960,7	R.
»	11,87	» »	+ 0,07	962,3	D.	»	8,78	» »	— 0,16	960,6	G.
24	11,54	11,62	— 0,08	961,3	R.	»	8,86	» »	— 0,08	961,2	D.
»	11,53	» »	— 0,09	961,2	G.	Aprile 1	8,89	8_s98	— 0,09	961,1	R.
»	11,67	» »	+ 0,05	962,2	D.	»	9,01	» »	+ 0,03	962,0	G.
26	11,17	11,28	— 0,11	961,0	R.	»	9,06	» »	+ 0,08	962,4	D.
»	11,20	» »	— 0,08	961,2	G.	2	8,85	9,02	— 0,17	960,5	R.
»	11,28	» »	0,00	961,8	D.	»	8,94	» »	— 0,08	961,2	G.
27	11,17	11,12	+ 0,05	962,2	R.	»	8,94	» »	— 0,08	961,2	D.
»	11,10	» »	— 0,02	961,7	G.	3	8,99	9,06	— 0,07	961,3	R.
»	11,27	» »	+ 0,15	962,9	D.	»	9,06	» »	0,00	961,8	G.
Marzo 1	10,64	10,82	— 0,18	960,5	R.	4	8,90	9,12	— 0,22	960,2	R.
»	10,63	» »	— 0,19	960,5	G.	»	8,94	» »	— 0,18	960,5	G.
4	10,44	10,40	+ 0,04	962,1	G.	»	9,00	» »	— 0,12	960,9	D.
5	10,25	10,26	— 0,01	961,7	G.	5	9,10	9,16	— 0,06	961,3	D.
6	10,00	10,14	— 0,14	960,8	R.	6	9,08	9,22	— 0,14	960,7	R.
»	10,01	» »	— 0,13	960,9	G.	»	9,19	» »	— 0,03	961,6	D.
8	9,80	9,90	— 0,10	961,1	R.	7	9,12	9,28	— 0,16	960,6	R.
»	9,71	» »	— 0,19	960,4	G.	»	9,24	» »	— 0,04	961,5	D.
9	9,71	9,80	— 0,09	961,2	R.	8	9,22	9,36	— 0,14	960,8	R.
»	9,71	» »	— 0,09	961,2	G.	»	9,29	» »	— 0,07	961,3	G.
»	9,85	» »	+ 0,05	962,2	D.	»	9,20	» »	— 0,16	960,7	D.
10	9,54	9,70	— 0,16	960,6	R.	10	9,30	9,50	— 0,20	960,3	R.
»	9,63	» »	— 0,07	961,3	G.	»	9,32	» »	— 0,18	960,4	G.
»	9,63	» »	— 0,07	961,3	D.	»	9,35	» »	— 0,15	960,6	D.
12	9,58	9,52	+ 0,06	962,3	R.	11	9,46	9,60	— 0,14	960,8	R.
»	9,51	» »	— 0,01	961,7	G.	»	9,58	» »	— 0,02	961,7	G.
»	9,64	» »	+ 0,12	962,7	D.	»	9,55	» »	— 0,05	961,4	D
13	9,50	9,44	+ 0,06	962,3	R.	12	9,63	9,68	— 0,05	961,4	R.
»	9,41	» »	— 0,03	961,6	G.	»	9,72	» »	+ 0,04	962,1	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Aprile 12	2^m 9^s,65	2^m 9^s,68	-0^s,03	961″,6	D.
13	9,56	9,78	— 0,22	960,2	G.
»	9,64	» »	— 0,14	960,8	D.
14	9,81	9,88	— 0,07	961,4	R.
»	10,02	» »	+ 0,14	962,9	G.
»	9,96	» »	+ 0,08	962,5	D.
15	9,81	9,98	— 0,17	960,6	R.
»	9,91	» »	— 0,07	961,3	G.
»	9,96	» »	— 0,02	961,7	D.
16	9,96	10,08	— 0,12	960,9	R.
»	9,98	» »	— 0,10	961,1	G.
»	9,98	» »	— 0,10	961,1	D.
18	10,19	10,32	— 0,13	960,9	R.
»	10,26	» »	— 0,06	961,4	G.
»	10,24	» »	— 0,08	961,6	D.
19	10,21	10,44	— 0,23	960,2	R.
»	10,25	» »	— 0,19	960,5	G.
»	10,29	» »	— 0,15	960,8	D.
23	10,67	10,94	— 0,27	959,8	R.
»	10,73	» »	— 0,21	960,2	G.
»	10,72	» »	— 0,22	960,1	D.
25	11,12	11,22	— 0,10	961,1	G
»	11,04	» »	— 0,18	960,5	D.
28	11,55	11,66	— 0,11	961,1	R.
»	11,71	» »	+ 0,05	962,2	G.
29	11,60	11,80	— 0,20	960,3	R.
»	11,64	» »	— 0,16	960,6	G.
»	11,74	» »	— 0,06	961,4	D.
Magg. 1	11,87	12,12	— 0,25	960,0	R.
»	12,01	» »	— 0,11	961,1	G.
»	12,01	» »	— 0,11	961,1	D.
3	12,19	12,42	— 0,23	960,1	R.
»	12,32	» »	— 0,10	961,1	G.
»	12,34	» »	— 0,08	961,2	D.
4	12,49	12,58	— 0,09	961,1	R.
»	12,66	» »	+ 0,08	962,4	G.
»	12,67	» »	+ 0,09	962,4	D.
5	12,54	12,76	— 0,22	960,2	R.
»	12,74	» »	— 0,02	961,7	G.
»	12,80	» »	+ 0,04	962,1	D.
8	13,05	13,24	— 0,19	960,5	R.
»	13,16	» »	— 0,08	961,3	D.
9	13,25	13,42	— 0,17	960,6	R.
»	13,24	» »	— 0,18	960,5	G.
»	13,30	» »	— 0,12	960,9	D.
1878					
Magg. 10	2^m 13^s,46	2^m 13^s,58	-0^s,12	960″,9	R.
»	13,50	» »	— 0,08	961,2	G.
»	13,57	» »	— 0,01	961,8	D.
12	13,66	13,90	— 0,24	960,1	R.
»	13,85	» »	— 0,05	961,4	G.
»	13,74	» »	— 0,16	960,7	D.
13	13,85	14,08	— 0,23	960,2	R.
»	14,01	» »	— 0,07	961,3	G.
»	14,03	» »	— 0,05	961,5	D.
14	14,14	14,24	— 0,10	961,1	G.
»	14,12	» »	— 0,12	961,0	D.
15	14,19	14,40	— 0,21	960,3	R.
»	14,36	» »	— 0,04	961,5	G.
»	14,30	» »	— 0,10	961,1	D.
16	14,38	14,56	— 0,18	960,5	R.
»	14,37	» »	— 0,19	960,4	G.
»	14,43	» »	— 0,13	960,9	D.
17	14,70	14,72	— 0,02	961,7	R.
»	14,83	» »	+ 0,11	962,6	G.
»	14,84	» »	+ 0,12	962,7	D.
18	14,80	14,88	— 0,08	961,3	G.
»	14,94	» »	+ 0,06	962,3	D.
19	14,98	15,04	— 0,06	961,4	G.
»	14,91	» »	— 0,13	960,9	D.
20	14,97	15,20	— 0,23	960,2	R.
»	15,06	» »	— 0,14	960,9	G.
»	15,10	» »	— 0,10	961,1	D.
22	15,32	15,50	— 0,18	960,6	R.
»	15,39	» »	— 0,11	961,1	G.
»	15,38	» »	— 0,12	961,0	D.
24	15,63	15,78	— 0,15	960,7	R.
»	15,66	» »	— 0,12	961,0	G.
»	15,81	» »	+ 0,03	962,0	D.
25	15,71	15,92	— 0,21	960,3	R.
»	15,78	» »	— 0,14	960,8	G.
»	15,77	» »	— 0,15	960,7	D.
26	15,91	16,06	— 0,15	960,7	R.
»	16,00	» »	— 0,06	961,4	G.
»	15,98	» »	— 0,08	961,3	D.
30	16,54	16,58	— 0,04	961,5	D.
31	16,48	16,70	— 0,22	960,3	R.
»	16,57	» »	— 0,13	960,9	G.
»	16,49	» »	— 0,21	960,4	D.
Giugno 1	16,76	16,82	— 0,06	961,4	R.
»	16,76	» »	— 0,06	961,4	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Giugno 1	$2^m16^s,85$	$2^m16^s,82$	$+0^s,03$	962″,0	D.
2	16,68	16,92	— 0,24	960,1	R
»	16,76	» »	— 0,16	960,7	G.
»	16,81	» »	— 0,11	961,1	D.
3	16,94	17,02	— 0,08	961,2	G.
»	16,90	» »	— 0,12	960,9	D.
4	17,08	17,12	— 0,04	961,5	R.
»	17,16	» »	+ 0,04	962,1	G.
»	17,24	» »	+ 0,12	962,6	D.
5	17,00	17,22	— 0,22	960,3	R.
»	17,03	» »	— 0,19	960,5	G.
»	17,10	» »	— 0,12	961,0	D.
6	17,08	17,32	— 0,24	960,2	R.
»	17,16	» »	— 0,16	960,8	G.
»	17,14	» »	— 0,18	960,6	D.
7	17,35	17,40	— 0,05	961,5	R.
»	17,30	» »	— 0,10	961,2	G.
»	17,29	» »	— 0,11	961,1	D.
8	17,29	17,48	— 0,19	960,5	R.
»	17,42	» »	— 0,06	961,4	G.
»	17,35	» »	— 0,13	961,0	D.
9	17,31	17,54	— 0,23	960,3	R.
»	17,51	» »	— 0,03	961,6	G.
»	17,45	» »	— 0,09	961,2	D.
10	17,47	17,62	— 0,15	960,8	R.
»	17,51	» »	— 0,11	961,1	G.
»	17,47	» »	— 0,15	960,8	D.
11	17,49	17,68	— 0,19	960,5	R.
»	17,55	» »	— 0,13	961,0	G.
»	17,59	» »	— 0,09	961,2	D.
12	17,72	17,74	— 0,02	961,7	R.
»	17,74	» »	0,00	961,8	G.
»	17,71	» »	— 0,03	961,6	D.
13	17,74	17,78	— 0,04	961,5	G.
»	17,65	» »	— 0,13	960,9	D.
17	17,67	17,90	— 0,23	960,2	R.
»	17,85	» »	— 0,05	961,5	G.
»	17,86	» »	— 0,04	961,5	D.
18	17,75	17,92	— 0,17	960,6	R.
»	17,82	» »	— 0,10	961,1	G.
»	17,78	» »	— 0,14	960,8	D.
19	17,79	17,94	— 0,15	960,8	R.
»	17,91	» »	— 0,03	961,6	G.
»	17,97	» »	+ 0,03	962,0	D.
20	17,70	17,94	— 0,24	960,2	R.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Giug. 20	$2^m17^s.86$	$2^m17^s,94$	$-0^s,08$	961″,3	G.
»	17,82	» »	— 0,12	961,0	D.
21	17,90	17,94	— 0,04	961,6	R.
»	17,94	» »	0,00	961,8	G.
»	17,94	» »	0,00	961,8	D.
23	17,79	17,90	— 0,11	961,1	G.
»	17,81	» »	— 0,09	961,2	D.
27	17,50	17,78	— 0,28	959,9	R.
»	17,59	» »	— 0,19	960,6	G.
»	17,59	» »	— 0,19	960,6	D.
28	17,66	17,72	— 0,06	961,4	G.
»	17,62	» »	— 0,10	961,2	D.
29	17,69	17,66	+ 0,03	962,0	G.
»	17,65	» »	— 0,01	961,7	D.
30	17,50	17,60	— 0,10	961,1	R.
»	17,63	» »	+ 0,03	962,0	G.
»	17,56	» »	— 0,04	961,6	D.
Luglio 1	17,49	17,54	— 0,05	961,5	R.
»	17,52	» »	— 0,02	961,7	G.
»	17,59	» »	+ 0,05	962,2	D.
2	17,40	17,46	— 0,06	961,4	G.
»	17,53	» »	+ 0,07	962,3	D.
5	17,14	17,22	— 0,08	961,3	G.
»	17,11	» »	— 0,11	961,1	D.
6	16,91	17,12	— 0,21	960,4	R.
»	16,94	» »	— 0,18	960,6	G.
»	17,00	» »	— 0,12	961,0	D.
7	16,94	17,02	— 0,08	961,3	R.
»	17,06	» »	+ 0,04	962,1	D.
8	16,76	16,90	— 0,14	960,8	R.
»	16,85	» »	— 0,05	961,4	G.
»	16,76	» »	— 0,14	960,8	D.
9	16,81	16,80	+ 0,01	961,9	R.
»	16,81	» »	+ 0,01	961,9	G.
»	16,84	» »	+ 0,04	962,1	D.
10	16,69	16,68	+ 0,01	961,9	R.
»	16,71	» »	+ 0,03	962,0	G.
»	16,71	» »	+ 0,03	962,0	D.
13	16,10	16,30	— 0,20	960,5	R.
»	16,31	» »	+ 0,01	961,9	G.
»	16,17	» »	— 0,13	960,9	D.
14	16,01	16,16	— 0,15	960,8	R.
»	16,19	» »	+ 0,03	962,0	G.
»	16,11	» »	— 0,05	961,5	D.
15	15,91	16,02	— 0,11	961,0	R.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Lugl. 15	$2^m15^s,96$	$2^m16^s,02$	$-0^s,06$	961″,4	G.
»	15,94	» »	— 0,08	961,2	D.
16	15,76	15,88	— 0,12	961,0	R
»	15,86	» »	— 0,02	961,7	G.
»	15,89	» »	+ 0,01	961,9	D.
17	15,81	15,74	+ 0,07	962,3	R.
»	15,85	» »	+ 0,11	962,6	G.
»	15,78	» »	+ 0,04	962,1	D.
18	15,62	15,58	+ 0,04	962,1	R.
»	15,57	» »	— 0,01	961,8	G.
»	15,68	» »	+ 0,10	962,5	D.
19	15,46	15,44	+ 0,02	961,9	R
»	15,44	» »	0,00	961,8	G.
»	15,41	» »	— 0,03	961,6	D.
20	15,16	15,28	— 0,12	961,0	R.
»	15,24	» »	— 0,04	961,5	G.
»	15,22	» »	— 0,06	961,4	D.
21	15,04	15,12	— 0,08	961,3	R.
»	15,03	» »	— 0,09	961,2	G.
»	15,19	» »	+ 0,07	962,3	D.
22	15,06	14,96	+ 0,10	962,6	R.
»	15,06	» »	+ 0,10	962,6	G.
»	15,02	» »	+ 0,06	962,2	D.
23	14,66	14,80	— 0,14	960,9	R.
»	14,70	» »	— 0,10	961,1	G.
»	14,64	» »	— 0,16	960,7	D.
24	14,46	14,62	— 0,16	960,7	R.
»	14,63	» »	+ 0,01	961,9	G.
25	14,50	14,46	+ 0,04	962,1	R.
»	14,39	» »	— 0,07	961,3	G.
»	14,53	» »	+ 0,07	962,3	D.
26	14,14	14,28	— 0,14	960,8	R.
»	14,22	» »	— 0,06	961,4	G.
»	14,19	» »	— 0,09	961,2	D.
27	14,07	14,12	— 0,05	961,5	R.
»	14,11	» »	— 0,01	961,7	G.
»	14,07	» »	— 0,05	961,5	D.
28	13,87	13,94	— 0,07	961,3	R.
»	13,89	» »	— 0,05	961,4	G.
»	13,84	» »	— 0,10	961,1	D.
29	13,71	13,78	— 0,07	961,3	R.
»	13,92	» »	+ 0,14	962,9	G.
»	13,83	» »	+ 0,05	962,2	D.
30	13,55	13,60	— 0,05	961,5	R.
»	13,45	» »	— 0,15	960,7	G.
1878					
Lugl. 30	$2^m13^s,58$	$2^m13^s,60$	$-0^s,02$	961″,2	D
Agost. 2	12,83	13,08	— 0,25	960,0	R
»	12,98	» »	— 0,10	961,1	D.
4	12,61	12,74	— 0,13	960,9	R
»	12,73	» »	— 0.01	961,7	D.
5	12,41	12,56	— 0,15	960,8	R.
»	12,56	» »	0,00	961,8	D.
6	12,42	12,40	+ 0,02	962,0	R.
»	12,43	» »	+ 0,03	962,0	D.
8	11,96	12,06	— 0,10	961,1	R.
»	11,97	» »	— 0,09	961,2	D.
9	11,67	11,88	— 0,21	960,3	R.
»	11,65	» »	— 0,23	960,1	D.
10	11,65	11,72	— 0,07	961,3	R.
»	11,49	» »	— 0,23	960,2	G.
»	11,74	» »	+ 0,02	962,0	D.
12	11,38	11,38	0,00	961,8	R.
»	11,35	» »	— 0,03	961,6	D.
13	11,11	11,22	— 0,11	961,0	D.
14	10,86	11,06	— 0,20	960,3	R.
»	11,03	» »	— 0,03	961,6	D.
15	10,74	10,92	— 0,18	960,6	R.
»	10,82	» »	— 0,10	961,1	D.
16	10,86	10,76	+ 0,10	962,6	G.
»	10,86	» »	+ 0,10	962,6	D.
17	10,42	10,60	— 0,18	960,5	G.
»	10,55	» »	— 0,05	961,5	D.
18	10,45	10,46	— 0,01	961,7	D
19	10,26	10,32	— 0,06	961,4	G.
»	10,31	» »	— 0,01	961,8	D.
20	10,07	10,18	— 0,11	961,0	G.
»	10,14	» »	— 0,04	961,6	D.
21	9,90	10,04	— 0,14	960,8	G.
»	9,93	» »	— 0,11	961,0	D.
22	9,86	9,90	— 0,04	961,5	D.
23	9,76	9,76	0,00	961,8	D.
25	9,49	9,52	— 0,03	961,6	D.
27	9,24	9,28	— 0,04	961,5	R.
»	9,26	» »	— 0,02	961,7	D.
28	9,11	9,18	— 0,07	961,3	R
»	9,16	» »	— 0,02	961,7	D.
29	8,94	9,08	— 0,14	960,8	R.
»	8,96	» »	— 0,12	961,0	D.
30	8,93	8,98	— 0,05	961,5	R.
»	8,79	» »	— 0,19	960,5	D.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Agos. 31	$2^m\ 8^s,64$	$2^m\ 8^s,88$	— 0,24	960″,1	R.
»	8,82	» »	— 0,06	961,4	D.
Settem. 1	8,72	8,78	— 0,06	961,3	G.
»	8,71	» »	— 0,07	961,3	D.
2	8,44	8,70	— 0,26	959,9	R.
»	8,55	» »	— 0,15	960,7	D.
4	8,38	8,56	— 0,18	960,6	D.
6	8,47	8,42	+ 0,05	962,2	R.
»	8,49	» »	+ 0,07	962,4	D.
7	8,44	8,36	+ 0,08	962,4	D.
9	8,26	8,26	0,00	961,8	R.
»	8,17	» »	— 0,09	961,1	D.
16	8,06	8,08	— 0,02	961,7	R.
»	8,10	» »	+ 0,02	962,0	G.
»	8,02	» »	— 0,06	961,4	D.
17	7,94	8,08	— 0,14	960,7	R.
»	7,97	» »	— 0,11	961,0	G.
»	7,98	» »	— 0,10	961,0	D.
18	8,02	8,08	— 0,06	961,4	R.
»	8,05	» »	— 0,03	961,6	G.
19	7,95	8,10	— 0,15	960,7	R.
»	8,04	» »	— 0,06	961,4	G.
»	8,12	» »	+ 0,02	962,0	D.
20	8,09	8,12	— 0,03	961,6	G.
»	8,01	» »	— 0,11	961,0	D.
23	8,13	8,20	— 0,07	961,3	R.
»	8,13	» »	— 0,07	961,3	G.
24	8,14	8,24	— 0,10	961,1	R.
»	8,18	» »	— 0,06	961,4	G.
25	8,22	8,30	— 0,08	961,2	R.
»	8,24	» »	— 0,06	961,4	G.
26	8,32	8,34	— 0,02	961,7	R.
»	8,34	» »	0,00	961,8	G.
27	8,36	8,40	— 0,04	961,5	R.
»	8,39	» »	— 0,01	961,7	G.
»	8,34	» »	— 0,06	961,4	D.
28	8,46	8,48	— 0,02	961,7	R.
»	8,54	» »	+ 0,06	962,3	G.
29	8,53	8,54	— 0,01	961,7	R.
Ottob. 1	8,60	8,70	— 0,10	961,1	R.
»	8,59	» »	— 0,11	961,0	G.
»	8,64	» »	— 0,06	961,4	D.
2	8,79	8,80	— 0,01	961,7	R.
»	8,75	» »	— 0,05	961,5	G.
3	8,71	8,88	— 0,17	960,6	R.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1877					
Ottob. 3	$2^m\ 8^s,91$	$2^m\ 8^s,88$	+ 0^s,03	962″,0	G.
4	8,81	9,00	— 0,19	960,4	R.
»	8,89	» »	— 0,11	961,0	G.
»	8,86	» »	— 0,14	960,8	D.
5	9,10	9,10	0,00	961,8	R.
»	9,17	» »	+ 0,07	962,3	G.
»	9,12	» »	+ 0,02	962,0	D.
6	9,23	9,22	+ 0,01	961,9	R.
»	9,15	» »	— 0,07	961,3	G.
»	9,20	» »	— 0,02	961,7	D.
7	9,14	9,34	— 0,20	960,3	R.
»	9,16	» »	— 0,18	960,5	G.
9	9,28	9,60	— 0,32	959,5	R.
»	9,34	» »	— 0,26	959,9	G.
10	9,69	9,72	— 0,03	961,6	R.
»	9,70	» »	— 0,02	961,6	G.
16	10,57	10,66	— 0,09	961,2	R.
»	10,54	» »	— 0,12	960,9	G.
17	10,72	10,82	— 0,10	961,1	R.
»	10,76	» »	— 0,06	961,4	G.
18	10,71	11,00	— 0,29	959,7	R.
»	10,76	» »	— 0,24	960,1	G.
19	11,00	11,18	— 0,18	960,5	R.
»	11,14	» »	— 0,04	961,5	G.
20	11,27	11,36	— 0,09	961,2	R.
»	11,33	» »	— 0,03	961,6	G.
23	11,74	11,96	— 0,22	960,2	R.
»	11,87	» »	— 0,09	961,2	G.
24	11,94	12,16	— 0,22	960,2	R.
»	12,02	» »	— 0,14	960,9	G.
26	12,41	12,56	— 0,15	960,7	G.
27	12,59	12,78	— 0,19	960,5	R.
»	12,52	» »	— 0,26	959,9	G.
30	13,38	13,44	— 0,06	961,4	R.
»	13,34	» »	— 0,10	961,1	G.
31	13,67	13,68	— 0,01	961,7	R.
»	13,63	» »	— 0,05	961,5	G.
Novem. 1	13,66	13,90	— 0,24	960,1	R.
»	13,89	» »	— 0,01	961,8	G.
4	14,49	14,60	— 0,11	961,0	R
»	14,51	» »	— 0,09	961,2	G.
6	15,10	15,08	+ 0,02	962,0	G.
»	15,02	» »	— 0,06	961,4	D.
9	15,56	15,78	— 0,22	960,2	R.
»	15,70	» »	— 0,08	961,3	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1878.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Novem.9	$2^m15^s,62$	$2^m15^s,78$	$-0^s,16$	960″,7	D.
10	16,11	16,02	+ 0,09	962,4	G.
»	16,04	» »	+ 0,02	962,0	D.
21	18,46	18,58	— 0,12	961,0	R.
»	18,44	» »	— 0,14	960,8	G.
»	18,33	» »	— 0,25	960,1	D.
29	20,08	20,24	— 0,16	960,7	R.
»	20,14	» »	— 0,10	961,1	G.
»	20,09	» »	— 0,15	960,8	D.
30	20,24	20,42	— 0,18	960,6	R.
»	20,39	» »	— 0,03	961,6	G.
»	20,43	» »	+ 0,01	961,9	D.
Decem.5	21,07	21,24	— 0,17	960,6	R.
»	21,11	» »	— 0,13	960,9	G.
»	21,00	» »	— 0,24	960,1	D.
6	21,26	21,40	— 0,14	960,9	R.
»	21,31	» »	— 0,09	961,2	G.
»	21,39	» »	— 0,01	961,7	D.
10	21,73	21,90	— 0,17	960,6	R.
»	21,80	» »	— 0,10	961,1	G.
»	21,66	» »	— 0,24	960,2	D.
11	21,90	22,00	— 0,10	961,1	R.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1878					
Dec. 11	$2^m21^s,89$	$2^m22^s,00$	$-0^s,11$	961″,0	G.
»	22,00	» »	0,00	961,8	D.
12	21,99	22,10	— 0,11	961,0	R.
»	22,02	» »	— 0,08	961,3	G.
»	21,97	» »	— 0,13	960,9	D.
14	22,29	22,26	+ 0,03	962,0	G.
»	22,26	» »	0,00	961,8	D.
15	22,23	22,34	— 0,11	961,0	R.
»	22,20	» »	— 0,14	960,8	G.
»	22,18	» »	— 0,16	960,7	D.
16	22,02	22,40	— 0,38	959,2	R.
»	22,16	» »	— 0,24	960,2	G.
»	22,29	» »	— 0,11	961,0	D
20	22,31	22,54	— 0,23	960,2	R.
»	22,33	» »	— 0,21	960,3	G.
»	22,41	» »	— 0,13	960,9	D.
22	22,49	22,58	— 0,09	961,2	R.
»	22,53	» »	— 0,05	961,5	G.
»	22,49	» »	— 0,09	961,2	D.
31	22,06	22,24	— 0,18	960,6	R.
»	22,12	» »	— 0,12	961,0	G.
»	22,10	» »	— 0,14	960,8	D.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

SPECCHIO II.

DATA	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1879					
Genn. 3	2m 21s,84	2m 21s,96	—0s,12	961″,0	R.
»	21,86	» »	— 0,10	961,1	G.
»	21,73	» »	— 0,23	960,3	P.
»	21,79	» »	— 0,17	960,7	D.
5	21,75	21,74	+ 0,01	961,9	R.
»	21,83	» »	+ 0,09	992,4	G.
»	21,79	» »	+ 0,05	962,1	P.
»	21,77	» »	+ 0,03	961,9	D.
7	21,26	21,50	— 0,24	960,2	R.
»	21,34	» »	— 0,16	960,8	G.
»	21,29	» »	— 0,21	960,5	P.
»	21,33	» »	— 0,17	960,8	D.
12	20,51	20,72	— 0,21	960,4	G.
»	20,62	» »	— 0,10	961,1	P.
»	20,42	» »	— 0,30	959,8	D.
13	20,32	20,54	— 0,22	960,2	R.
»	20,43	» »	— 0,11	961,1	G.
»	20,41	» »	— 0,13	960,9	P.
»	20,49	» »	— 0,05	961,4	D.
14	20,28	20,36	— 0,08	961,2	R.
»	20,38	» »	+ 0,02	961,9	G.
»	20,15	» »	— 0,21	960,4	P.
»	20,28	» »	— 0,08	961,2	D.
15	19,89	20,18	— 0,29	959,8	R.
»	19,99	» »	— 0,19	960,5	G.
»	20,12	» »	— 0,06	961,4	P.
»	19.98	» »	— 0,20	960,4	D.
16	20,03	20,00	+ 0,03	962,0	G.
»	19,97	» »	— 0,03	961,6	P.
»	20,05	» »	+ 0,05	962,2	D.
18	19,32	19,60	— 0,28	959,9	R.
»	19,41	» »	— 0,19	960,5	G.
»	19,44	» »	— 0,16	960,7	P.
»	19,33	» »	— 0,27	960,0	D.
20	19,06	19,20	— 0,14	960,9	R.
»	19,19	» »	— 0,01	961,7	G.
»	19,12	» »	— 0,08	961,3	P.
»	19,06	» »	— 0,14	960,9	D.
21	18,66	19,00	— 0,34	959,5	R.
»	18,77	» »	— 0,23	960,3	G.
»	18,77	» »	— 0,23	960,3	P.
»	18,78	» »	— 0,22	960,1	D.
23	18,52	18.56	— 0,04	961,5	R.
»	18,58	» »	+ 0,02	962,0	G.
»	18,52	» »	— 0,04	961,5	P.
1879					
Genn. 23	2m 18,s52	2m 18,s56	—0s,04	961″,5	D.
28	17,14	17,46	— 0,32	959,6	R.
»	17,24	» »	— 0,22	960,3	G.
»	17,22	» »	— 0,24	960,2	P.
»	17,19	» »	— 0,27	960,0	D.
30	16,86	17,00	— 0,14	960,9	R.
»	16,82	» »	— 0,18	960,2	G.
»	16,79	» »	— 0,21	960,5	P.
»	16,91	» »	— 0,09	961,2	D.
Febb. 1	16,47	14,54	— 0,07	961,3	R.
»	16,53	» »	— 0,01	961,8	G.
»	16,56	» »	+ 0,02	962,0	P.
»	16,53	» »	— 0,01	961,8	D.
6	15,30	15,38	— 0,08	961,2	R.
»	15,36	» »	— 0,02	961,7	G.
»	15,34	» »	— 0,04	961,5	P.
»	15,41	» »	+ 0,03	962,0	D.
7	14,89	15,16	— 0,27	959,9	R.
»	15,07	» »	— 0,09	961,1	G.
»	15,14	» »	— 0,02	961,7	P.
»	15,00	» «	— 0,16	960,7	D.
8	14,79	14,94	— 0,15	960,8	R.
»	14,92	» »	— 0,02	961,7	G.
»	14,89	» »	— 0,05	961,4	P.
»	14,92	» »	— 0,02	961,7	D.
12	13,92	14,04	— 0,12	961,0	R.
»	14,02	» »	— 0,02	961,7	G.
»	14,04	» »	0,00	961,8	P.
»	13,93	» »	— 0·11	961,1	D.
13	13,76	13,82	— 0,06	961,4	R.
»	13,81	» »	— 0,01	961,7	G.
»	13,84	» »	+ 0,02	962,0	D.
17	13,01	13,00	+ 0,01	961,9	R.
»	12,99	» »	— 0,01	961,7	G.
»	12,92	» »	— 0,08	961,3	P.
»	13,05	» »	+ 0,05	962,2	D.
18	12,64	12,80	— 0,16	960,7	R.
»	12,68	» »	— 0,12	961,0	G.
»	12,62	» »	— 0,18	960,6	P.
»	12,60	» »	— 0,20	960,4	D.
19	12,29	12,60	— 0,31	959,7	R.
»	12,51	» »	— 0,09	961,2	G.
»	12,36	» »	— 0,24	960,1	P.
»	12,56	» »	— 0,04	961,6	D.
20	12,38	12,40	— 0,02	961,7	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1879					
Febb. 20	$2^m12^s,30$	$2^m12^s,40$	$-0^s,10$	961″,1	P.
»	12,31	» »	— 0,09	961,2	D.
21	12,02	12,22	— 0,20	960,4	R.
»	12,23	» »	+ 0,01	961,9	G.
»	12,18	» »	— 0,04	961,6	P.
»	12,12	» »	— 0,10	961,1	D.
23	11,75	11,84	— 0,09	961,2	R.
»	11,79	» »	— 0,05	961,4	P.
»	11,86	» »	+ 0,02	962,0	D.
Marzo 2	10,56	10,72	— 0,16	960,7	R.
»	10,71	» »	— 0,01	961,7	G.
»	10,61	» »	— 0,11	961,1	P.
»	10,71	» »	— 0,01	961,7	D.
3	10,53	10,58	— 0,05	961,4	R.
»	10,57	» »	— 0,01	961,7	G.
»	10,57	» »	— 0,01	961,7	P.
»	10,62	» »	+ 0,04	962,2	D.
4	10,35	10,44	— 0,09	961,1	R.
»	10,41	» »	— 0,03	961,6	G.
»	10,36	» »	— 0,08	961,2	P.
»	10,49	» »	+ 0,05	962,2	D.
5	10,14	10,30	— 0,16	960,7	R.
»	10,22	» »	— 0,08	961,2	G.
»	10,11	» »	— 0,19	960,5	P.
»	10,14	» »	— 0,16	960,7	D.
6	10,19	10,18	+ 0,01	961,9	R.
»	10,21	» »	+ 0,03	962,1	G.
»	10,15	» »	— 0,03	961,6	P.
»	10,06	» »	— 0,12	961,0	D.
7	9,90	10,06	— 0,16	960,7	R.
»	9,90	» »	— 0,16	960,7	G.
»	9,95	» »	— 0,11	961,1	P.
»	9,97	» »	— 0,09	961,2	D.
8	9,54	9,94	— 0,40	958,9	R.
»	9,81	» »	— 0,13	961,0	P.
»	9,84	» »	— 0,10	961,2	D.
9	9,66	9,84	— 0,18	960,6	R.
»	9,74	» »	— 0,10	961,2	P.
»	9,62	» »	— 0,22	960,3	D.
10	9,56	9,74	— 0,18	960,6	R.
»	9,61	» »	— 0,13	961,0	G.
»	9,72	» »	— 0,02	961,7	P.
»	9,60	» »	— 0,14	960,9	D.
11	9,48	9,64	— 0,16	960,7	R.
»	9,56	» »	— 0,08	961,3	P.
1879					
Marzo 11	$2^m\ 9^s,51$	$2^m\ 9^s,64$	$-0^s,13$	961″,0	D.
12	9,52	9,54	— 0,02	961,7	R.
»	9,66	» »	+ 0,12	962,7	G.
»	9,58	» »	+ 0,04	962,1	P.
»	9,58	» »	+ 0,04	962,1	D.
14	9,33	9,38	— 0,05	961,5	R.
»	9,29	» »	— 0,09	961,3	G.
»	9,31	» »	— 0,07	961,4	P.
»	9,39	» »	+ 0,01	961,9	D.
15	9,26	9,32	— 0,06	961,5	R.
»	9,22	» »	— 0,10	961,1	G.
»	9,25	» »	— 0,07	961,4	P.
»	9,19	» »	— 0,13	961,0	D.
17	8,93	9,18	— 0,25	960,1	R.
»	9,05	» »	— 0,13	961,0	G.
»	9,06	» »	— 0,12	961,1	P.
»	8,99	» »	— 0,19	960,5	D.
19	8,77	9,08	— 0,31	959,6	R.
»	8,98	» »	— 0,10	961,1	G.
»	8,85	» »	— 0,23	960,3	P.
»	8,81	» »	— 0,27	960,0	D.
21	8,77	8,98	— 0,21	960,2	G.
»	8,80	» »	— 0,18	960,4	P.
»	8,77	» »	— 0,21	960,3	D.
30	8,94	8,94	0,00	961,8	R.
»	9,01	» »	+ 0,07	962,3	G.
»	8,81	» »	— 0,13	961,0	P.
»	8,91	» »	— 0,03	961,6	D.
31	8,81	8,96	— 0,15	960,8	R.
»	8,94	» »	— 0,02	961,7	G.
»	8,86	» »	— 0,10	961,1	P.
»	8,94	» »	— 0,02	961,7	D.
Aprile 1	8,67	8,98	— 0,31	959,5	R.
»	8,99	» »	+ 0,01	961,9	G.
»	8,72	» »	— 0,26	959.8	P.
»	9,00	» »	+ 0,02	961.9	D.
2	8,88	9,02	— 0,14	960,8	R.
»	8,88	» »	— 0,14	960,8	G.
»	8,93	» »	— 0,09	961,2	P.
»	8,92	» »	— 0,10	961,1	D.
3	8,99	9,06	— 0,07	961,2	R.
»	9,09	» »	+ 0,03	962,0	G.
»	8,96	» »	— 0,10	961,1	P.
»	9,11	» »	+ 0,05	962,1	D.
4	9,12	9,12	0,00	961,8	R.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore	Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac					Osservata	Nautical Almanac			
1879						1879					
Aprile 4	2m 9s,14	2m 9s,12	+0s,02	962″,0	G.	Magg. 7	2m12s,88	2m13s,04	—0s,16	960″,7	R.
»	9,11	» »	— 0,01	961,7	P.	»	12,96	» »	— 0,08	961,2	G.
»	9,21	» »	+ 0,09	962,5	D.	»	12,86	» »	— 0,18	960,5	P.
6	9,18	9,22	— 0,04	961,6	G.	»	12,94	» »	— 0,10	961,1	D.
»	9,11	» »	— 0,11	961,1	P.	12	13,73	13,86	— 0,13	960,9	R.
»	9,16	» »	— 0,06	961,4	D.	»	13,89	» »	+ 0,03	962,0	G.
9	9,01	9,42	— 0,41	958,9	R.	»	13,73	» »	— 0,13	960,9	P.
»	9,18	» »	— 0,24	960,1	G.	»	13,86	» »	0,00	961,8	D.
»	9,19	» »	— 0,23	960,2	P.	13	13,90	14,02	— 0,12	960,9	R.
»	9,14	» »	— 0,28	959,8	D.	»	13,89	» »	— 0,13	960,9	G.
10	9,52	9,50	+ 0,02	962,0	R.	»	13,84	» »	— 0,18	960,5	P.
»	9,45	» »	— 0,05	961.5	G.	»	13,84	» »	— 0,18	960,5	D.
»	9,44	» »	— 0,06	961,4	P.	14	14,10	14,20	— 0,10	961,1	R.
»	9,51	» »	+ 0,01	961,9	D.	»	14,07	» »	— 0,13	960,9	P.
11	9,42	9,58	— 0,16	960,7	R.	»	14,21	» »	+ 0,01	961,9	D.
»	9,52	» »	— 0,06	961,4	G.	15	14,32	14,36	— 0,04	961,6	R.
»	9,36	» »	— 0,22	960,3	P.	»	14,32	» »	— 0,04	961,6	G.
»	9,56	» »	— 0,02	961,7	D.	»	14,23	» »	— 0,13	960,9	P.
14	9,83	9,86	— 0,03	961,6	R.	»	14,39	» »	+ 0,03	962,0	D.
»	9,76	» »	— 0,10	961,2	G.	16	14,29	14,52	— 0,23	960,2	R.
»	9,72	» »	— 0,14	960,9	P.	»	14,41	» »	— 0,11	961,1	G.
»	9,78	» »	— 0,08	961,3	D.	»	14,36	» »	— 0,16	960,8	P.
19	10,34	10,40	— 0,06	961,4	G.	»	14,46	» »	— 0,06	961,4	D.
»	10,29	» »	— 0,11	961,0	P.	20	15,09	15,14	— 0,05	961,5	R.
»	10,30	» »	— 0,10	961,1	D.	»	15,01	» »	— 0,13	960,9	G.
20	10,53	10,52	+ 0,01	961,9	G.	»	14,94	» »	— 0,20	960,4	P.
»	10,56	» »	+ 0,04	962,1	P.	»	14,95	» »	— 0,19	960,5	D.
»	10,48	» »	— 0,04	961,5	D.	22	15,47	15,46	+ 0,01	961,9	G.
23	10,77	10,90	— 0,13	960,8	G.	»	15,39	» »	— 0,07	961,3	P.
»	10,78	» »	— 0,12	960,9	P.	»	15,46	» »	0,00	961,8	D.
»	10,85	» »	— 0,05	961,4	D.	23	15,30	15,60	— 0,30	959,7	R.
25	11,35	11,18	+ 0,17	963,0	G.	»	15,33	» »	— 0,27	960,0	G.
»	11,22	» »	+ 0,04	962,1	P.	»	15,24	» »	— 0,36	959,2	P.
»	11,38	» »	+ 0,20	963,2	D.	»	15,27	» »	— 0,33	959,5	D.
26	11,24	11,32	— 0,08	961,2	R.	29	16,30	16,44	— 0,14	960,9	R.
»	11,37	» »	+ 0,05	962,1	G.	»	16,43	» »	— 0,01	961,8	G.
»	11,27	» »	— 0,05	961,4	P.	»	16,35	» »	— 0,09	961,3	P.
»	11,34	» »	+ 0,02	961,9	D.	»	16,41	» »	— 0,03	961,6	D.
29	11,44	11,78	— 0,34	959,4	R.	30	16,36	16,56	— 0,20	960,5	R.
»	11,39	» »	— 0,39	959,1	G.	»	16,16	» »	— 0,40	959,1	G
»	11,49	» »	— 0,29	959,8	P.	»	16,39	» »	— 0,17	960,8	P.
Magg. 4	12,29	12,56	— 0,27	959.9	R.	»	16,43	» »	— 0,13	961,0	D.
»	12,54	» »	— 0,02	961,6	G.	31	16.52	16,68	— 0,16	960,8	R.
»	12,49	» »	— 0,07	961,3	P.	»	16,47	» »	— 0,21	960,4	G.
»	12,39	» »	— 0,17	960,6	D.	»	16,50	» »	— 0,18	960,6	P.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore	Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac					Osservata	Nautical Almanac			
1879						1879					
Mag. 31	$2^m16^s,48$	$2^m16^s,68$	$-0^s,20$	960″,5	D.	Giug. 14	$2^m17,^s64$	$2^m17,^s80$	$-0^s,16$	960″,6	R.
Giug. 1	16,56	16,80	— 0,24	960,2	R.	»	17,58	» »	— 0,22	960,2	G.
»	16.75	» »	— 0,05	961,5	G.	»	17,66	» »	— 0,14	960,8	P.
»	16,69	» »	— 0,11	961,1	P.	»	17,70	» »	— 0,10	961,1	D.
»	16,66	» »	— 0,14	960,9	D.	15	17,65	17,84	— 0,19	960,5	R.
2	16,69	16,90	— 0,21	960,4	R.	»	17,69	» »	— 0,15	960,8	G.
»	16,74	» »	— 0,16	960,7	G.	»	17,73	» »	— 0,11	961,1	P.
»	16,81	» »	— 0,09	961,3	P.	»	17,59	» »	— 0,25	960,1	D.
»	16,67	» »	— 0,23	960,3	D.	16	17,74	17,88	— 0,14	960,8	G.
3	16,92	17,02	— 0,10	961,1	R.	»	17,78	» »	— 0,10	961,1	P.
»	17,08	» »	+ 0,06	962,2	G.	18	17,76	17,92	— 0,16	960,7	G.
»	16,99	» »	— 0,03	961,6	P.	»	17,98	» »	+ 0,06	962,2	P.
»	16,92	» »	— 0,10	961,1	D.	»	17,99	» »	+ 0,07	962,3	D.
4	16,93	17,12	— 0,19	960,5	R.	19	17,83	17,92	— 0,09	961,2	G.
»	16,94	» »	— 0,18	960,6	G.	»	17,76	» »	— 0,16	960,7	P.
»	16,99	» »	— 0,13	960,9	P.	»	17,92	» »	0,00	961,8	D.
»	16,98	» »	— 0,14	960,9	D.	20	17,84	17,92	— 0,08	961,3	G.
5	17,02	17,20	— 0,18	960,5	R.	»	17,81	» »	— 0,11	961,0	P.
»	17,08	» »	— 0,12	961,0	G.	»	17,91	» »	— 0,01	961,7	D.
»	17,00	» »	— 0,20	960,4	P.	21	17,89	17,92	— 0,03	961,6	G.
»	17,07	» »	— 0,13	960,9	D.	»	17,91	» »	— 0,01	961,7	P.
7	17,20	17,38	— 0,18	960,6	R.	»	17,84	» »	— 0,08	961,2	D.
»	17,06	» »	— 0,32	959,5	G.	22	17,87	17,92	— 0,05	961,4	G.
»	17,26	» »	— 0,12	960,9	P.	»	17,90	» »	— 0,02	961,7	P.
»	17,18	» »	— 0,20	960,4	D.	»	17,86	» »	— 0,06	961,4	D.
8	17,31	17,46	— 0,15	960,8	R.	23	17,84	17,90	— 0,06	961,4	G.
»	17,44	» »	— 0,02	961,7	G.	»	17,87	» »	— 0,03	961,6	P.
»	17,28	» »	— 0,18	960,5	P.	»	17,78	» »	— 0,12	961,0	D.
»	17,30	» »	— 0,16	960,7	D.	24	17,76	17,88	— 0.12	961,0	R.
9	17,32	17,54	— 0,22	960,3	R.	»	17,84	» »	— 0,04	961,5	G.
»	17,34	» »	— 0,20	960,4	G.	»	17,66	» »	— 0,22	960,2	P.
»	17,49	» »	— 0,05	961,5	P.	»	17.71	» »	— 0,17	960,6	D.
»	17,46	» »	— 0,08	961,3	D.	25	17,76	17,86	— 0,10	961,1	R.
11	17,55	17,66	— 0,11	961,0	R.	»	17,74	» »	— 0,12	961,0	G.
»	17,47	» »	— 0,19	960,5	G.	»	17,71	» »	— 0,15	960,8	P.
»	17,54	» »	— 0,12	961,0	P.	»	17,69	» »	— 0,17	960,7	D.
»	17,53	» »	— 0,13	960,9	D.	26	17,81	17,82	— 0,01	961,7	R.
12	17,57	17,72	— 0,15	960,8	R.	»	17,78	» »	— 0,04	961,5	G.
»	17,60	» »	— 0,12	961,0	G.	»	17,80	» »	— 0,02	961,7	P.
»	17,60	» »	— 0,12	961,0	P.	»	17,72	» »	— 0,10	961,1	D.
»	17,53	» »	— 0,19	960,6	D.	27	17,64	17,78	— 0,14	960,8	G.
13	17,71	17,76	— 0,05	961,5	R.	»	17,66	» »	— 0,12	960,9	P.
»	17,71	» »	— 0,05	961,5	G.	»	17,64	» »	— 0,14	960,8	D.
»	17,68	» »	— 0,08	961,2	P.	28	17,59	17,74	— 0,15	960,8	G.
»	17,74	» »	— 0,02	961,7	D.	»	17,69	» »	— 0,05	961,5	P.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1879					
Giug. 28	$2^m17^s,61$	$2^m17^s,74$	$-0^s,13$	960″,9	D.
29	17,43	17,68	— 0,25	960,0	P.
»	17,44	» »	— 0,24	960,1	D.
30	17,54	17,62	— 0,08	961,2	G.
»	17,50	» »	— 0,12	960,9	P.
»	17,60	» »	— 0,02	961,7	D.
Luglio 1	17,50	17,56	— 0,06	961,4	G.
»	17,54	» »	— 0,02	961,7	P.
»	17,52	» »	— 0,04	961,5	D.
2	17,31	17,48	— 0,17	960,6	R.
»	17,46	» »	— 0,02	961,7	G.
»	17,39	» »	— 0,09	961,2	P.
»	17,38	» »	— 0,10	961,1	D.
3	17,18	17,42	— 0,24	960,2	R.
»	17,29	» »	— 0,13	960,9	G.
»	17,37	» »	— 0,05	961,5	P.
»	17,39	» »	— 0,03	961,6	D.
4	17,18	17,32	— 0,14	960,9	R.
»	17,26	» »	— 0,06	961,5	G.
»	17,22	» »	— 0,10	961,1	P.
»	17,26	» »	— 0,06	961,4	D.
5	17,08	17,24	— 0,16	960,7	R.
»	17,18	» »	— 0,06	961,4	G.
»	17,06	» »	— 0,18	960,6	P.
»	17,16	» »	— 0,08	961,3	D.
6	17,03	17,14	— 0,11	961,1	R.
»	17,14	» »	0,00	961,8	P.
»	17,18	» »	+ 0,04	962,1	D.
7	16,91	17,04	— 0,13	961,0	R.
»	16,97	» »	— 0,07	961,3	G.
»	16,98	» »	— 0,06	961,4	P.
»	17,08	» »	+ 0,04	962,1	D.
8	16,91	16,94	— 0,03	961,6	G.
»	16,91	» »	— 0,03	961,6	P.
»	17,00	» »	+ 0,06	962,5	D.
9	16,70	16,82	— 0,12	961,0	R.
»	16,75	» »	— 0,07	961,3	G.
»	16,74	» »	— 0,08	961,3	P.
»	16,70	» »	— 0,12	961,0	D.
11	16,42	16,58	— 0,16	960,7	R.
»	16,54	» »	— 0,04	961,6	G.
»	16,45	» »	— 0,13	961,0	D.
12	16,39	16,46	— 0,07	961,3	R.
»	16,41	» »	— 0,05	961,5	G.
»	1,657	» »	+ 0,11	962,6	D.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1879					
Lugl. 13	$2^m16^s,20$	$2^m16^s,32$	$-0^s,12$	961″,0	R.
»	16,21	» »	— 0,11	961,1	G.
»	16,30	» »	— 0,02	961,7	D.
14	16,02	16,18	— 0,16	960,7	R.
»	15,84	» »	— 0,34	959,4	G.
»	15,94	» »	— 0,24	960,1	D.
15	15,85	16,04	— 0,19	960,5	R.
»	15,89	» »	— 0,15	960,8	G.
»	15,86	» »	— 0,18	960,6	D.
16	15,84	15,90	— 0,06	961,4	R.
»	15,88	» »	— 0,02	961,7	G.
»	15,89	» »	— 0,01	961,7	D.
17	15,64	15,76	— 0,12	961,0	G.
»	15,59	» »	— 0,17	960,7	D.
18	15,49	15,62	— 0,13	960,9	R.
»	15,51	» »	— 0,11	961,1	G.
»	15,60	» »	— 0,02	961,7	D.
19	15,32	15,46	— 0,14	960,8	R.
»	15,36	» »	— 0,10	961,1	G.
»	15,28	» »	— 0,18	960,5	D.
20	15,21	15,30	— 0,09	961,2	R.
»	15,28	» »	— 0,02	961,7	G.
»	15,20	» »	— 0,10	961,1	D.
21	15,01	15,14	— 0,13	960,8	G.
»	14,94	» »	— 0,20	960,3	D.
22	14,84	14,98	— 0,14	960,7	G.
»	14,87	» »	— 0,11	961,0	D.
23	14,79	14,82	— 0,03	961,6	G.
»	14,83	» »	+ 0,01	961,9	D.
25	14,24	14,48	— 0,24	960,1	G.
»	14,41	» »	— 0,07	961,3	D.
26	14,25	14,32	— 0,07	961,3	R.
»	14,21	» »	— 0,11	961,1	G.
»	14,29	» »	— 0,03	961,6	D.
27	14,01	14,14	— 0,13	960,9	R.
»	14,14	» »	0,00	961,8	G.
»	14,11	» »	— 0,03	961,7	D.
28	13,80	13,98	— 0,18	960,5	R.
»	13,86	» »	— 0,12	961,0	G.
»	13,90	» »	— 0,08	961,2	D.
29	13,44	13,80	— 0,36	959,2	R.
»	13,64	» »	— 0,16	960,6	G.
»	13,68	» »	— 0,12	960,9	D.
30	13,42	13,64	— 0,22	960,2	R.
»	13,60	» »	— 0,04	961,5	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1879					
Lugl. 30	$2^m13^s,64$	$2^m13^s,64$	$0^s,00$	961″,8	D.
31	13,39	13,46	— 0,07	961,3	R.
»	13,38	» »	— 0,08	961,2	G.
»	13,51	» »	+ 0,05	962,2	D.
Agos. 1	13,21	13,28	— 0,07	961,3	R.
»	13,39	» »	+ 0,11	962,6	G.
»	13,29	» »	+ 0,01	961,9	D.
2	12,95	13,12	— 0,17	960,6	R.
»	12,97	» »	— 0,15	960,8	P.
»	13,07	» »	— 0,05	961,4	D.
3	12,71	12,94	— 0,23	960,2	R.
»	12,75	» »	— 0,19	960,5	G.
»	12,76	» »	— 0,18	960,6	P.
»	12,88	» »	— 0,06	961,4	D.
4	12,71	12,78	— 0,07	961,3	R.
»	12,74	» »	— 0,04	961,5	G.
»	12,69	» »	— 0,09	961,2	P.
»	12,68	» »	— 0,10	961,1	D.
5	12,44	12,60	— 0,16	960,6	R.
»	12,51	» »	— 0,09	961,2	G.
»	12,46	» »	— 0,14	960 8	P.
»	12,50	» »	— 0,10	961,1	D.
6	12,40	12,44	— 0,04	961,3	R.
»	12,49	» »	+ 0,05	962,2	G.
»	12,40	» »	— 0,04	961,5	P.
»	12,40	» »	— 0,04	961,5	D.
7	12,07	12,26	— 0,19	960,4	R.
»	12,06	» »	— 0,20	960,3	G.
»	12,16	» »	— 0,10	961,1	P.
»	12,26	» »	0,00	961,8	D.
8	11,96	12,08	— 0,12	960,9	R
»	12,04	» »	— 0,04	961,5	G.
»	11,94	» »	— 0,14	960,8	P.
»	12,03	» »	— 0,05	961,4	D.
9	11,74	11,92	— 0,18	960,6	R.
»	11,89	» »	— 0,03	961,6	G.
»	11,76	» »	— 0,16	960,7	P.
»	11,79	» »	— 0,13	960,9	D.
10	11,68	11,76	— 0,08	961,3	R.
»	11,70	» »	— 0,06	961,4	G.
»	11,59	» »	— 0,17	960,7	P.
»	11,70	» »	— 0,06	961,4	D.
11	11,44	11,58	— 0,14	960,8	R.
»	11,42	» »	— 0,16	960,7	G.
»	11,46	» »	— 0,12	961,0	P.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1879					
Agos. 11	$2^m11^s,54$	$2^m11^s,58$	$-0^s,04$	961″,3	D.
12	11,31	11,42	— 0,11	961,0	R.
»	11,41	» »	— 0,01	961,7	G.
»	11,26	» »	— 0,16	960,7	P.
»	11,31	» »	— 0,11	961,0	D.
13	11,15	11,26	— 0,11	961,0	G.
»	11,08	» »	— 0,18	960,5	P.
»	11,17	» »	— 0,09	961,2	D.
14	11,17	11,10	+ 0,07	962,3	G.
»	11,05	» »	— 0,05	961,4	P.
»	11,14	» »	+ 0,04	962,1	D.
15	10,84	10,94	— 0,10	961,1	G.
»	10,90	» »	— 0,04	961,5	P.
»	10,84	» »	— 0,10	961,1	D.
18	10,31	10,48	— 0,17	960,6	G.
»	10,31	» »	— 0,17	960,6	P.
»	10,28	» »	— 0,20	960,3	D.
19	10,21	10,34	— 0,13	960,9	G.
»	10,12	» »	— 0,22	960,3	P.
»	10,18	» »	— 0,16	960,7	D.
20	10,19	10,20	— 0,01	961,7	G.
»	10,05	» »	— 0,15	960,8	P.
»	10,12	» »	— 0,08	961,3	D.
21	9,84	10,06	— 0,22	960,3	R.
»	9,95	» »	— 0,11	961,1	G.
»	9,81	» »	— 0,25	960,0	P.
»	9,91	» »	— 0,15	960,8	D.
22	9,71	9,92	— 0,21	960,4	R.
»	9,86	» »	— 0,06	961,4	G.
»	9,89	» »	— 0,03	961,6	P.
»	9,75	» »	— 0,17	960,6	D.
23	9,41	9,80	— 0,39	959,1	R.
»	9,69	» »	— 0,11	961,1	G.
»	9,49	» »	— 0,31	959,6	P.
»	6,59	» »	— 0,21	960,4	D.
24	9,54	9,68	— 0,14	960,9	R.
»	9,58	» »	— 0,10	961,2	G.
»	9 58	» »	— 0,10	961,2	P.
»	9,54	» »	— 0,14	960,9	D.
25	9,43	9,54	— 0,11	961,1	R.
»	9,54	» »	0,00	961,8	G.
»	9,51	» »	— 0,03	961,6	P.
»	9,54	» »	0,00	961,8	D.
26	9,24	9,42	— 0,18	960,5	R.
»	9,46	» »	+ 0,04	962,1	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore	Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac					Osservata	Nautical Almanac			
1879						1879					
Agost. 26	2m 9s,42	2m 9s,42	0s,00	961″,8	D.	Sett. 20	2m 7s,98	2m 8s,12	—0s,14	960″,8	P.
28	9,14	9,20	— 0,06	961,4	G.	21	8,06	8,14	— 0,08	961,3	G.
»	8,99	» »	— 0,21	960,3	P.	»	8,06	» »	— 0,08	961,3	P.
»	9,01	» »	— 0,19	960,5	D.	22	8,22	8,16	+ 0,06	962,3	G.
30	8,81	9,00	— 0,19	960,5	R.	»	8,21	» »	+ 0,05	962,2	P.
»	8 81	» »	— 0,19	960,5	G.	23	8,13	8,20	— 0,07	961,3	G.
»	8,89	» »	— 0,11	961,1	P.	»	8,11	» »	— 0,09	961,2	P.
»	8,83	» »	— 0,17	960,6	D.	Ottob. 1	8,76	8,68	+ 0,08	962,4	G.
31	8,80	8,90	— 0,10	961,1	G.	»	8,62	» »	— 0,06	961,4	P.
»	8,81	» »	— 0,09	961,2	P	2	8,65	8,78	— 0,13	960,9	P.
»	8,86	» »	— 0,04	961,5	D.	6	9,09	9,18	— 0,09	961,2	R.
Sett. 1	8,82	8,82	0,00	961,8	R.	»	9,08	» »	— 0,10	961,1	P.
»	8,79	» »	— 0,03	961,6	P.	7	9,17	9,30	— 0,13	960,9	R.
»	8,71	» »	— 0,11	961,0	D.	»	9,17	» »	— 0,13	960,9	P.
2	8,47	8,72	— 0,25	960,0	R.	8	9,18	9,42	— 0,24	960,1	R.
»	8,57	» »	— 0,15	960,7	G.	»	9,31	» »	— 0,11	961,0	P.
»	8,50	» »	— 0,22	960,2	P.	11	9,71	9,84	— 0,13	960,9	R.
»	8,56	» »	— 0,16	960,7	D.	»	9,86	» »	+ 0,02	962,0	P.
4	8,39	8,58	— 0,19	960,5	G.	12	9,90	9,98	— 0,08	961,2	R.
»	8,41	» »	— 0,17	960,6	P.	»	9,91	» »	— 0,07	961,3	P.
»	8,51	» »	— 0,07	961,3	D.	14	10,10	10,28	— 0,18	960,5	R.
7	8,32	8,38	— 0,06	961,4	R.	»	10,16	» »	— 0,12	960,9	P.
»	8,36	» »	— 0,02	961,7	P.	17	10,64	10,78	— 0,14	960,8	R.
»	8,41	» »	+ 0,03	962,0	D.	»	10,72	» »	— 0,06	961,4	P.
8	8,29	8,32	— 0,03	961,6	R.	19	11,10	11,14	— 0,04	961,5	R.
»	8,35	» »	+ 0,03	962,0	G.	»	11,14	» »	0,00	961,8	P.
»	8,25	» »	— 0,07	961,3	P.	22	11,51	11,72	— 0,21	960,4	R.
»	8,29	» »	— 0,03	961,6	D.	»	11,55	» »	— 0,17	960,6	P.
10	8,13	8,22	— 0,09	961,2	G.	»	11,50	» »	— 0,22	960,4	D.
»	8,06	» »	— 0,16	960,6	P.	24	11,93	12,12	— 0,19	960,5	R.
»	8,08	» »	— 0,14	960,7	D.	»	11,94	» »	— 0,18	960,6	P.
11	8,05	8,18	— 0,13	960,8	G.	»	11,98	» »	— 0,14	960,9	D.
»	8,03	» »	— 0,15	960,6	P.	26	12,38	12,54	— 0,16	960,7	R.
»	8,06	» »	— 0,12	960,9	D.	»	12,40	» »	— 0,14	960,9	P.
13	8,01	8,12	— 0,11	961,0	G.	»	12,43	» »	0,11	961,1	D.
»	7,92	» »	— 0,20	960,3	D.	28	12,79	12,96	— 0,17	960,7	P.
14	8,13	8,10	+ 0,03	962,0	G.	»	12,79	» »	— 0,17	960,7	D.
»	8,09	» »	— 0,01	961,7	P.	29	13,16	13,18	— 0,02	961,7	P.
»	8,09	» »	— 0,01	961,7	D.	»	13,11	» »	— 0,07	961,3	D.
18	8,20	8,08	+ 0,12	962,7	G.	Nov. 1	13,75	13,86	— 0,11	961,1	R.
»	8,06	» »	— 0,02	961,7	P.	»	13,73	» »	— 0,13	960,9	P.
»	8,19	» »	+ 0,11	962,6	D.	»	13,95	» »	+ 0,09	962,5	D.
19	8,01	8,10	— 0,09	961,2	G.	2	13,84	14,08	— 0,24	960,2	R.
»	8,03	» »	— 0,07	961,3	P.	»	13,88	» »	— 0,20	960,5	G.
20	7,95	8,12	— 0,17	960,7	G.	»	13,94	» »	— 0,14	960,9	P.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1879					
Nov. 2	$2^m13^s,82$	$2^m14^s,08$	$-0^s,26$	960″,0	D.
4	14,27	14,54	— 0,27	960,0	R.
»	14,41	» »	— 0,13	961,0	G.
»	14,38	» »	— 0,16	960,7	P.
»	14,27	» »	— 0,27	960,0	D.
5	14,81	14,78	+ 0,03	962,0	G.
»	14,88	» »	+ 0,10	962,6	P.
»	14,85	» »	+ 0,07	962,3	D.
7	15,04	15,26	— 0,22	960,3	R.
»	15,05	» »	— 0,21	960,4	G.
»	15,09	» »	— 0,17	960,6	P.
»	15,10	» »	— 0,16	960,7	D.
8	15,38	15,48	— 0,10	961,1	R.
»	15,36	» »	— 0,12	960,9	G.
»	15,41	» »	— 0,07	961,3	P.
»	15,40	» »	— 0,08	961,2	D.
9	15,55	15,72	— 0,17	960,7	R.
»	15,67	» »	— 0,05	961,4	G.
»	15,65	» »	— 0,07	961,2	P.
»	15,57	» »	— 0,15	960,8	D.
10	15,75	15,96	— 0,21	960,4	R.
»	15,81	» »	— 0,15	960,8	G.
»	15,84	» »	— 0,12	961,0	P.
»	15,87	» »	— 0,09	961,2	D.
11	16,04	16,20	— 0,16	960,7	R.
»	16,11	» »	— 0,09	961,2	G.
»	16,09	» »	— 0,11	961,1	P.
»	16,11	» »	— 0,09	961,2	D.
14	16,84	16,92	— 0,08	961,3	R.
»	16,80	» »	— 0,12	961,0	G.
»	16,75	» »	— 0,17	960,7	P.
»	16,85	» »	— 0,07	961,4	D.
16	17,22	17,40	— 0,18	960,6	R.
»	17,31	» »	— 0,09	961,2	G.
»	17,42	» »	+ 0,02	962,0	P.
»	17,39	» »	— 0,01	961,7	D.
17	17,50	17,62	— 0,12	961,0	R.
»	17,62	» »	0,00	961,8	G.
»	17,64	» »	+ 0,02	961,9	P.
»	17,71	» »	+ 0,09	962,5	D.
19	17,82	18,08	— 0,26	960,0	R.
»	17,88	» »	— 0,20	960,4	G.
»	17,86	» »	— 0,22	960,3	P.
»	17,81	» »	— 0,27	959,9	D.
23	18,87	18,98	— 0,11	961,0	R.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1879					
Nov. 23	$2^m18^s,89$	$2^m18^s,98$	$-0^s,09$	961″,2	G.
»	18,90	» »	— 0,08	961,3	P.
»	18,92	» »	— 0,06	961,4	D.
Dicem. 2	20,52	20,72	— 0,20	960,4	R.
»	20,59	» »	— 0,13	960,9	G.
»	20,59	» »	— 0,13	960,9	P.
»	20,61	» »	— 0,11	961,0	D.
5	20,96	21,20	— 0,24	960,2	R.
»	21,26	» »	+ 0,06	962,2	G.
»	21,16	» »	— 0,04	961,6	P.
»	21,26	» »	+ 0,06	962,2	D.
6	21,10	21,34	— 0,24	960,2	R.
»	21,21	» »	— 0,13	960,9	G.
»	21,06	» »	— 0,28	959,9	P.
»	21,11	» »	— 0,23	960,3	D.
7	21,37	21_s48	— 0,11	961,1	R.
»	21,50	» »	+ 0,02	962,0	P.
»	21,42	» »	— 0,06	961,4	D.
8	21,41	21,62	— 0,21	960,5	R.
»	21,44	» »	— 0,18	960,7	P.
»	21,52	» »	— 0,10	961,1	D.
10	21,59	21,86	— 0,27	959,9	R.
»	21,65	» »	— 0,21	960,4	G.
»	21,59	» »	— 0,27	959,9	P.
»	21,60	» »	— 0,26	960,0	D.
12	22,01	22,06	— 0,05	961,4	R.
»	22,03	» »	— 0,03	961,6	G.
»	22,06	» »	0,00	961,8	P.
»	22,12	» »	+ 0,06	962,2	D.
14	22,15	22,24	— 0,09	961,2	R.
»	22,35	» »	+ 0,11	962,6	G.
»	22,14	» »	— 0,10	961,1	D.
18	22,38	22,48	— 0,10	961,1	R.
»	22,63	» »	+ 0,15	962,8	G.
»	22,39	» »	— 0,09	961,2	P.
»	22,47	» »	— 0,01	961,7	D.
19	22,26	22,52	— 0,26	960,1	R.
»	22,43	» »	— 0,09	961,2	G.
»	22,29	» »	— 0,23	960,3	P.
»	22,30	» »	— 0,22	960,3	D.
20	22,28	22,54	— 0,26	960,0	R.
»	22,42	» »	— 0,12	961,0	G.
»	22,38	» »	— 0,16	960,7	P.
»	22,40	» »	— 0,14	960,8	D.
21	22,36	22,56	— 0,20	960,4	R.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1879.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1879					
Dec. 21	$2^m22^s,48$	$2^m22^s,56$	$-0^s,08$	961″,3	G.
»	22,42	» »	— 0,14	960,8	P.
»	22,43	» »	— 0,13	960,9	D.
22	22,42	22,58	— 0,16	960,8	R.
»	22,50	» »	— 0,08	961,3	G.
»	22,54	» »	— 0,04	961,6	P.
»	22,56	» »	— 0,02	961,7	D.
23	22,23	22,58	— 0,35	959,5	R.
»	22,44	» »	— 0,14	960,9	G.
»	22,38	» »	— 0,20	960,5	P.
»	22,34	» »	— 0,24	960,2	D.
24	22,34	22,56	— 0,22	960,3	R.
»	22,54	» »	— 0,02	961,7	G.
»	22,40	» »	— 0,16	960,7	P.
»	22,49	» »	— 0,07	961,3	D.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1879					
Dec. 25	$2^m22^s,14$	$2^m22^s,54$	$-0^s,40$	959″,0	R.
»	22,31	» »	— 0,23	960,2	G.
»	22,24	» »	— 0,30	959,7	P.
»	22,21	» »	— 0,33	959,6	D.
26	22,34	22,52	— 0,18	960,6	R.
»	22,51	» »	— 0,01	961,7	G.
»	22,41	» »	— 0,11	961,0	P.
»	22,41	» »	— 0,11	961,0	D.
27	22,20	22,48	— 0,28	959,9	R.
»	22,39	» »	— 0,09	961,2	G.
»	22,41	» »	— 0,07	961,3	D.
29	22,41	22,38	+ 0,03	962,0	R
»	22,29	» »	— 0,09	961,2	G.
»	22,45	» »	+ 0,07	962,3	P.
»	22,42	» »	+ 0,04	962,1	D.

INDICE DEL VOLUME VIII.° SERIE 3.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Verri. *I Vulcani Cimini* (con una tavola) . . . . . pag. 3
Pantanelli. *I diaspri della Toscana e i loro fossili* (con una tavola) . . . » 35
Bartoli. *Apparecchio per la determinazione dell' equivalente meccanico del calore* (con una tavola) . . . . . » 67
» *Le leggi delle polarità galvaniche* (con due tavole) . . . . . » 75
Respighi. *Catalogo delle declinazioni medie pel 1875,0 di 1463 stelle comprese fra i paralleli 20° e 64° nord dedotto da osservazioni fatte nel R. Osservatorio del Campidoglio* . . . . . » 101
Parona. *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili* (con tre tavole) . . » 187
Favero. *De aequationum differentialium partialium natura disquisitiones quaedam analyticae* . . . . . » 217
Incoronato. *Sopra uno Scheletro Umano dell'età della pietra della Provincia di Roma* (con una tavola) . . . . . » 240
Betocchi. *Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1879* (con una tavola). 247
Ascoli. *Sulle serie trigonometriche a due variabili* . . . . . » 263
Meli. *Sulla natura geologica dei terreni incontrati nelle fondazioni tubulari del nuovo ponte di ferro costruito sul Tevere a Ripetta, e sull' Unio sinuatus Lamk. rinvenutovi* (con una tavola) . . . . . » 320
Canavari. *I Brachiopodi degli Strati a Terebratula Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale* (con quattro tavole) . . . . . » 329
Cerruti. *Sulle vibrazioni de' corpi elastici isotropi* . . . . . » 361
Respighi. *Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio negli anni 1878 e 1879.* . . . . . » 390

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I. (1876-77).
» Vol. II. (1877-78).
» Vol. III. (1878-79).
» Vol. IV. (1879-80).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. disp. 1, 2.
» » » » » » » II. » 1, 2.
» » » » » » » III.
» » » » » » » IV.
» » » » » » » V.
» » » » » » » VI.
» » » » » » » VII.
» » » » » » » VIII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I.
» » » » » » » II.
» » » » » » » III.
» » » » » » » IV.
» » » » » » » V.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01354 6312